

УДК 533.6.011.55

© 2006 г. И.Г. Брыкина, Б.В. Рогов, Г.А. Тирский

## КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ РАЗРЕЖЕННЫХ ПОТОКОВ ГАЗА В ЗАДАЧАХ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОТЕРМОДИНАМИКИ

Определяются границы применимости континуальных моделей течения в задаче гиперзвукового обтекания разреженным газом затупленных тел посредством асимптотического анализа уравнений Навье – Стокса, численного решения уравнений вязкого ударного слоя и численного и асимптотического решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса. Показано, что модель тонкого вязкого ударного слоя дает правильные значения коэффициентов трения и теплопередачи в переходном к свободномолекулярному режиму обтекания. Проводятся сравнения между асимптотическими решениями, численными решениями, полученными в рамках разных континуальных моделей, и результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Движение космических аппаратов, зондов и метеороидов сквозь атмосферы Земли и планет сопровождается последовательным прохождением всех режимов сверхзвукового обтекания, начиная от свободномолекулярного, затем переходного (больцмановского) и далее, в нижних слоях атмосферы, континуального (гидродинамического). Эти режимы в шкале чисел Кнудсена  $Kn = l/L$ , где  $l$  – средняя длина свободного пробега молекул,  $L$  – макроскопическая длина обтекаемого тела, характеризуются соответственно большими ( $Kn \gg 1$ ), умеренными ( $Kn = O(1)$ ) и малыми ( $Kn \ll 1$ ) числами Кнудсена. В каждом из них течение газа традиционно описывается адекватной своему режиму математической моделью, несмотря на то что все эти режимы в принципе могут быть строго описаны в рамках единой модели, основанной на решении кинетического уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения. Это нелинейное интегродифференциальное уравнение в общем случае содержит семь независимых переменных: переменные фазового пространства (три координаты, три компоненты скорости частиц) и время и включает в себя пятикратный (для одноатомного и многоатомного газа без учета возбуждения внутренних степеней свободы) нелинейный интеграл столкновений. Кратность интеграла столкновений повышается при учете возбуждения внутренних степеней свободы. Из-за высокой размерности фазового пространства независимых переменных уравнения Больцмана решение сколько-нибудь содержательных задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена в рамках этого уравнения представляет до сих пор сложную вычислительную проблему [1–3].

Практически важное направление – построение более простых модельных кинетических уравнений. Первой из них была модель Крука [4] для уравнения Больцмана с весьма простым релаксационным членом, приближенно заменяющим интеграл столкновения Больцмана, поэтому уравнение Крука сохраняет все черты уравнения Больцмана, связанные со свободным движением частиц, и приближенно, среднестатистически описывает их столкновения. Количественные результаты, получаемые на основе решения уравнения Крука, за исключением весьма редких случаев, отличаются от соответствующих результатов, полученных на основе решения уравнения Больцмана. В частности, при переходе к сплошной среде уравнение Крука дает число Прандтля, равное единице, в то время как точное его значение для одноатомного газа равно  $2/3$  [5].

С 1960-х годов развивается построение более содержательных модельных уравнений Больцмана. В настоящее время широкое распространение получило модельное уравнение неполного третьего приближения ( $S$ -модель) [6–8]. Несмотря на то что это модельное кинетическое уравнение значительно проще точного уравнения Больцмана, оно также является сложным инте-

гродифференциальным уравнением высокой размерности. Типичная трудность численного решения как модельного, так и точного кинетического уравнения Больцмана при больших числах  $K_p$  заключается в необходимости учитывать в потоке разрывы функции распределения, что существенно усложняет численный алгоритм и его программную реализацию. С другой стороны, численное решение кинетических уравнений при малых числах  $K_p$  (приближение к континуальному режиму течения) требует построения полностью консервативных методов высокого (не менее второго) порядка аппроксимации.

Альтернатива кинетическим уравнениям – разные приближенные методы прямого статистического моделирования Монте-Карло (ПСМ) (Direct Simulation Monte-Carlo – DSMC) [9–12]. В настоящее время это основной математический инструмент изучения сложных двумерных и трехмерных гиперзвуковых течений по следующим основным причинам: сравнительная простота перехода от одномерных к двумерным и трехмерным задачам, возможность использовать разные модели взаимодействия частиц с возбуждением внутренних степеней свободы, а также возможность учитывать химические реакции без существенного усложнения вычислительного алгоритма и, наконец, возможность эффективной реализации метода на современных ЭВМ с параллельной и векторной архитектурой.

Несмотря на широкое применение методов ПСМ, они имеют ряд недостатков. При моделировании околосредних течений дополнительные вычисления на более мелкой сетке и с большим числом моделирующих частиц становятся затруднительными, и в этом случае возникает вопрос о точности результатов, о том, как далеко они находятся от решения уравнения Больцмана. Анализ точности решения затрудняется из-за наличия статистических ошибок, связанных с пространственной и временной дискретизацией, и ошибок, связанных с ограниченными возможностями задания достаточно большого числа моделирующих частиц. Не до конца выяснена связь метода ПСМ с решением уравнения Больцмана.

Наличие в безразмерном уравнении Больцмана числа  $K_p$  перед конвективным членом (перед полной производной от функции распределения в фазовом пространстве координат и скоростей) позволяет построить асимптотические приближения этого уравнения, которые эффективны для решения задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена при достаточно больших и достаточно малых числах  $K_p$ . В свободномолекулярном режиме обтекания уравнение Больцмана допускает точное решение в виде равновесной по скоростям функции распределения Максвелла, и трудность решения краевых задач аэродинамики и теплообмена переносится на правильный учет граничных условий для функции распределения [13–16]. Получение этих условий сводится к квантово-механической задаче расчета коллективного взаимодействия падающих на обтекаемую поверхность частиц с заданной кристаллической решеткой тела. Ее решение приводит к итоге на уровне функции распределения к определению граничной трансформанты – плотности вероятности отраженных от поверхности частиц, через которую находится распределение скоростей этих частиц, и тем самым определяются передаваемые ими обтекаемому телу импульс и энергия. Эта проблема скорее квантово-механическая и решается для простых моделей кристаллической решетки обтекаемой поверхности, в связи с чем в аэродинамических расчетах, как правило, используется феноменологическая схема зеркально-диффузионного отражения, когда граничная трансформанта выражается всего через две макровеличины: коэффициент диффузности (отдельно для касательного и нормального импульса падающих частиц) и коэффициент аккомодации энергии, которые, как правило, берутся из эксперимента.

Важно заметить, что в задачах аэродинамики и теплообмена влияние законов взаимодействия частиц (молекул, атомов, ионов и электронов) с обтекаемыми поверхностями проявляется тем сильнее, чем более газ разрежен. В случае континуального режима обтекания в достаточно плотном газе эти проблемы не возникают, так как каждая молекула около поверхности, многократно с ней сталкиваясь, полностью теряет свой касательный импульс (выполняется условие прилипания) и передает всю свою энергию (коэффициент аккомодации энергии равен единице). После определения функции распределения с заданными граничными условиями определение аэродинамических сил и потоков тепла на стенку сводится в аэродинамике разреженного газа к квадратурам, которые для простейших форм обтекаемых тел (пластина, цилиндр, сфера, клин, конус и т.п.) вычисляются явно, а для сложных поверхностей – численно.

Режим свободномолекулярного течения – один из немногих примеров механики газа, когда сопротивление и теплопередача могут быть получены из точного решения для функции распределения путем квадратур. Окончательные результаты представляются с точностью до коэффициентов аккомодации нормального и касательного импульсов и коэффициента аккомодации

энергии. Имеющиеся экспериментальные и теоретические данные указывают границу наступления свободномолекулярного режима обтекания, равную примерно  $Kn_{\infty} = l_{\infty} L \geq 10$ , где индекс  $\infty$  относится к условиям в набегающем потоке.

В другом крайнем случае – континуальном режиме обтекания, когда число  $Kn$  достаточно мало, разложение функции распределения в окрестности локального термодинамического равновесия (в окрестности равновесной по скоростям функции Максвелла) по целым степеням числа  $Kn$  (метод Энского) в нулевом приближении приводит к уравнениям Эйлера, а в первом приближении – к уравнениям Навье – Стокса (НС) с потерей возможности описывать процессы, протекающие за время между столкновениями частиц ( $\sim 10^{-9}$  с при нормальных условиях) и в областях порядка длины свободного пробега, например в кнудсеновских слоях и в структуре ударных волн. Исходное уравнение Больцмана, в противоположность уравнениям гидродинамики, описывает процессы, протекающие в масштабах временных и пространственных кнудсеновских слоев, но, в свою очередь, не описывает во времени и пространстве процессы столкновения частиц – столкновение протекает мгновенно и в точке. При сравнении уравнения Больцмана с уравнениями Эйлера и НС следует также отметить, что последние допускают в ряде случаев аналитические решения довольно содержательных краевых задач, в то время как решение краевых задач в рамках уравнения Больцмана требует с самого начала применения весьма трудоемких численных методов.

Во втором приближении метода Энского приходим к уравнениям Барнетта и далее – к супербарнеттовым уравнениям. В последние годы наметился возросший интерес к учету высших приближений метода Энского, в частности к уравнениям Барнетта, с надеждой расширить область применимости континуальных моделей в задачах гиперзвукового обтекания в сторону больших чисел  $Kn$  (или меньших чисел Рейнольдса  $Re$ ). Это обусловлено, в первую очередь, успехом использования этих уравнений в задаче об ультразвуке и в задаче о структуре ударной волны [17] (навье-стоксовская структура ударной волны дает при больших числах Маха существенно меньшую ее толщину по сравнению с экспериментом).

Однако возникают принципиальные сложности при использовании уравнений Барнетта. Прежде всего это появление в тензоре напряжений вторых производных от температуры, а в потоке тепла – вторых производных от компонент вектора скорости, что приводит в итоге к третьим производным: от давления и температуры в уравнении импульса и от скорости в уравнении энергии, в результате чего возникает проблема постановки дополнительных, не вытекающих из механической постановки задачи, граничных условий. Кроме того, появление коротковолновой неустойчивости в уравнениях Барнетта [18] приводит к тому, что для получения решения при более мелком шаге численной сетки необходимо разрабатывать дополнительные меры по стабилизации решения [19]. Так, для подавления неустойчивости при решении стационарных задач обтекания методом установления используются “расширенные” (“исправленные”) уравнения, включающие некоторые специально подобранные внепорядковые члены [20]. Кроме того, дополнительные исследования дифференциальных приближений уравнений Барнетта в режиме течения со скольжением показали, что эти приближения могут нарушать второй закон термодинамики [21].

Более того, согласно численному решению задачи обтекания пластины с острой передней кромкой [22], уравнения Барнетта дают менее точное описание поля течения, чем уравнения НС. Было показано [23, 24], что учет барнеттовских членов ухудшает согласование теоретических и экспериментальных результатов при числах  $Kn$ , приближающихся к границе применимости уравнений НС. Эта граница в задачах гиперзвукового обтекания зависит от определяющих параметров и от метода решения и, как установлено из численных расчетов, соответствует числам  $Kn$  в пределах от 0.1 до 0.8. Уравнения Барнетта могут улучшить результаты решения задач обтекания только в случаях, когда уравнения НС имеют приемлемую точность, т.е. когда число  $Kn$  достаточно мало; однако там, где уравнения НС непригодны, непригодны и уравнения Барнетта [24]. Таким образом, надежды на улучшение результатов решения задач сверх- и гиперзвукового обтекания в области малых чисел  $Re$  с применением уравнений Барнетта по сравнению с результатами, полученными на основе использования уравнений НС, не оправдались. Это же замечание относится и к супербарнеттовым уравнениям. Подробно современный статус уравнений Барнетта изложен в обзорной статье [17].

С появлением программы исследований задач внешнего обтекания тел высокоскоростными потоками газов низкой плотности [25] было начато изучение свободномолекулярного гиперзвукового режима обтекания. Позже были предприняты исследования по выяснению возможности

распространения континуального подхода для решения задач гиперзвукового обтекания при умеренных и малых числах  $Re$  [26–28]. Последующие численные решения указанных задач показали [29], что при  $Re \rightarrow 0$  уравнения НС и их асимптотически упрощенные варианты – параболизированные уравнения НС (ПУНС), уравнения вязкого ударного слоя (ВУС) и уравнения пограничного слоя (ПС) (см. обсуждение этих моделей в [30, 31]) – дают для коэффициентов теплопередачи и трения неограниченно возрастающие значения, т.е. приводят к физически неверным результатам, начиная с некоторых достаточно малых чисел  $Re$ . Учет скорости скольжения и скачка температуры на поверхности обтекаемого тела (учет кинетического режима течения в слое Кнудсена) и на ударной волне (обобщенные условия Ренкина – Гюгонно [32]) несколько снижают эти коэффициенты и таким образом расширяют область применимости указанных континуальных моделей до более низких чисел  $Re$ , но не устраняют тенденцию к неограниченному возрастанию этих коэффициентов при дальнейшем уменьшении числа  $Re$ . Ограничение области применимости континуальных моделей при уменьшении числа  $Re$  (увеличении числа  $Kn$ ) находится также в согласии с асимптотическим выводом уравнений НС из уравнения Больцмана при малых числах  $Kn$  с учетом членов порядка единицы и  $Kn$  в методе Энского. Кроме того, уравнения ВУС, ПУНС и ПС были асимптотически выведены из полных уравнений НС при  $Re \gg 1$ , и, естественно, не следует ожидать, что эти упрощенные континуальные модели могут дать удовлетворительные и физически правильные результаты при  $Re = O(1)$  и  $Re \ll 1$ .

На основании сказанного выше и общих физических соображений существует устойчивое мнение, что континуальный подход несправедлив при решении задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена в потоках разреженных газов при достаточно малых числах  $Re$ , поэтому в переходном режиме обтекания для решения таких задач используются или уравнение Больцмана, или его модельные уравнения, или приближенные методы прямого статистического моделирования Монте-Карло. Однако ограничение в общем случае применимости континуальных моделей при малых числах  $Re$  для решения задач обтекания при больших сверхзвуковых скоростях не исключает использования некоторых из них для расчета течения в ударном слое с высокой плотностью.

Так, было показано [33, 34], что решение уравнений тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя (ТВУС), которые были выведены в [33, 34] из уравнений НС при  $(\gamma - 1)M_\infty^2 \gg 1$ ,  $\epsilon = (\gamma - 1)/(2\gamma) \ll 1$ ,  $Re \gg 1$ ,  $\epsilon Re = O(1)$  ( $\epsilon$  – гиперзвуковой параметр [35],  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей), в случае сильно охлажденной поверхности при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры в окрестности точки торможения осесимметричного тела дает для коэффициентов трения и теплопередачи свободномолекулярный предел. То же самое было показано [36] для течения в окрестности точки торможения двоякой кривизны поверхности тела и произвольной степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры путем асимптотического решения уравнений ТВУС: коэффициенты теплопередачи и трения, определяемые решением уравнений ТВУС в случае сильно охлажденной поверхности, при  $Re \rightarrow 0$  приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке.

Налицо парадокс. С одной стороны, уравнения ТВУС выводятся в предположении, что  $Re \gg 1$ , с другой – они дают физически правильное поведение коэффициента теплопередачи с выходом на свободномолекулярный предел при  $Re \rightarrow 0$ .

Для того чтобы разрешить этот парадокс, ниже проводится асимптотический анализ задачи гиперзвукового обтекания затупленных тел вязким разреженным газом в рамках уравнений НС и ТВУС, первые предварительные результаты которого изложены ранее [30, 31, 36]. Этот анализ, во-первых, позволил обнаружить наличие двух важных параметров задачи. Один из них  $\chi = (\mu r^{-1} Re^{-1})^{1/2}$ , где  $Re = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu(T_0)$ ,  $\rho_\infty$  и  $V_\infty$  – плотность и скорость набегающего потока,  $\mu(T_0)$  – коэффициент вязкости,  $\rho_\infty$  – плотность,  $T_0$  – температура торможения набегающего потока,  $R_0$  – радиус кривизны тела в точке торможения; толщина ударного слоя – порядка  $\chi$ . Второй параметр  $\tau = (Re \mu^{-1} \rho^{-1})^{1/2}$ , безразмерные касательная скорость и энтальпия имеют порядок  $\tau$ . Во-вторых, из асимптотического анализа уравнений НС следует, что упомянутые выше асимптотически упрощенные при  $Re \gg 1$  модели уравнений НС – уравнения ТВУС и ВУС [34, 37] оказываются справедливыми не только при больших, но и при малых числах  $Re$  (малый параметр  $\tau$ ), в предположении, что  $\chi \ll 1$ . Уравнения ВУС выводятся из уравнений НС в пренебрежении членами  $O(\chi^2)$  и учете членов  $O(\chi)$ . Уравнения ТВУС выводятся из уравнений НС в пренебрежении членами  $O(\chi^2)$  и  $O(\chi)$ , за исключением члена с продольным градиентом давле-

ния, имеющего порядок  $\chi$ , который является внепорядковым и оставляется в уравнениях ТВУС, поскольку играет существенную роль при больших числах  $Re$ .

Если рассмотреть предельный случай уравнений НС, т.е. пренебречь членами  $O(\chi^2)$ ,  $O(\chi)$  и  $O(\tau)$ , учитывая только члены  $O(1)$ , то уравнения НС сводятся к “локальным” (квазидвумерным при отсутствии производных от продольной координаты) уравнениям Стокса для задачи Рейнольдса [38] с исчезающими силами инерции и давления, которые названы уравнениями исчезающего тонкого вязкого ударного слоя (ИТВУС) [30, 31]. Решение этих уравнений получено в аналитическом виде при произвольной степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры, найдены профили скорости и температуры в ударном слое около наветренной поверхности тела, функция тока и внешняя граница ударного слоя. Это решение дает для коэффициентов сопротивления и теплопередачи значения, в точности совпадающие с их свободномолекулярными пределами при коэффициенте аккомодации энергии, равном единице.

Получено асимптотическое решение при малых числах  $Re$  уравнений ТВУС в окрестности точки торможения двоякой кривизны при различных соотношениях между определяющими параметрами задачи. Показано, что с уменьшением числа  $Re$  коэффициент теплопередачи приближается к своему свободномолекулярному пределу при коэффициенте аккомодации, равном единице, независимо от значения параметра  $\chi$ , в то время как коэффициент трения приближается к своему свободномолекулярному пределу при условии малости параметра  $\chi$  или в случае отсутствия в уравнениях ТВУС внепорядковых членов с продольным градиентом давления.

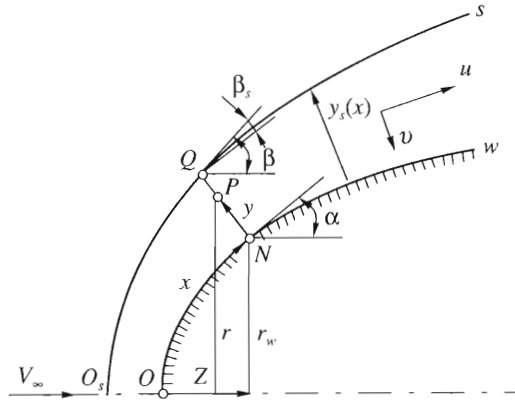
Проводятся численные расчеты уравнений ТВУС и ВУС эффективным итерационно-маршевым методом [39, 40]. Приводится сравнение асимптотических решений с численными и устанавливаются границы их применимости. Асимптотические и численные решения сравниваются также с результатами других работ – решениями уравнений НС и решениями, полученными методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.

**1. Уравнения Навье–Стокса в естественной системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела, в переменных Дородницына–Лиза.** Рассмотрим двумерную задачу о стационарном сверхзвуковом ламинарном обтекании затупленного тела однородным вязким теплопроводным совершенным газом. Обтекание осесимметричного или плоского тела, контур которого предполагается достаточно гладким (с возможным разрывом кривизны), поступательным потоком газа со скоростью  $V_\infty$ , направленной вдоль оси симметрии тела  $OZ$ , будем рассматривать в ортогональной системе координат, связанной с его поверхностью (фиг. 1). В этой системе координат положение точки  $P$  в потоке определяется ее расстоянием  $y = PN$  до контура по нормали, и длиной дуги  $x = ON$  вдоль контура, отсчитываемой от его вершины  $O$  до основания нормали  $N$  (фиг. 1).

Уравнения Навье – Стокса (НС) в выбранной системе координат приводились в литературе неоднократно как для совершенного газа [30, 31, 41], так и для многокомпонентного газа с химическими реакциями [41]. Для ослабления влияния плотности на коэффициенты уравнений, облегчения нахождения решения и вывода разных асимптотически упрощенных уравнений как при больших, так и при малых числах Рейнольдса удобно их преобразовать к новым независимым переменным Дородницына в форме Лиза  $\xi, \eta$  [30, 31]:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{\Delta(x)} \int_0^y \rho \bar{r}^v dy, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_w} = 1 + y \frac{\cos \alpha}{r_w} \quad (1.1)$$

Здесь  $r_w(x)$  – расстояние от точки на контуре тела до оси симметрии  $OZ$ ,  $r(x)$  – расстояние от точки в потоке до оси  $OZ$ ,  $\alpha(x)$  – угол между касательной к контуру тела и осью  $OZ$ ,  $\rho_{\infty}$  – плотность,  $\rho_\infty$  – плотность набегающего потока,  $v = 0$  для плоской задачи и  $v = 1$  для осесимметричной; все величины с размерностью длины отнесены к радиусу кривизны в вершине тела  $R_0$ .



Фиг. 1

Запишем обратное к (1.1) преобразование

$$x = \xi, \quad \bar{r}^{\nu+1} = 1 + \bar{\Delta}\omega(\xi, \eta), \quad \bar{\Delta} = (1 + \nu) \frac{\cos \alpha}{r_w} \Delta, \quad \omega(\xi, \eta) = \int_0^\eta \frac{1}{\rho} d\eta \quad (1.2)$$

$\Delta = \Delta(x)$  – произвольная пока функция; выберем ее из условия, чтобы толщина ударного слоя  $y_s(x)$  (которая для уравнений вязкого ударного слоя (ВУС) является искомой величиной) в переменной  $\eta$  была равна единице при всех  $x$ , т.е. из условия, что  $\eta = 1$  при  $y = y_s(x)$ . Тогда

$$\Delta(x) = \int_0^{y_s(x)} \rho \bar{r}^\nu dy \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.2) получим для  $\bar{\Delta}(\xi)$  выражение, зависящее от  $y_s(\xi)$ , и обратное выражение  $y_s(\xi)$  через  $\bar{\Delta}(\xi)$ :

$$\bar{\Delta}(\xi) = \frac{\bar{r}_s^{\nu+1} - 1}{\omega_s}, \quad \bar{r}_s = 1 + y_s \frac{\cos \alpha}{r_w}, \quad y_s(\xi) \frac{\cos \alpha}{r_w} = (1 + \omega_s \bar{\Delta})^{1/(1+\nu)} - 1, \quad \omega_s = \int_0^1 \frac{d\eta}{\rho} \quad (1.4)$$

Определим функцию  $\psi(x, y)$  как функцию тока, деленную на  $(2\pi)^\nu R_0^{\nu+1}$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -H_1 r^\nu \rho_\infty \rho v_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = r^\nu \rho_\infty \rho v_1, \quad H_1 = 1 + \frac{y}{R(x)} \quad (1.5)$$

где  $H_1$  – коэффициент Ламе,  $R(x)$  – радиус кривизны контура тела,  $v_1$  и  $v_2$  – физические компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Введем безразмерные компоненты скорости и приведенную функцию тока  $f(\xi, \eta)$

$$u = \frac{v_1}{u_*}, \quad v = \frac{v_2}{v_*}, \quad u_* = V_\infty \cos \alpha, \quad v_* = V_\infty \quad (1.6)$$

$$\psi(x, y) = b(x) f(\xi, \eta), \quad b(x) = \rho_\infty u_* r_w^\nu \Delta \quad (1.7)$$

Используя соотношения (1.5), получим выражения  $u$  и  $v$  через  $f(\xi, \eta)$ :

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{k_1}{k_2}u - \frac{\phi}{\rho k_2} \equiv \frac{\cos \alpha \partial y}{H_1} u - \frac{\phi}{\rho k_2}, \quad \phi = \bar{\beta}f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (1.8)$$

Безразмерные коэффициенты  $\bar{\beta}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  приведены ниже в выражениях (1.16).

Введем далее безразмерные компоненты тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}(\xi, \eta)$  ( $i, j = \xi, \eta, \zeta$ ) и вектора плотности потока энергии  $X(\xi, \eta)$  и  $Y(\xi, \eta)$ :

$$(\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{\phi\phi}) = \frac{\mu u_*}{x H_1} (\tau_{\xi\xi}, \tau_{\eta\eta}, \tau_{\zeta\zeta}), \quad \tau_{xy} = \frac{\mu u_* \rho r^v}{\Delta} \tau_{\xi\eta}, \quad J_x = -\frac{\mu}{x H_1} X, \quad J_y = -\frac{\mu \rho r^v}{\sigma \Delta} Y \quad (1.9)$$

Здесь  $\mu \mu_0$  – коэффициент динамической вязкости,  $\mu_0$  – коэффициент вязкости при температуре адиабатически заторможенного набегающего потока  $T_0$ ;  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{\phi\phi}, \tau_{xy}$  – умноженные на  $R_0/\mu_0$  физические компоненты тензора вязких напряжений  $\tau$  в системе координат  $(x, y, \phi)$  ( $\phi$  – азимутальный угол в осесимметричной задаче);  $J_x, J_y$  – умноженные на  $R_0/(\mu_0(H_\infty - H_w))$  компоненты вектора плотности потока полной энергии  $\mathbf{J}$ ,  $H_\infty$  и  $H_w$  – значения полной энтальпии  $H$  в набегающем потоке и на стенке соответственно:

$$\mathbf{J} = -\lambda \nabla(T_0 T) + \tau \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu}{\sigma} \left[ \nabla H + \frac{\sigma}{\mu} (\tau \cdot \mathbf{v}) - \nabla \frac{v^2}{2} \right], \quad \sigma = \frac{\mu \mu_0 c_p}{\lambda}$$

$$H = c_p T_0 T + \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}, \quad T_0 = T_\infty t_{0\infty}, \quad t_{0\infty} = 1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} M_\infty^2, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.10)$$

$$H_\infty = c_{p\infty} T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = c_{p\infty} T_0 = c_{p\infty} T_\infty t_{0\infty} = \frac{V_\infty^2}{2} \left( 1 + \frac{2}{(\gamma_\infty - 1) M_\infty^2} \right)$$

Здесь  $\sigma$  – число Прандтля,  $c_p, c_v$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме,  $T_0 T$  – температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $M$  – число Маха, индексом  $\infty$  отмечены значения параметров в набегающем потоке.

Уравнения количества движения вдоль осей  $x$  и  $y$  и уравнение энергии в переменных (1.1) запишем в следующем виде:

$$\beta_1 u^2 + k_3 u v + u \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \phi \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho \cos^2 \alpha} \left( \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho k_1 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k_5 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial k_9}{\partial \eta} u + \Phi_1 \quad (1.11)$$

$$[O(\tau) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau) \quad O(\tau) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(1) \quad O(\chi)O(\chi^2)]O(\tau)$$

$$\frac{1}{k_2} \left( -k_4 u^2 + u \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} - \phi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \Phi_2 + \Phi_3 \quad (1.12)$$

$$O(\tau) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau\chi) \quad O(1) \quad O(\chi) \quad O(\chi^2)$$

$$\xi u \frac{\partial g}{\partial \xi} - \phi \frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{k_5}{\sigma} \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} - \bar{k} \cos^2 \alpha \left( (1 - \sigma) \frac{\partial u^2}{\partial \eta} + 2\sigma k_6 u^2 \right) \right) \right) + \Phi_4 \quad (1.13)$$

$$[O(\tau) \quad O(\tau) \quad O(1) \quad O(\tau) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau\chi^2)]O(\tau)$$

$$\Phi_1 = \bar{\tau}_{\xi\eta} + \varepsilon_1 \tau'_{\xi\xi} - \varepsilon_2 \tau_{\zeta\zeta}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{k_2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (\varepsilon_3 \tau_{\eta\eta}) + \varepsilon_3 \tau'_{\xi\eta} \right) \quad (1.14)$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{k_2} (\varepsilon_4 \tau_{\xi\xi} + \varepsilon_5 \tau_{\zeta\zeta}), \quad \Phi_4 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{k_5}{\sigma} Y_2 \right) + \varepsilon_1 X'$$

Здесь уравнения НС выписаны вместе с асимптотическими оценками всех их членов при малых числах  $Re$ , приведенными в подстроках. Введение параметров  $\chi$ ,  $\tau$  и полный асимптотический анализ будут даны ниже, в разд. 3.

В уравнениях (1.11)–(1.14)

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\xi} &= (\zeta - 2/3)\nabla' \cdot \mathbf{v} + 2(\beta_1 u + k_3 v + Du), \quad \tau_{\eta\eta} = (\zeta - 2/3)\nabla' \cdot \mathbf{v} + 2\rho k_2 \partial v / \partial \eta \\ \tau_{\zeta\zeta} &= (\zeta - 2/3)\nabla' \cdot \mathbf{v} + 2v(n_1 u + k_7 v), \quad \tau_{\xi\eta} = \partial u / \partial \eta - k_6 u + k_8 Dv \\ \tau'_{\xi\xi} &= m_1 \tau_{\xi\xi} + \mu^{-1} D(\mu \tau_{\xi\xi}), \quad \tau'_{\xi\eta} = m_2 \tau_{\xi\eta} + k_5^{-1} D(k_5 \tau_{\xi\eta}) \\ \bar{\tau}_{\xi\eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (k_5 k_8 Dv) - k_9 k_6 u + k_9 k_8 Dv, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v} = \beta_1 u + k_3 v + v(n_1 u + k_7 v) + Du + \rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$X = Dg - \bar{k}[D(u^2 \cos^2 \alpha + v^2) + 2\sigma(u\tau_{\xi\xi} + \rho k_2 v\tau_{\xi\eta})], \quad X' = m_3 X + \mu^{-1} D(\mu X)$$

$$Y_1 = \frac{\partial g}{\partial \eta} - \bar{k} \cos^2 \alpha \left( (1 - \sigma) \frac{\partial u^2}{\partial \eta} - 2\sigma k_6 u^2 \right), \quad Y_2 = -\bar{k} \frac{\partial v^2}{\partial \eta} + 2\bar{k} \sigma \left( k_8 u Dv + \frac{v}{\rho k_2} \tau_{\eta\eta} \right)$$

$$g = \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w}, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad D = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \rho k_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

В преобразованную систему уравнений НС (1.8), (1.11)–(1.14) входит ряд безразмерных коэффициентов, которые выражаются через заданные величины  $u_*$ ,  $v_*$ ,  $r_w$ ,  $\alpha$ ,  $R$  и неизвестные до решения задачи функции  $\Delta(\xi)$ ,  $\rho(\xi, \eta)$ ,  $\mu(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{R} + v \frac{x \sin \alpha}{r_w} + \frac{d \ln \Delta}{d \ln x}, \quad \beta_1 = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{R}, \quad n_1 = \frac{x H_1 \sin \alpha}{r_w}, \quad m_1 = \beta_1 + m_3 \\ m_2 &= 2\beta_1 + \frac{d \ln \Delta}{d \ln x} + \frac{v}{r_w} x \sin \alpha + \frac{y}{R H_1} \frac{d \ln R}{d \ln x} - 1, \quad m_3 = \frac{v}{r} x H_1 \sin \alpha + \frac{y}{R H_1} \frac{d \ln R}{d \ln x} - 1 \\ k_1 &= \frac{x \partial \eta}{\rho \partial x} = -\frac{\xi \bar{r}^v \partial y}{\Delta \partial \xi}, \quad k_2 = \frac{x H_1 \bar{r}^v}{\cos \alpha \Delta}, \quad k_3 = \frac{x}{R \cos \alpha}, \quad k_4 = \frac{x \cos \alpha}{R}, \quad k_5 = \frac{\mu \rho x H_1 \bar{r}^{2v}}{\cos \alpha \Delta^2 Re} \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$k_6 = \frac{\Delta}{\rho H_1 \bar{r}^v R}, \quad k_7 = \frac{x H_1}{r}, \quad k_8 = \frac{\Delta}{\rho x \cos \alpha H_1 \bar{r}^v}, \quad k_9 = \frac{\mu x \bar{r}^v}{R \cos \alpha \Delta Re}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\rho x \cos \alpha H_1 Re}, \quad \varepsilon_2 = v \frac{\mu \operatorname{tg} \alpha}{\rho r Re}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\mu \bar{r}^v}{\Delta Re}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\mu}{\rho H_1 R Re}, \quad \varepsilon_5 = v \frac{\mu \cos \alpha}{\rho r Re}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{1 - T_w} \left( 1 - \frac{1}{1 + (\gamma_\infty - 1) M_\infty^2 / 2} \right), \quad Re = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}$$

Систему уравнений НС будет замыкать уравнение состояния

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon T}{p}, \quad T \leq 1, \quad T = g(1 - T_w) + T_w - (1 - t_{0\infty}^{-1})(u^2 \cos^2 \alpha + v^2), \quad T_w = \frac{H_w}{H_\infty} \tag{1.17}$$

где  $\rho_\infty V_\infty^2 p$  – давление,  $\varepsilon$  – гиперзвуковой параметр:



$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{t_{0\infty} \bar{c}_p}{t_{0\infty} - 1}, \quad \bar{c}_p = \frac{c_p}{c_{p\infty}} \tag{1.18}$$

Таким образом, окончательная система уравнений НС в переменных  $\xi, \eta$  состоит из шести уравнений (1.8), (1.11)–(1.14), (1.17) для определения функций  $f, u, v, p, g$  (или  $T$ ). Выражения для  $u_s(x)$  и  $\Delta(\xi)$  приведены ниже.

**2. Граничные условия.** Граничные условия на теле с непроницаемой поверхностью запишем для условий прилипания и заданной температуры  $T_w$

$$u(\xi, 0) = 0, \quad v(\xi, 0) = 0, \quad T(\xi, 0) = T_w \tag{2.1}$$

Граничные условия в набегающем потоке для решения полной системы уравнений НС без выделения головной ударной волны будут

$$u(\xi, \infty) = 1, \quad v(\xi, \infty) = -\sin\alpha, \quad g(\xi, \infty) = 1, \quad \rho(\xi, \infty) = 1, \quad p(\xi, \infty) = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \tag{2.2}$$

Граничные условия на ударной волне (УВ), необходимые для решения ряда асимптотически упрощенных уравнений НС, записанные при  $\eta = 1$ , будут

$$u_s = u_{si} - \frac{\cos^3 \beta_s}{\sin \beta} \left[ s_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} - s_1 k_6 u + \Phi_5 \right]_s, \quad v_s = \cos \alpha u_s \operatorname{tg} \beta_s - k_s \frac{\sin \beta}{\cos \beta_s} \tag{2.3}$$

$$O(\tau)O(1) \quad O(1) \quad O(\chi) \quad O(\chi^2) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau\chi)$$

$$p_s = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} + \sin^2 \beta - k_s \sin^2 \beta - \cos \alpha \cos^2 \beta_s \left[ s_1 \operatorname{tg} \beta_s \frac{\partial u}{\partial \eta} - s_2 (\beta_1 u + v n_1 u + Du) + \Phi_6 \right]_s$$

$$O(1) \quad O(1) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(\chi) \quad O(\chi^2)$$

$$g_s = 1 - \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta} \left( s_1 \frac{\partial g}{\partial \eta} - s_1 \bar{k} \cos^2 \alpha \left( (1 - \sigma) \frac{\partial u^2}{\partial \eta} - 2\sigma k_6 u^2 \right) + \Phi_7 \right)_s$$

$$O(\tau) \quad O(1) \quad O(\tau) \quad O(\tau\chi) \quad O(\tau\chi^2)$$

$$u_{si} = \cos^2 \beta_s [1 - \operatorname{tg} \beta_s \operatorname{tg} \alpha + k_s \operatorname{tg} \beta_s (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_s)]$$

$$O(1) \quad O(1) \quad O(\chi) \quad O(\tau\chi^2) \quad O(\tau\chi^3)$$

$$\Phi_5 = s_1 (k_8 Dv - \tau_{\xi\eta} \operatorname{tg}^2 \beta_s) - s_2 (\tau_{\eta\eta} - \tau_{\xi\xi}) \operatorname{tg} \beta_s$$

$$\Phi_6 = s_1 \operatorname{tg} \beta_s (k_8 Dv - k_6 u) - s_2 \left( (\zeta - 2/3) \left( k_3 v + v k_7 v + \rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + 2\rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \tau_{\xi\xi} \operatorname{tg}^2 \beta_s \right)$$

$$\Phi_7 = s_1 Y_2 - s_2 \operatorname{tg} \beta_s X; \quad s_1 = \frac{\mu \rho \bar{r}^v}{\operatorname{Re} \Delta}, \quad s_2 = \frac{\mu}{\operatorname{Re} \xi H_1}, \quad k_s = \frac{1}{\rho_s}$$

Здесь  $u_{si}$  – безразмерная составляющая вектора скорости вдоль оси  $x$  за УВ в идеальном газе; индекс  $s$  соответствует значениям величин на УВ. Анализ асимптотических оценок, приведенных в подстроках, дан в разд. 3.

Угол наклона УВ к оси  $OZ$   $\beta = \beta(x)$  и отход УВ  $y_s(x)$  связаны очевидным геометрическим соотношением (фиг. 1)

$$dy_s/dx = H_{1s} \operatorname{tg} \beta_s, \quad \beta_s(x) = \beta - \alpha \tag{2.4}$$

где  $\beta_s(x)$  – угол наклона УВ к оси  $x$ . Уравнение (2.4) связывает две неизвестные величины  $\beta_s(x)$  и  $y_s(x)$ . При постановке задачи сверхзвукового обтекания в рамках полных уравнений НС, имеющих седьмой порядок по координате  $\eta$ , с четырьмя граничными условиями на искомой УВ (2.3) и тремя условиями на теле (2.1), будет не хватать одного условия, поэтому граничные условия для уравнений НС (2.2) ставятся на известной границе достаточно далеко от тела в невозмущенном набегающем потоке. Для уравнений ВУС, имеющих на единицу меньший порядок производной по  $\eta$  в уравнении импульса по нормали к поверхности, граничные условия ставятся на УВ – условия (2.3). Условие для  $v$  в граничных условиях (2.3) можно заменить эквивалентным условием, вытекающим из сохранения баланса массы газа, протекающего через замкнутый контур  $ONQO_s$ :

$$\rho_\infty V_\infty \pi^v r_s^{v+1} = \int_0^{y_s(x)} \rho_\infty \rho v_1 (2\pi r)^v dy \tag{2.5}$$

При решении уравнений НС с граничными условиями на заданной достаточно удаленной границе  $y = y_s(x)$  условие (2.5) может служить дополнительным условием для проверки точности решения задачи.

Преобразовав балансовое соотношение (2.5) к переменным  $\xi, \eta$ , получим

$$\bar{r}_s^{v+1} = \bar{\Delta} \int_0^1 u d\eta, \quad f_s(\xi) = \int_0^1 u d\eta = \frac{\bar{r}_s^{v+1}}{\bar{\Delta}} \tag{2.6}$$

Это балансовое уравнение массы можно также получить из второго уравнения (1.8), записанного на контуре  $y = y_s(x)$ . Используя соотношения (2.6) и (1.4), выразим  $\bar{\Delta}$  и  $\bar{y}_s$  через искомые функции  $f_s$  и  $\omega_s$ :

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{f_s - \omega_s}, \quad \bar{y}_s = \left(1 + \frac{\omega_s}{f_s - \omega_s}\right)^{1/(1+v)} - 1, \quad \bar{y}_s = \frac{\cos \alpha}{r_w} y_s \tag{2.7}$$

С помощью соотношений (2.6), (2.7), (1.1) и (1.2), найдем также  $y(\xi, \eta)$ :

$$y(\xi, \eta) = \frac{r_w}{\cos \alpha} \bar{y}(\xi, \eta), \quad \bar{y}(\xi, \eta) = \left(1 + \frac{\omega(\xi, \eta)}{f_s - \omega_s}\right)^{1/(1+v)} - 1, \quad \omega(\xi, \eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho(\xi, \eta)} \tag{2.8}$$

В переменных  $\xi, \eta$  область интегрирования в ударном слое от оси симметрии и далее вниз по потоку преобразуется в полуполосу с известными границами:  $0 \leq \xi \leq \xi_*$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ;  $\xi_*$  – крайняя точка по маршевой координате.

**3. Асимптотическая оценка членов уравнений НС при малых числах Re. Вывод уравнений ВУС и ТВУС из уравнений НС при малых числах Re.** Ранее асимптотический анализ уравнений НС проводился при больших числах Re, таким образом были получены уравнения ТВУС [33, 34] и ВУС [37]. Проведем асимптотический анализ уравнений НС при малых числах Re.

Сначала оценим порядок искомых функций при  $Re \ll 1$ . Введем обозначения  $\tau = u_s, \chi = 1/(\rho_s u_s)$ . Тогда, учитывая соотношения (1.8), (2.8), имеем

$$u = O(\tau), \quad 1/\rho = O(\chi\tau), \quad f = O(\tau), \quad \omega = O(\chi\tau) \tag{3.1}$$

Для толщины ударного слоя из соотношений (2.7) получим

$$v = 1: y_s = O\left(\left(1 + \frac{\chi}{1-\chi}\right)^{1/2} - 1\right), \quad v = 0: y_s = O\left(\frac{\chi}{1-\chi}\right) \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что при  $\chi > 1$  в случае плоской задачи ( $v = 0$ ) получается отрицательное значение  $y_s$ , а в случае осесимметричной задачи ( $v = 1$ ) – корень из отрицательного числа. Следовательно, при  $\chi \geq 1$  не существует решения уравнений НС в ударном слое. Таким образом, соотношения (3.2) (или (2.7)) накладывают ограничение на параметр  $\chi$ :  $\chi < 1$ . Исключим из рассмотрения близкие к единице значения  $\chi$ . Тогда

$$y_s = O(\chi) \quad (3.3)$$

Для функции  $\Delta(\xi)$  из соотношений (1.2) и (2.7), учитывая, что  $\chi < 1$ , получим

$$\Delta^{-1} = O(\tau) \quad (3.4)$$

Используя соотношения (1.1), (1.5), (3.3), получим

$$H_1 \sim r \sim \bar{r} = O(1) \quad (3.5)$$

Рассмотрим первое из граничных условий на УВ (2.3). На линии торможения оно будет иметь вид

$$u_{s0} = 1 - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\mu \rho \bar{r}^v}{\text{Re} \Delta} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\Delta}{\rho H_1^{1+v}} u \right) \right]_{s0} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\mu \rho \bar{r}^v}{\text{Re} \Delta} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\Delta}{\rho H_1^{1+v}} u \right) \right]_{s0} = O(1) \quad (3.7)$$

С учетом соотношений (3.1), (3.4), (3.5) получим

$$O\left(\frac{\mu \rho \tau^2}{\text{Re}}\right)_s = O(1) \quad (3.8)$$

откуда следует, что

$$\tau = u_s = O\left(\left(\frac{\text{Re}}{\mu \rho}\right)_s^{1/2}\right) \quad (3.9)$$

Таким образом,  $\tau \ll 1$  при  $\text{Re} \ll 1$ . Оценка для параметра  $\chi$  получается из соотношения (3.9):

$$\chi = \frac{1}{\rho_s u_s} = O\left(\left(\frac{\mu}{\rho \text{Re}}\right)_s^{1/2}\right) \quad (3.10)$$

Из граничных условий (2.3) получим оценки для  $p$  и  $g$ , а из уравнений (1.8) – для  $v$ :

$$p = O(1), \quad g = O(\tau), \quad v = O(\tau \chi) \quad (3.11)$$

Определим далее порядок коэффициентов системы уравнений НС. Из выражений (1.16) для достаточно гладких тел получим для геометрических параметров следующие оценки:

$$\bar{\beta} \sim \beta_1 \sim m_1 \sim m_2 \sim m_3 \sim n_1 \sim k_3 \sim k_4 \sim k_7 = O(1) \quad (3.12)$$

Для других коэффициентов, определяемых из выражений (1.16), получим

$$k_5 = O(1), k_2 = O(\tau), k_1 = O(\tau\chi), k_6 \sim k_8 \sim k_9 \sim \varepsilon_3 = O(\chi) \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 = O(\chi^2)$$

Оценка безразмерных компонент тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$  и потоков  $X, Y$  дает

$$\tau_{\xi\xi} \sim \tau_{\eta\eta} \sim \tau_{\zeta\zeta} \sim \tau_{\xi\eta} \sim \tau'_{\xi\xi} \sim \tau'_{\xi\eta} = O(\tau), \quad \bar{\tau}_{\xi\eta} = O(\tau\chi^2) \quad (3.14)$$

$$X \sim X' = O(\tau), \quad Y_2 = O(\tau^2\chi^2)$$

Оценим также коэффициенты в граничных условиях (2.3):

$$s_1 = O(\tau^{-1}), \quad s_2 = O(\tau^{-1}\chi), \quad k_s = O(\tau\chi), \quad \text{tg}\beta_s = O(\chi) \quad (3.15)$$

С помощью оценок (3.1)–(3.15) нетрудно оценить порядок всех членов уравнений НС при малых числах  $Re$ . Эти оценки приведены в подстроках уравнений (1.11)–(1.13) соответственно под каждым членом. Была также проведена оценка всех членов в граничных условиях на ударной волне; полученные оценки приведены в подстроках соотношений (2.3).

Анализ уравнений (1.11)–(1.14) в предположении малости параметра  $\chi$  показал следующее. Если в уравнениях НС пренебречь членами  $O(\chi^2)$  и учесть члены  $O(1), O(\tau), O(\chi), O(\tau\chi)$ , то получаются уравнения ВУС (уравнения (1.11)–(1.13) без  $\Phi_1 - \Phi_4$ ). При этом в уравнении импульсов в поперечном направлении (1.12) не учитываются члены  $\Phi_2 = O(\chi)$ , поскольку после подстановки величины  $\partial p/\partial \eta$ , определенной из этого уравнения, в уравнение импульсов в продольном направлении (1.11), эти члены будут  $O(\chi^2\tau)$ , так как перед  $\partial p/\partial \eta$  стоит коэффициент  $O(\chi\tau)$ . Аналогичным образом получают граничные условия для уравнений ВУС путем пренебрежения в граничных условиях (2.3) членами  $O(\chi^2)$ .

Если в уравнениях НС пренебречь членами  $O(\chi^2), O(\chi)$ , за исключением члена с продольным градиентом давления, то получаются уравнения ТВУС. Член с продольным градиентом давления  $O(\chi)$  внепорядковый, он оставлен в уравнениях ТВУС, поскольку играет существенную роль при больших числах  $Re$ , чтобы и при малых, и при больших числах  $Re$  использовать единую систему уравнений ТВУС. Граничные условия для уравнений ТВУС получаются из граничных условий (2.3), если пренебречь членами  $O(\chi^2), O(\chi)$  и положить  $\beta = \alpha$ , поскольку  $\beta_s = O(\chi)$ . Уравнения ТВУС приводятся и решаются асимптотически в разд. 5.7.

Таким образом, из асимптотического анализа уравнений (1.11)–(1.14) совместно с граничными условиями (2.3) следует, что уравнения ВУС и ТВУС получаются из уравнений НС не только при больших числах  $Re$ , но и при малых числах  $Re$ , в предположении малости параметра  $\chi$ .

Конкретные выражения параметров  $\chi, \tau$  через определяющие параметры задачи  $Re, \varepsilon, T_w, \sigma, \omega$  (при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры  $\mu \sim T^\omega$ ) приведены в разд. 6 для различных режимов гиперзвуковых течений разреженного газа в окрестности точки торможения.

**4. Исчезающе тонкий вязкий ударный слой (ИТВУС).** Рассмотрим в этом разделе предельный случай уравнений НС: будем пренебрегать в уравнениях (1.11)–(1.13) членами  $O(\chi^2), O(\chi)$  и  $O(\tau)$ , учитывая только “главные” члены  $O(1)$ . В этом случае уравнения НС сводятся к “локальным” уравнениям Стокса для задачи Рейнольдса [38] с исчезающими силами инерции и давления, или к уравнениям исчезающего тонкого вязкого ударного слоя – ИТВУС. Уравнения ИТВУС можно рассматривать также как предельный случай уравнений ТВУС при  $\tau \rightarrow 0$ . Оставляя и в граничных условиях на ударной волне только члены  $O(1)$ , получим следующую краевую задачу для ИТВУС:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \rho \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \rho \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \rho = \frac{p}{\varepsilon T} \quad (4.1)$$

$$\frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 1, \quad \frac{\mu \rho}{\sigma^* \text{Re} \Delta \sin \alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 1, \quad p|_{\eta=1} = \sin^2 \alpha, \quad \int_0^1 u d\eta = \frac{r_w}{(v+1) \Delta \cos \alpha}$$

$$u(0, \xi) = 0, \quad v(0, \xi) = 0, \quad T(0, \xi) = T_w, \quad \sigma^* = \sigma(1 - T_w) \quad (4.2)$$

с условиями прилипания, отсутствия вдува или отсоса и заданной температуры стенки. Заметим, что скорость  $u(\xi, \eta)$  будет определяться из второго уравнения (1.8) после нахождения  $u$  и  $T$ .

Задача (4.1), (4.2) допускает очевидный интеграл при любой зависимости коэффициента вязкости  $\mu \mu_0$  от температуры

$$u = \frac{1}{\sigma^*} (T - T_w) \quad (4.3)$$

После двукратного интегрирования уравнений (4.1) с учетом граничных условий (4.2), в предположении степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры  $\mu = T^\omega$ , получим

$$T = \left( \frac{\omega \sigma^* \varepsilon \text{Re} \Delta}{\sin \alpha} \eta + T_w^\omega \right)^{1/\omega} \quad (4.4)$$

Профиль касательной скорости  $u$  находится из соотношения (4.3). Таким образом, решение найдено с точностью до нормировочной функции  $\Delta$ , преобразующей ударный слой в полосу, шириной равной единице. Для ее определения воспользуемся граничными условиями (4.2). Найдем сначала приведенную функцию тока  $f$ :

$$f = \int_0^\eta u d\eta = \frac{\sin \alpha}{(1+\omega) \sigma^{*2} \varepsilon \text{Re} \Delta} \left[ \left( T_w^\omega + \frac{\omega \sigma^* \varepsilon \text{Re} \Delta}{\sin \alpha} \eta \right)^{(1+\omega)/\omega} - T_w^{1+\omega} \right] - \frac{T_w}{\sigma^*} \eta \quad (4.5)$$

Подставив  $f(\xi, 1)$  в четвертое соотношение (4.2), получим уравнение для определения  $\Delta$

$$\frac{r_w (1+\omega) \sigma^{*2} \varepsilon \text{Re}}{(1+v) \sin \alpha \cos \alpha} = \left( T_w^\omega + \frac{\omega \sigma^* \varepsilon \text{Re} \Delta}{\sin \alpha} \right)^{(1+\omega)/\omega} - T_w^{1+\omega} - \frac{T_w (1+\omega) \sigma^* \varepsilon \text{Re}}{\sin \alpha} \Delta \quad (4.6)$$

При произвольном показателе  $\omega$  в физически допустимом интервале  $1/2 \leq \omega \leq 1$  ( $\omega = 1/2$  для твердых сфер,  $\omega = 1$  для максвелловских молекул; для реальных моделей  $0.6 \leq \omega \leq 0.9$ ) уравнение (4.6) является трансцендентным относительно  $\Delta$ . При  $\omega = 1/2$  оно превращается в кубическое уравнение, а при  $\omega = 1$  – в квадратное и допускает аналитическое решение

$$\Delta = \sqrt{\frac{d \sin^2 \alpha}{\varepsilon \text{Re}}}, \quad \omega = 1; \quad d = \frac{2r_w}{(1+v) \sin \alpha \cos \alpha} \quad (4.7)$$

При произвольном  $\omega$  рассмотрим два режима течения:  $\varepsilon \text{Re} \Delta / T_w^\omega \ll 1$  и  $T_w^\omega / (\varepsilon \text{Re} \Delta) \ll 1$  – режим холодной стенки (ниже выделены разные режимы гиперзвукового течения разреженного газа, и рассматриваемые здесь режимы соответствуют режимам III и I

разд б) и получим приближенные аналитические решения уравнения (4.6), разлагая выражение в круглых скобках в ряды по соответствующим малым параметрам:

$$\Delta = \sqrt{\frac{d \sin^2 \alpha}{T_w^{1-\omega} \varepsilon \text{Re}}}, \quad \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \tag{4.8}$$

$$\Delta = \frac{\sin \alpha}{\omega \sigma^*} \left[ \frac{d(1+\omega) \sigma^{*2}}{2} \right]^{\omega/(1+\omega)} (\varepsilon \text{Re})^{-1/(1+\omega)}, \quad \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega} \tag{4.9}$$

С учетом выражений (4.7)–(4.9) решение (4.4), (4.3) для температуры  $T$  и скорости  $u$  в ударном слое и на его границе  $\eta = 1$  будет

$$T = T_w + \sigma^* \sqrt{d \varepsilon \text{Re} \eta}, \quad T_s = T_s + \sigma^* \sqrt{d \varepsilon \text{Re}}; \quad \omega = 1 \tag{4.10}$$

$$T = \left( T_w^\omega + \omega \sigma^* \sqrt{\frac{d \varepsilon \text{Re}}{T_w^{1-\omega}}} \eta \right)^{1/\omega}, \quad T_s = \left( T_w^\omega + \omega \sigma^* \sqrt{\frac{d \varepsilon \text{Re}}{T_w^{1-\omega}}} \right)^{1/\omega}; \quad \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \tag{4.11}$$

$$T = \left( \frac{d(1+\omega) \sigma^{*2} \varepsilon \text{Re}}{2} \right)^{1/(1+\omega)} \eta^{1/\omega}, \quad T_s = \left( \frac{d(1+\omega) \sigma^{*2} \varepsilon \text{Re}}{2} \right)^{1/(1+\omega)}; \quad \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega} \tag{4.12}$$

$$u = \frac{1}{\sigma^*} (T - T_w), \quad u_s = \frac{1}{\sigma^*} (T_s - T_w) \tag{4.13}$$

Из этих соотношений видно, что  $T$  и  $u$  отличаются от своих значений на стенке на малую величину при малых числах  $\text{Re}$ .

Если в выражениях (4.8), (4.11) положить  $\omega = 1$ , то они переходят соответственно в выражения (4.7), (4.10). И если в выражениях (4.9), (4.12) положить  $\omega = 1$ , то они также переходят в выражения (4.7), (4.10), записанные при  $T_w = 0$ .

Решения (4.10)–(4.13) найдены в переменных  $\xi, \eta$ . Перейдем к исходным физическим переменным  $x = \xi, y = y(\xi, \eta)$ . Из соотношений (1.2) с учетом уравнения состояния (1.17) и решения (4.4), после интегрирования (без учета членов  $O(y^2)$ ) получим следующую связь между физическими и вспомогательными координатами:

$$y = \frac{1}{(1+\omega) \sin \alpha \sigma^* \text{Re}} \left[ \left( T_w^\omega + \frac{\omega \sigma^* \varepsilon \text{Re} \Delta}{\sin \alpha} \eta \right)^{(1+\omega)/\omega} - T_w^{1+\omega} \right] \tag{4.14}$$

Подставляя в это соотношение выражения для  $\Delta$ , найденные в трех случаях (4.7)–(4.9), получим окончательную связь между  $y$  и  $\eta$

$$y = \frac{1}{2 \sin \alpha \sigma^* \text{Re}} [(T_w + \sigma^* \sqrt{d \varepsilon \text{Re} \eta})^2 - T_w^2], \quad \omega = 1 \tag{4.15}$$

$$y = \frac{1}{(1+\omega) \sin \alpha \sigma^* \text{Re}} \left[ \left( T_w^\omega + \omega \sigma^* \sqrt{\frac{d \varepsilon \text{Re}}{T_w^{1-\omega}}} \eta \right)^{(1+\omega)/\omega} - T_w^{1+\omega} \right], \quad \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \tag{4.16}$$

$$y = \frac{d \sigma^* \varepsilon}{2 \sin \alpha} \eta^{(1+\omega)/\omega}, \quad \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega} \tag{4.17}$$

Положив в этих соотношениях  $\eta = 1$ , найдем внешнюю границу ударного слоя  $y_s(x)$ . При этом в соотношении (4.16) возьмем два члена разложения в круглых скобках:

$$y_s(x) = \sqrt{\frac{d\varepsilon T_w^{1+\omega}}{\sin^2 \alpha \operatorname{Re}} + \frac{d\sigma^* \varepsilon}{2 \sin \alpha}} \quad \text{при } \omega = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.18)$$

$$y_s(x) = \frac{d\sigma^* \varepsilon}{2 \sin \alpha} \quad \text{при } \varepsilon \operatorname{Re} \gg T_w^{1+\omega} \quad (4.19)$$

Отметим, что точное решение для  $\omega = 1$  совпадает с приближенным решением для  $\varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega}$  при  $\omega = 1$ , и эти решения объединены здесь и далее для компактности записи. Выразим из соотношений (4.15)–(4.17)  $\eta$  через  $y$ :

$$\eta = \frac{1}{\omega \sigma^* \sqrt{\frac{T_w^{1-\omega}}{d\varepsilon \operatorname{Re}}} [(T_w^{1+\omega} + (1+\omega) \sin \alpha \sigma^* \operatorname{Re} y)^{\omega/(1+\omega)} - T_w^\omega]} \quad \text{при } \omega = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.20)$$

$$\eta = \left[ \frac{2 \sin \alpha}{d\sigma^* \varepsilon} y \right]^{-\omega/(1+\omega)} \quad \text{при } \varepsilon \operatorname{Re} \gg T_w^{1+\omega} \quad (4.21)$$

Подставляя эти выражения соответственно в соотношения (4.10)–(4.12), получим решение в физических переменных  $x, y$ :

$$T = [T_w^{1+\omega} + (1+\omega) \sin \alpha \sigma^* \operatorname{Re} y]^{1/(1+\omega)} \quad \text{при } \omega = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.22)$$

$$T = [(1+\omega) \sin \alpha \sigma^* \operatorname{Re} y]^{1/(1+\omega)} \quad \text{при } \varepsilon \operatorname{Re} \gg T_w^{1+\omega} \quad (4.23)$$

Формула (4.22) при  $T_w \rightarrow 0$  переходит в формулу (4.23). В общем случае она дает решение с ошибкой  $O(\varepsilon \operatorname{Re} / T_w^{1+\omega})^{3/2}$ . Найдем далее приведенную функцию тока. Подставив в соотношение (4.5) выражения для  $\Delta$  (4.7)–(4.9), получим

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sqrt{d\varepsilon \operatorname{Re} T_w^{1-\omega}} \eta^2 \quad \text{при } \omega = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.24)$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{\omega}{1+\omega} \sigma^{*(1-\omega)/(1+\omega)} \left( \frac{d(1+\omega) \varepsilon \operatorname{Re}}{2} \right)^{1/(1+\omega)} \eta^{(1+\omega)/\omega} \quad \text{при } \varepsilon \operatorname{Re} \gg T_w^{1+\omega} \quad (4.25)$$

При  $\omega = 1$  выражение (4.25) совпадает с выражением (4.24).

Используя соотношения (1.7), (4.7)–(4.9), (4.24), (4.25), найдем функцию тока

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{\rho_\infty V_\infty r_w^{v+1}}{v+1} \eta^2 \quad \text{при } \omega = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \operatorname{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.26)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{\rho_\infty V_\infty r_w^{v+1}}{v+1} \eta^{(1+\omega)/\omega} \quad \text{при } \varepsilon \operatorname{Re} \gg T_w^{1+\omega}$$

При  $\eta = 1$  получим значение функции тока на внешней границе ИТВУС, которое отличается от его точного значения  $\rho_\infty V_\infty (r_s R_0)^{v+1} / (v+1)$  с погрешностью  $O(y_s)$ , совместимой с данным асимптотическим рассмотрением задачи. Используя формулы (4.20), (4.21) без учета членов  $O(y^2)$ , перейдем в выражениях (4.26) к переменной  $y$ :

$$\psi(x, y) = \frac{\rho_\infty V_\infty r_w^v \sin^3 \alpha \cos \alpha \varepsilon \text{Re}}{2T_w^{1+\omega}} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2 \quad \text{при } \omega = 1 \text{ и } \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.27)$$

$$\psi(x, y) = \frac{\rho_\infty V_\infty r_w^v \sin^2 \alpha \cos \alpha y}{\sigma^* \varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega}$$

Найдем теперь нормальную компоненту скорости  $v$  в ударном слое. С использованием выражений (1.8), (4.27) получим

$$-v = (v r_w^{-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \frac{\varepsilon \text{Re}}{2\rho T_w^{1+\omega}} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2 \quad \text{при } \omega = 1, \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (4.28)$$

$$-v = (v r_w^{-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \frac{1}{\rho \sigma^* \varepsilon} y \quad \text{при } \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega}$$

Нетрудно получить значение  $v$  на внешней границе ударного слоя, подставляя в эти выражения  $y = y_s(x)$  из (4.18), (4.19). Оценка  $v$  из (4.28) с учетом выражений (4.18), (4.19) дает  $v = O(1/\rho)$ , что согласуется с асимптотической оценкой  $v$ , приведенной выше в разд. 3.

Сформулируем, наконец, выражения для коэффициентов сопротивления и теплопередачи. В рамках асимптотического приближения ИТВУС получим для удельного теплового потока, касательного напряжения и нормального давления и соответствующих коэффициентов следующие выражения:

$$q_w = \rho_\infty V_\infty H_\infty \sin \alpha, \quad \tau_{xy_w} = \rho_\infty V_\infty^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad p_w = \sin^2 \alpha \quad (4.29)$$

$$c_H = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)} = \sin \alpha, \quad c_f = \frac{\tau_{xy_w}}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Выражения для  $q$ ,  $\tau_{xy}$  и  $p_w$  полностью совпадают с выражениями, даваемыми кинетической теорией газов при пренебрежении импульсом и энергией реэмитирующих молекул (свободномолекулярное течение), при единичном коэффициенте аккомодации. Интегрируя  $q$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\rho_\infty V_\infty^2 p_w$  по всей наветренной выпуклой части обтекаемого произвольного тела  $\Sigma$ , получим суммарный коэффициент теплопередачи и полного сопротивления ( $S$  – площадь миделева сечения)

$$C_H = \frac{1}{S} \iint_{\Sigma} \frac{q_w ds}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)} = 1 \quad (4.30)$$

$$C_D = \frac{2}{S} \iint_{\Sigma} \frac{(\rho_\infty V_\infty^2 p_w \sin \alpha + \tau_{xy_w} \cos \alpha) ds}{\rho_\infty V_\infty^2} = 2$$

**5. Уравнения тонкого вязкого ударного слоя в окрестности линии торможения.** Для исследования пространственного гиперзвукового течения около гладкого затупленного тела выберем систему координат, связанную с его поверхностью таким образом, чтобы оси  $x_1$  и  $x_2$  лежали в плоскостях главных кривизн, ось  $y$  – по нормали к поверхности. В такой системе координат уравнения пространственного ТВУС в окрестности линии торможения в переменных Дородницына – Лиза имеют вид [42]

$$-(f_1 + \kappa f_2) \frac{du_i}{d\eta} + d_i u_i^2 + \frac{2d_i p_i'}{\rho} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta^2} \frac{du_i}{d\eta} \right), \quad i = 1, 2$$



$$\begin{aligned}
 -(f_1 + \kappa f_2) \frac{dg}{d\eta} &= \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\mu \rho}{\sigma \text{Re} \Delta^2} \frac{dg}{d\eta} \right) \\
 \frac{df_i}{d\eta} &= u_i, \quad \frac{dp_i'}{d\eta} = \Delta u_i^2, \quad p_i' = \frac{1}{2d_i} \frac{\partial^2 p}{\partial (x_i)^2} \Bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} \\
 g &= \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w}, \quad \frac{1}{\rho} = \varepsilon T, \quad \mu = T^{\omega}, \quad T = g(1 - T_w) + T_w \\
 d_1 &= 1, \quad d_2 = \kappa, \quad \eta = \frac{1}{\Delta} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \int_0^{y_s} \rho dy, \quad y_s = \Delta \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\eta
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь все линейные размеры отнесены к наименьшему из радиусов главных кривизн  $R_0$ ;  $V_\infty v_i$  – компоненты вектора скорости,  $v_i = v_{i\infty} u_i$  ( $i = 1, 2$ );  $T_w$  – безразмерная температура поверхности;  $y_s$  – отход ударной волны;  $\kappa$  – отношение радиусов главных кривизн в точке торможения,  $0 \leq \kappa \leq 1$ .

В случае осесимметричной задачи

$$\kappa = 1, \quad d_1 = d_2, \quad f_1 = f_2, \quad p_1' = p_2', \quad u_1 = u_2$$

В случае плоскопараллельной задачи

$$\kappa = 0, \quad d_2 = 0, \quad f_2 = 0, \quad p_2' = 0, \quad u_2 = 0$$

На поверхности тела ставятся условия прилипания и заданной температуры, на ударной волне – обобщенные условия Ренкина – Гюгонио

$$\begin{aligned}
 \eta = 0: u_i &= 0, \quad g = 0, \quad f_i = 0, \quad i = 1, 2 \\
 \eta = 1: u_i &= 1 - \frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta} \frac{du_i}{d\eta}, \quad g = 1 - \frac{\mu \rho}{\sigma \text{Re} \Delta} \frac{dg}{d\eta}, \quad p = 1, \quad p_i' = -1, \quad \Delta = \frac{1}{f_1 + \kappa f_2}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Коэффициенты теплопередачи и трения на поверхности определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 c_{fi} &= \frac{2\tau_i}{v_{i\infty} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\mu \rho}{\Delta \text{Re}} \frac{du_i}{d\eta} \Bigg|_w, \quad \tau_i = \left( \mu_0 \mu \frac{d(V_\infty v_{i\infty} u_i)}{dy} \right)_w \\
 c_H &= \frac{q}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)} = \frac{\mu \rho}{\sigma \Delta \text{Re}} \frac{dg}{d\eta} \Bigg|_w, \quad q = \left( \lambda \frac{d(T_0 T)}{dy} \right)_w
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

**6. Основные параметры и режимы гиперзвукового течения разреженного газа в окрестности линии торможения затупленного тела.** Анализ уравнений ТВУС и анализ уравнений НС в гиперзвуковом ударном слое, приведенный выше, показывает, что есть два основных параметра гиперзвукового течения разреженного газа. Первый параметр  $\chi = 1/(\rho_s u_s) = O((\mu_s/(\rho_s \text{Re}))^{1/2})$ , второй параметр  $\tau = u_s = O((\text{Re}/(\mu_s \rho_s))^{1/2})$ . Асимптотический анализ показывает, что толщина ударного слоя  $y_s = O(\chi)$ , а безразмерные касательная скорость и энтальпия  $u_{is}, g_s = O(\tau)$ . Выразим параметры  $\chi$  и  $\tau$  через определяющие параметры задачи  $\text{Re}, \varepsilon, T_w, \sigma, \omega(\mu T^\omega)$  при  $\varepsilon \text{Re} = o(1)$ .

Выражая  $\mu_s$  и  $\rho_s$  через температуру:  $\mu_s = T_s^\omega$ ,  $1/\rho_s = \varepsilon T_s$ , получим, что  $\chi = O((\varepsilon T_s^{1+\omega}/\text{Re})^{1/2})$ , где  $T_s = g_s(1 - T_w) + T_w$ . Для того чтобы оценить  $\chi$  и  $\tau$ , надо оценить  $u_{is}$  и  $g_s$ . Запишем граничные условия на ударной волне (5.2), оценивая входящие в них члены:

$$u_{is} = 1 - O\left(\frac{u_{is}^2}{\varepsilon \text{Re}[g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}}\right), \quad g_s = 1 - O\left(\frac{u_{is}g_s}{\sigma \varepsilon \text{Re}[g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}}\right) \quad (6.1)$$

Из анализа соотношений (6.1) следует, что при  $\varepsilon \text{Re} = o(1)$ :  $u_{is}g_s = o(1)$ . Тогда

$$\frac{u_{is}^2}{\varepsilon \text{Re}[g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}} = O(1), \quad \frac{u_{is}g_s}{\sigma \varepsilon \text{Re}[g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}} = O(1) \quad (6.2)$$

Рассмотрим три возможных соотношения между  $g_s$  и  $T_w$

$$\text{I: } g_s \gg T_w, \quad \text{II: } g_s = O(T_w), \quad \text{III: } g_s \ll T_w \quad (6.3)$$

При этом имеем

$$\text{I: } T_s \sim g_s, \quad \text{II: } T_s \sim g_s + T_w, \quad \text{III: } T_s \sim T_w \quad (6.4)$$

Из решения системы (6.2) для каждого из трех случаев следует

$$\text{I, II: } u_{is}, g_s = O((\varepsilon \text{Re})^{1/(1+\omega)}); \quad \text{III: } u_{is}, g_s = O((\varepsilon \text{Re} T_w^{1-\omega})^{1/2}) \quad (6.5)$$

Подставив выражения (6.5) в выражения (6.3), получим три режима течения в гиперзвуковом вязком ударном слое при малых числах  $\text{Re}$  в зависимости от соотношения определяющих параметров задачи  $\text{Re}$ ,  $\varepsilon$ ,  $T_w$ ,  $\omega$

$$\text{Режим I: } T_w \ll (\varepsilon \text{Re})^{1/(1+\omega)}; \quad \text{Режим II: } T_w = O((\varepsilon \text{Re})^{1/(1+\omega)}); \quad (6.6)$$

$$\text{Режим III: } T_w \gg (\varepsilon \text{Re})^{1/(1+\omega)}$$

С учетом выражений (6.4) и (6.5) получим, что в режимах I и II параметр  $\tau = O((\varepsilon \text{Re})^{1/(1+\omega)})$ , параметр  $\chi = O(\varepsilon)$ . В режиме III параметр  $\tau = O((\varepsilon \text{Re} T_w^{1-\omega})^{1/2})$ , параметр  $\chi = O((\varepsilon T_w^{1+\omega}/\text{Re})^{1/2})$ .

Параметр  $\tau$  характеризует разреженность потока и применимость асимптотического решения, о котором пойдет речь ниже. Параметр  $\chi$  характеризует применимость континуальных моделей в переходном режиме. В режимах I и II параметр  $\chi$  порядка  $\varepsilon$ , и в гиперзвуковом потоке он мал в области торможения. В режиме III параметр  $\chi$  зависит от  $\text{Re}$ ,  $\varepsilon$  и  $T_w$ .

Соотношения (6.6) можно переписать в ином виде и рассматривать как определяющие область рассмотрения чисел  $\text{Re}$  при заданных параметрах  $\varepsilon$  и  $T_w$ :

$$\text{I: } \varepsilon \text{Re} \gg T_w^{1+\omega}; \quad \text{II: } \varepsilon \text{Re} = O(T_w^{1+\omega}); \quad \text{III: } \varepsilon \text{Re} \ll T_w^{1+\omega} \quad (6.7)$$

**7. Асимптотическое решение уравнений ТВУС.** Для всех режимов течения разреженного газа получим приближенные асимптотические решения уравнений ТВУС, в частности, для коэффициентов трения и теплопередачи в зависимости от определяющих параметров задачи, при малых числах  $\varepsilon$  и  $\text{Re}$ , с использованием метода последовательных

приближений и асимптотического разложения в ряды по малому параметру. Система уравнений (5.1) с граничными условиями (5.2) решается для трех режимов обтекания интегральным методом последовательных приближений по алгоритму, изложенному ранее [42]. Полученные в первом приближении аналитические решения раскладываются в ряды по входящим в них малым параметрам.

В режимах I и II полученные методом последовательных приближений аналитические решения зависят от числа Re через один параметр  $\tau = (2\varepsilon\text{Re}/(1 + \kappa))^{1/(1 + \omega)}$ . Для того чтобы получить асимптотическое решение при малых числах Re, эти аналитические решения раскладываются в ряды по параметру  $\tau$ . Было получено [36] асимптотическое решение для режима I – режима сильно охлажденной поверхности, для которого из определяющих параметров задачи выпадает температурный фактор  $T_w$ . Для коэффициентов трения и теплопередачи получены следующие выражения в зависимости от определяющих параметров Re,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \text{Режим I: } c_H &= 1 - \frac{1 + \omega}{3(2 - \omega)} \sigma^{2/(1 + \omega)} \tau + O(\tau^2), \quad \tau = \left( \frac{2\varepsilon\text{Re}}{1 + \kappa} \right)^{1/(1 + \omega)} \\ c_{fi} &= 2 - \frac{2}{3} \left( \frac{1 + \omega}{2 - \omega} + \frac{2d_i}{1 + \kappa} \right) \sigma^{(1 - \omega)/(1 + \omega)} \tau + \\ &+ \frac{4d_i\sigma\varepsilon}{1 + \kappa} \left( 1 + \left( \frac{2d_i}{5(1 + \kappa)} + \frac{(1 - \omega)(4 - \omega) - 2}{(2 - \omega)(4 - \omega)} \right) \sigma^{(1 - \omega)/(1 + \omega)} \tau \right) + O(\tau^2), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для режима II алгоритм получения решения аналогичен алгоритму, приведенному ранее [36] для режима I. Для коэффициентов теплопередачи и трения получаем следующее асимптотическое решение:

$$\begin{aligned} \text{Режим II: } c_H &= 1 - \frac{(1 + \bar{\lambda})^{(1 - \omega)/(1 + \omega)}}{3(2 - \omega)} \left( 1 + \omega + 3\bar{\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}} \right)^{1 - \omega} \right) \right) \sigma^{2/(1 + \omega)} \tau + O(\tau^2) \\ c_{fi} &= 2 - \frac{2(1 + \bar{\lambda})^{(1 - \omega)/(1 + \omega)}}{3} \left( \frac{2d_i}{1 + \kappa} + \frac{1 + \omega}{2 - \omega} + \frac{3\bar{\lambda}}{2 - \omega} \left( 1 - \left( \frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}} \right)^{1 - \omega} \right) \right) \sigma^{(1 - \omega)/(1 + \omega)} \tau + \\ &+ \frac{4d_i\sigma\varepsilon}{1 + \kappa} (1 + 2\bar{\lambda}) + O(\tau^2, \varepsilon\tau), \quad i = 1, 2, \quad \tau = \left( \frac{2\varepsilon\text{Re}}{1 + \kappa} \right)^{1/(1 + \omega)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Параметр  $\bar{\lambda}$  связан с безразмерной температурой  $T_w$  соотношением

$$T_w = \bar{\lambda}(1 + \bar{\lambda})^{(1 - \omega)/(1 + \omega)} \sigma^{2/(1 + \omega)} \tau \quad (7.3)$$

Режим I – режим холодной стенки, когда решение не зависит от температуры поверхности  $T_w$ ; его можно рассматривать как предельный случай режима II при  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$  ( $T_w \rightarrow 0$ ).

При  $\text{Re} \rightarrow 0$  или  $\varepsilon\text{Re} \rightarrow 0$  получаем для режимов I ( $\bar{\lambda} = 0$ ) и II следующие предельные выражения для коэффициентов теплопередачи и трения:

$$\lim_{\varepsilon\text{Re} \rightarrow 0} c_H = 1, \quad \lim_{\varepsilon\text{Re} \rightarrow 0} c_{fi} = 2 + \frac{4d_i\sigma\varepsilon}{1 + \kappa} (1 + 2\bar{\lambda}), \quad \lim_{\substack{\varepsilon\text{Re} \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} c_{fi} = 2 \quad (7.4)$$

В режимах I и II при уменьшении числа Re значение коэффициента теплопередачи стремится к его значению в свободномолекулярном режиме обтекания при коэффици-

енте аккомодации, равном единице [43]. Предельное значение коэффициентов трения при  $Re \rightarrow 0$  превышает значение в свободномолекулярном потоке, равное двум, на величину  $4d_i\sigma\epsilon(1 + 2\bar{\lambda})/(1 + \kappa) = O(\epsilon)$  из-за учета внепорядковых членов с продольным градиентом давления в уравнениях импульсов (5.1). Заметим, что в свободномолекулярном режиме обтекания продольный градиент давления равен нулю. Член, связанный с продольным градиентом давления, пропорционален  $\chi$ , а в режимах I и II  $\chi = O(\epsilon)$ , и с уменьшением  $\epsilon$  коэффициенты трения  $c_{fi}$  приближаются к своему свободномолекулярному пределу.

Выражение для  $y_s$  в случае осесимметричного течения и  $\omega = 1/2$  для режима I имеет вид

$$y_s = \frac{R_0\epsilon\sigma}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{20} \right) \sigma^{1/3} (\epsilon Re)^{2/3} - \frac{16\epsilon\sigma}{21} + O((\epsilon Re)^{4/3}, \epsilon(\epsilon Re)^{2/3}) \right) \quad (7.5)$$

Первый член здесь полностью совпадает с решением ИТВУС (разд. 4).

В режиме III аналитическое решение задачи (5.1), (5.2) для коэффициента теплопередачи, полученное методом последовательных приближений, зависит только от одного малого параметра  $\tau = (2\epsilon Re T_w^{1-\omega}/(1 + \kappa))^{1/2}$ . Путем разложения в ряды по этому параметру получается асимптотическое решение для коэффициента теплопередачи, которое, как и в режимах I и II, с уменьшением числа Re приближается к своему свободномолекулярному пределу:

$$\text{Режим III: } c_H = 1 - \frac{2}{3}\sigma\tau + O(\tau^2), \quad \tau = \left( \frac{2\epsilon Re T_w^{1-\omega}}{1 + \kappa} \right)^{1/2}, \quad \lim_{\epsilon Re \rightarrow 0} c_H = 1 \quad (7.6)$$

Однако режим III, соответствующий  $\epsilon Re \ll T_w^{1+\omega}$ , принципиально отличается от режимов I и II в том, что касается коэффициентов трения. В режиме III важную роль играет параметр  $\chi = ((1 + \kappa)\epsilon T_w^{1+\omega}/(2Re))^{1/2}$ , который уже не обязательно мал, как в режимах I и II, где  $\chi = O(\epsilon)$ . И поведение коэффициентов трения существенно другое по сравнению с коэффициентом теплопередачи, поскольку решение для коэффициентов трения зависит не только от параметра  $\tau$ , но также и от параметра  $\chi$ . При  $Re \rightarrow 0$ , начиная с некоторого значения числа Re, толщина ударного слоя  $y_s$  ( $y_s = O(\chi)$ ) начинает неограниченно возрастать и вместе с тем начинают неограниченно возрастать коэффициенты трения. Асимптотическое решение для коэффициентов трения можно получить только в предположении, что параметр  $\chi$  мал, путем разложения аналитического решения, полученного методом последовательных приближений, в ряды по малым параметрам  $\tau$  и  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \text{Режим III: } c_{fi} &= 2 - \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{d_i}{1 + \kappa} \right) \tau + \frac{8d_i\sigma}{1 + \kappa} \chi + O(\tau^2, \chi^2), \quad i = 1, 2 \\ \tau &= \left( \frac{2\epsilon Re T_w^{1-\omega}}{1 + \kappa} \right)^{1/2}, \quad \chi = \left( \frac{(1 + \kappa)\epsilon T_w^{1+\omega}}{2Re} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

В ТВУС коэффициенты трения и теплопередачи зависят от параметра  $\chi$  только через члены, связанные с градиентом давления. Аналитические и численные решения показывают, что при малых числах Re градиент давления оказывает влияние на коэффициенты трения и перестает влиять на коэффициент теплопередачи. Таким образом, когда параметр  $\chi$ , или толщина ударного слоя  $y_s$ , возрастает, это влияет на коэффициенты трения и не влияет на коэффициент теплопередачи. Однако коэффициент теплопереда-

чи не зависит от толщины ударного слоя  $y_s$  только в рамках модели ТВУС. В других континуальных моделях, например в ВУС или уравнениях НС, увеличение толщины ударного слоя  $y_s$  ведет к увеличению коэффициента теплопередачи, поскольку  $y_s$  влияет на теплопередачу через коэффициент Ламе  $H_1$  и геометрический параметр  $\tilde{r}$ , которые полагаются равными единице в ТВУС.

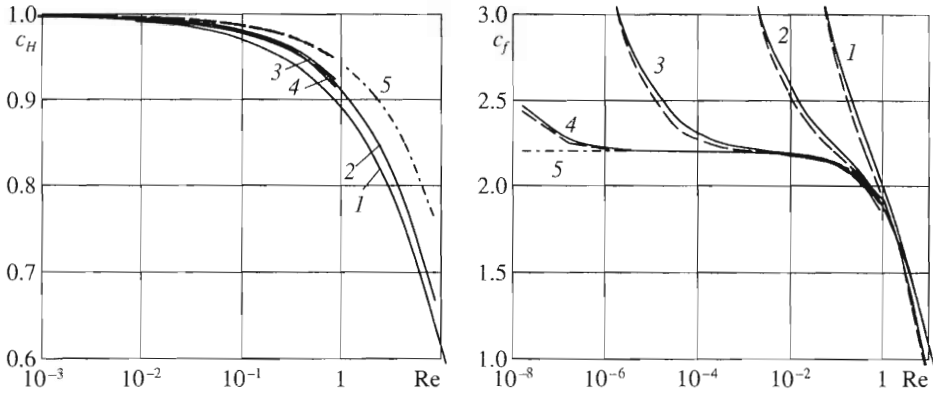
При уменьшении числа  $Re$  значение коэффициента теплопередачи приближается к его значению в свободномолекулярном течении при любых  $\chi$ . Коэффициенты трения приближаются к свободномолекулярному пределу при дополнительном условии  $\chi \rightarrow 0$  ( $y_s \rightarrow 0$ ) или если в уравнениях импульсов пренебречь членами с продольным градиентом давления, что, в сущности, соответствует строгому выводу уравнений ТВУС. Члены с продольным градиентом давления являются внепорядковыми в модели ТВУС, они оставлены для улучшения точности уравнений при больших числах  $Re$ . Таким образом, в случае использования строгой модели ТВУС (без продольного градиента давления) коэффициенты трения, как и коэффициент теплопередачи, зависят от одного параметра  $\tau$  и во всех случаях, независимо от значения  $\chi$ , приближаются к свободномолекулярному пределу.

**8. Численное решение уравнений ВУС и ТВУС и обсуждение результатов.** Теоретические результаты, изложенные выше, проверяются путем сравнения с численными решениями уравнений ВУС и ТВУС, полученными в данной работе, а также с численными решениями уравнений НС, экспериментальными данными и результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло, приведенными в литературе.

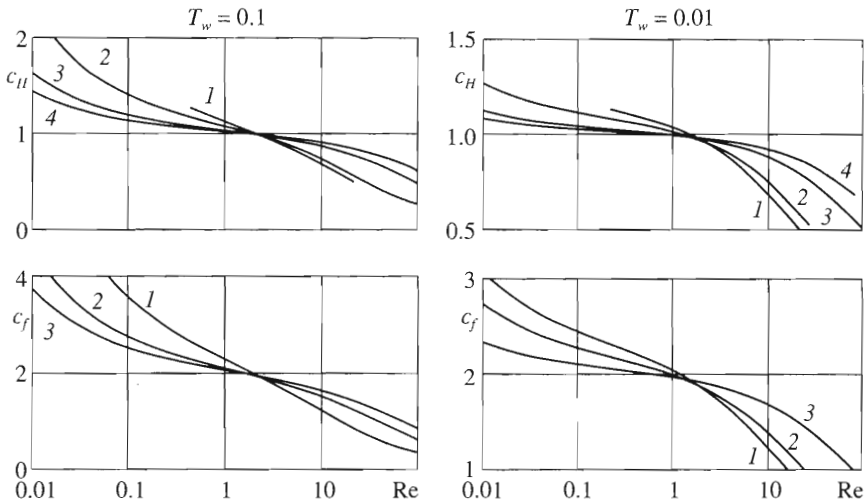
Численные решения ВУС и ТВУС получены неявным конечно-разностным маршевым методом высокой точности аппроксимации. Этот метод основан на глобальных итерациях только одной функции – эллиптической компоненты градиента давления – и требует малого количества глобальных итераций по эллиптическим членам. Применяется специальное расщепление продольного градиента давления на эллиптическую и гиперболическую составляющие [39, 40].

На фиг. 2 демонстрируется хорошая точность асимптотического решения (штриховые линии) для коэффициентов теплопередачи  $c_H$  и трения  $c_f$  при сравнении с численными решениями ТВУС (сплошные линии) при разных значениях температуры поверхности  $T_w = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$  – кривые 1–4; штрихпунктирные кривые 5 соответствуют режиму I;  $\kappa = 1$  (осесимметричная задача),  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\sigma = 0.7$ . Уменьшение  $T_w$  (охлаждение стенки) ведет к расширению области применимости решения для коэффициента трения (как асимптотического, так и численного) в сторону более низких чисел  $Re$ , поскольку уменьшение температурного фактора  $T_w$  ведет к уменьшению параметра  $\chi$ . Это хорошо видно на фиг. 2. В то же время коэффициент теплопередачи при малых числах  $Re$  весьма слабо зависит от  $T_w$  и близок к решению для режима I в случае охлажденной поверхности. Численное решение подтверждает теоретический вывод о том, что значение коэффициента теплопередачи, полученное в рамках ТВУС, при  $Re \rightarrow 0$  приближается к значению в свободномолекулярном потоке независимо от величины параметра  $\chi$ .

Численные решения уравнений ВУС представлены на фиг. 3 и 4. Эти решения демонстрируют влияние параметра  $\epsilon$  (или  $\gamma$ ) и температуры поверхности  $T_w$  на толщину ударного слоя  $y_s$  и коэффициенты теплопередачи  $c_H$  и трения  $c_f$  в рамках модели ВУС. На фиг. 3 показана зависимость  $c_H$  и  $c_f$  от числа  $Re$  при  $\epsilon = 0.14, 0.1, 0.02, 0.005$ , или  $\gamma = 1.4, 1.25, 1.04, 1.01$  (кривые 1–4). На фиг. 4 толщина ударного слоя и коэффициенты теплопередачи и трения даны в зависимости от параметра  $\epsilon Re$ . Кривые 1–4 соответствуют  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.02, 0.005$ , или  $\gamma = 1.25, 1.11, 1.04, 1.01$ . Результаты расчетов приведены для двух значений  $T_w = 0.1, 0.01$ ;  $\kappa = 1$ ,  $\omega = 0.5$ .



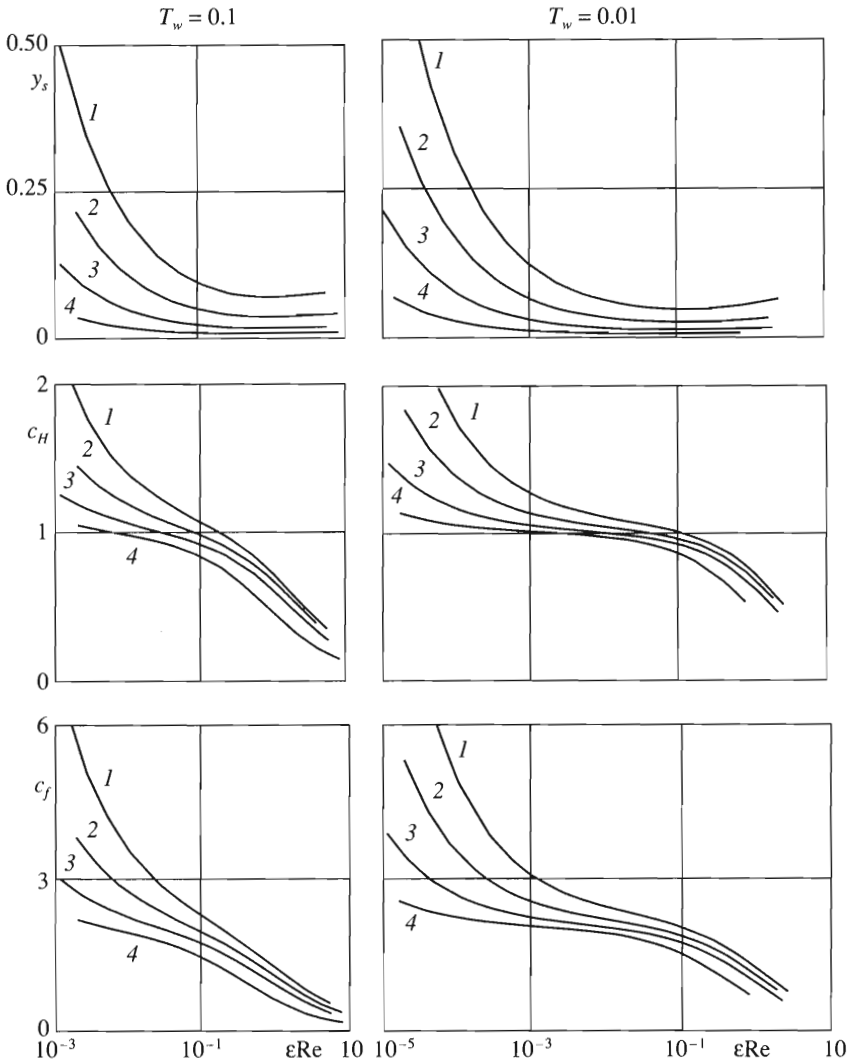
Фиг. 2



Фиг. 3

Важно отметить, что уменьшение  $\epsilon$  (или  $\gamma$ ) при больших числах  $Re$  ведет к увеличению коэффициентов трения и теплопередачи, а при малых – к уменьшению, что следует из фиг. 3. Фиг. 3 и 4 подтверждают теоретический вывод о том, что при малых числах  $Re$  уменьшение параметров  $\epsilon$  и  $T_w$  ведет к уменьшению параметра  $\chi$ , что ведет к снижению коэффициентов теплопередачи и трения и, таким образом, к расширению области применимости континуальных моделей, в данном случае модели ВУС, в сторону более малых чисел  $Re$ .

Как отмечено выше, в модели ВУС толщина ударного слоя  $y_s$  влияет на коэффициент теплопередачи  $c_H$  не только через градиент давления, но и через коэффициент Ламе  $H_1 = 1 + y/R$  и геометрический параметр  $\tilde{r} = 1 + y \cos \alpha / r_w$ , содержащие  $y$ , и поэтому возрастание толщины ударного слоя с уменьшением числа  $Re$  ведет к возрастанию  $c_H$ . Дополнительно была рассмотрена также третья модель – ВУС-П1, представляющая собой несколько упрощенные уравнения ВУС, в которых коэффициент Ламе  $H_1$  и геометри-

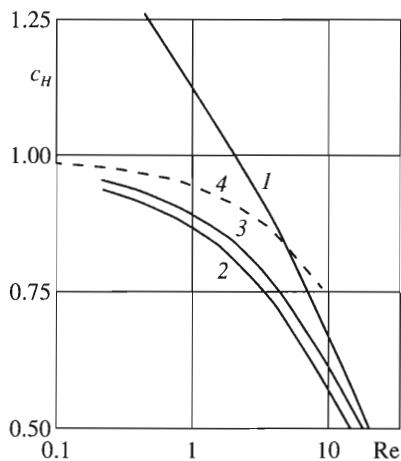


Фиг. 4

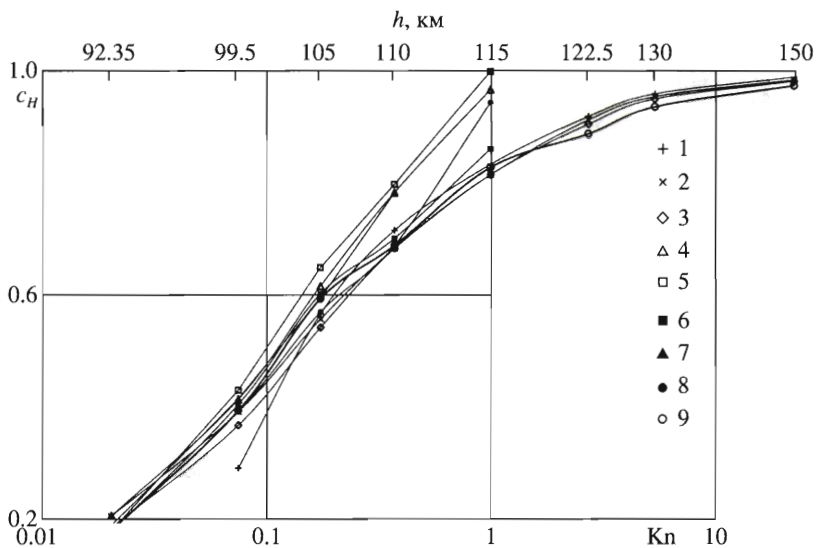
ческий параметр  $\bar{r}$  полагались равными единице, как и в модели ТВУС, но по сравнению с последней сохранены члены  $O(\chi)$ .

На фиг. 5 приведено сравнение решений для коэффициента теплопередачи, полученных в рамках трех моделей при  $T_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\omega = 0.5$ : численные решения ВУС (кривая 1), ВУС-Л1 (2) и ТВУС (3), и там же приведено асимптотическое решение ТВУС (4). Сравнение показывает, что упрощение уравнений ВУС, когда в них полагается  $H_1 = \bar{r} = 1$ , ведет к тому, что коэффициент теплопередачи в точке торможения значительно снижается и приближается к свободномолекулярному пределу.

Сравнение между различными методами расчета коэффициента теплопередачи вдоль траектории входа в атмосферу Земли космического корабля Space Shuttle на высотах  $h$  от 90 до 150 км показано на фиг. 6 в зависимости от числа Кнудсена  $Kn$  в набегающем потоке.



Фиг. 5



Фиг. 6

Здесь

- 1 – ТВУС, асимптотическое решение;
- 2 – ТВУС, без скольжения;
- 3 – ВУС-Л1, без скольжения;
- 4 – ВУС, без скольжения;
- 5 – НС, без скольжения [29];

- 6 – НС, со скольжением [29];
- 7 – НС, со скольжением [44];
- 8 – НС, со скольжением [45];
- 9 – метод Монте-Карло [46].

Решения, полученные в рамках континуальных моделей – асимптотическое и численное решение ТВУС, численные решения ВУС-Л1 и ВУС, разные решения уравнений НС [29, 44, 45], полученные с использованием различных граничных условий на поверхности: условий прилипания и условий с учетом скорости скольжения и скачка темпера-



туры, сравниваются с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [46].

Значения коэффициента теплопередачи, полученные из решения уравнений ВУС и НС, с увеличением высоты полета, или увеличением числа  $K_n$  (уменьшением числа  $Re$ ), начинают резко возрастать, отклоняясь от результатов расчета методом Монте-Карло и значения в свободномолекулярном потоке. Использование граничных условий со скольжением на поверхности приводит к снижению коэффициента теплопередачи, но не устраняет его тенденцию к неограниченному возрастанию. Наилучшее из решений уравнений НС [29] с учетом эффектов скольжения на поверхности при данном радиусе затупления (1.3 м) и скорости  $V_\infty = 7.5$  км/с может правильно предсказывать тепловые потоки в окрестности точки торможения затупленного тела до высоты 115 км. Три решения: асимптотическое и численные решения ТВУС и численное решение ВУС-Л1 – хорошо согласуются с результатами расчетов методом Монте-Карло вплоть до высоты 150 км. Асимптотическое решение дает удовлетворительную точность на высотах выше 100 км.

**9. Заключение.** Из детального асимптотического анализа стационарной задачи сверх- и гиперзвукового обтекания затупленных тел вязким теплопроводным совершенным газом следует, что уравнения вязкого ударного слоя (ВУС) и уравнения тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) выводятся из уравнений Навье–Стокса (НС) при малых числах  $Re$  в предположении малости введенного в работе параметра  $\chi = O((\mu_s/\rho_s Re))^{1/2}$ . Наряду с параметром  $\chi$  выявлен второй основной параметр течения разреженного газа – параметр разреженности  $\tau = O((Re/(\mu_s \rho_s))^{1/2})$ . При  $\chi \ll 1$  в пренебрежении в уравнениях НС членами  $O(\chi^2)$  получаются уравнения ВУС, а в пренебрежении дополнительно членами  $O(\chi)$  – уравнения ТВУС. Уравнения ВУС и ТВУС ранее выводились только при больших числах  $Re$ .

При  $\chi \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  уравнения НС при оставлении только членов  $O(1)$  сводятся к уравнениям исчезающего тонкого вязкого ударного слоя (ИТВУС). Решение уравнений ИТВУС получено в аналитическом виде, и оно дает свободномолекулярный предел и для локальных, и для суммарных коэффициентов сопротивления и теплопередачи для тел с произвольной выпуклой формой наветренной части поверхности.

Получены нетривиальные параметры подобия гиперзвукового течения разреженного газа около затупленного тела, составленные из определяющих параметров задачи  $Re$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$ , которые могут быть весьма полезны при обработке и представлении численных и экспериментальных результатов.

Получены асимптотические решения уравнений ТВУС в окрестности точки торможения трехмерного затупленного тела в зависимости от определяющих параметров для различных режимов течения с малыми числами  $Re$ . С уменьшением числа  $Re$  решение для коэффициента теплопередачи, полученное в рамках ТВУС, приближается к свободномолекулярному пределу; решение для коэффициента трения приближается к свободномолекулярному пределу при условии малости параметра  $\chi$  или при использовании строгой модели ТВУС (отсутствие членов с продольным градиентом давления).

Показано, что для расчета теплопередачи в окрестности точки торможения затупленного тела при гиперзвуковых скоростях с малыми числами  $Re$  (большими числами  $K_n$ ), соответствующими переходному режиму обтекания от свободномолекулярного до континуального, могут быть использованы как модель ТВУС, так и модель ВУС с коэффициентом Ламе  $H_1$  и геометрическим параметром  $\bar{r}$ , равными единице.

Многочисленные сравнения теоретических результатов с численными решениями ТВУС и ВУС, полученными в данной работе, а также с различными численными решениями уравнений НС и результатами, полученными методом прямого статистического моделирования Монте-Карло, подтвердили теоретические выводы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00695) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-835.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Tcheremissin F.G.* Direct numerical solution of the Boltzmann equation // Proc. 24th Int. Symp. on Gas Dynamics. 2004. N.Y.: Amer. Inst. Phys., 2005. P. 677–685.
2. *Aristov V.V.* Direct Methods for Solving the Boltzmann Equation and Study of Non-equilibrium Flows. Dordrecht etc.: Kluwer, 2001. 298 p.
3. *Yen S.M.* Numerical solution of the nonlinear Boltzmann equation for non-equilibrium gas flow problems // Annu Rev. Fluid Mech. 1984. V. 16. P. 67–97.
4. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision processes in gases // Phys. Rev. 1954. V. 94. № 3. P. 511–525.
5. *Krook M.* Continuum equations in the dynamics of rarefied gases // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt 4. P. 523–541.
6. *Шахов Е.М.* Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. 207 с.
7. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Численный расчет поперечного обтекания холодной пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. P. 139–154.
8. *Satofuka N., Morinishi K., Oishi T.* Numerical solution of the kinetic model equations for hypersonic flows // Comput. Mech. 1993. V. 11. № 5/6. P. 452–464.
9. *Bird G.* Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
10. *Ivanov M.S., Gimelshein S.F.* Computational hypersonic rarefied flows // Annu Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 469–505.
11. *Muntz E.P.* Rarefied gas dynamics // Annu Rev. Fluid Mech. 1989. V. 21. P. 387–417.
12. *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. II. Вычислительные аспекты метода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 6. С. 1553–1567.
13. *Ферцингер Дж., Канер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
14. *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
15. Взаимодействие газов с поверхностями / Под ред. Р.Г. Баранцева. М.: Мир, 1965. 227 с.
16. *Пярнпуу А.А.* Взаимодействие молекул газа с поверхностями. М.: Наука, 1974. 191 с.
17. *Галкин В.С., Шавалиев М.Ш.* Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
18. *Бобылев А.В.* О методах Чепмена–Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
19. *Zhong X., MacCormack R.W., Chapman D.R.* Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. № 6. P. 1036–1043.
20. *Zhong X., Furumoto G.H.* Augmented Burnett-equation solutions over axisymmetric blunt bodies in hypersonic flow // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 4. P. 588–595.
21. *Comeaux K.A., Chapman D.R., MacCormack R.W.* An analysis of the Burnett equations based on the second law of thermodynamics // AIAA Paper. 1995. № 95–0415. 19 p.
22. *Tannehill J.C., Eisler G.R.* Numerical computation of the hypersonic leading edge problem using the Burnett equations // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 1. P. 9–15.
23. *Imlay S.T.* Solution of the Burnett equations for hypersonic flows near the continuum limit // AIAA Paper. 1992. № 92–2922. 10 p.
24. *Козан М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
25. *Tsien H.-S.* Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases // J. Aeronaut. Sci. 1946. V. 13. № 12. P. 653–664 = *Цянь Сюэ-Сэнь.* Аэродинамика разреженных газов // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 310–340.

26. *Probstein R.F., Kemp N.H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // *J. Aero/Space Sciences*. 1960. V. 27. № 3. P. 174–192 = *Пробштейн Р., Кемп Н.* Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа // *Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей*. 1961. № 2. С. 59–95.
27. *Ho H.-T., Probstein R.F.* The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow // *Proc. 2nd Intern. Symp. Rarefied Gas Dynamics / Ed. L. Talbot. N.Y.: Acad. Press, 1961. P. 525–552.*
28. *Толстых А.И.* Аэродинамические характеристики охлажденного сферического затупления в гиперзвуковом потоке слаборазреженного газа // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1969. № 6. С. 163–166.
29. *Gupta R.N., Simmonds A.L.* Hypersonic low-density solutions of the Navier – Stokes equations with chemical nonequilibrium and multicomponent surface slip // *AIAA Paper*. 1986. № 86–1349. 18 p.
30. *Турский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // *ПММ*. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.
31. *Tirskiy G.A.* Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body // *Syst. Anal. Modelling Simulation*. 1999. V. 34. № 4. P. 205–240.
32. *Седов Л.И., Михайлова М.П., Черный Г.Г.* О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // *Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук*. 1953. № 3. С. 95–100.
33. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // *Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.*
34. *Cheng H.K.* The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // *IAS Paper*. 1963. № 63–92. 100 p.
35. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
36. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса для холодной поверхности // *Изв. РАН. МЖГ*. 2004. № 5. С. 159–170.
37. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // *AIAA Journal*. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
38. *Слезкин Н.А.* К теории течения газа в слое между поверхностью ударной волны и притупленной поверхностью тела вращения // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1959. № 2. С. 3–12.
39. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса для вязких смешанных течений // *Изв. РАН. МЖГ*. 2002. № 3. С. 30–49.
40. *Rogov B.V., Tirskiy G.A.* The accelerated method of global iterations for solving the external and internal problems of aerothermodynamics // *Proc. 4th Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles*. 2001. The Netherlands: Europ. Space Agency, 2002. P. 537–544.
41. *Турский Г.А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // *Науч. тр. Ин-та механики МГУ*. 1975. № 39. С. 5–38.
42. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 2. С. 143–150.
43. *Hayes W.D., Probstein R.F.* Hypersonic Flow Theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959 = *Хейз У.Д., Пробштейн Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 407 с.
44. *Jain A.C.* Hypersonic merged-layer flow on a sphere // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 1987. V. 1. № 1. P. 21–27.
45. *Власов В.И., Горшков А.Б.* Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 5. С. 160–168.
46. *Moss J.N., Bird G.A.* Direct simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions // *AIAA Paper*. 1984. № 84–0223. 14 p.