УДК 531.36;531.38

© 2006 г. В. Н. Тхай

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И СЕМЕЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОБРАТИМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Изучается обратимая механическая система, допускающая первые интегралы. Устанавливается, что на симметричных движениях постоянные асимметричных интегралов равны нулю. Выясняются вид интегралов обратимой линейной периодической системы, отвечающих нулевым характеристическим показателям (ХП), и структура соответствующих жордановых клеток. Для системы с m симметричными и k асимметричными интегралами доказываются теорема о несуществовании дополнительного первого интеграла и теорема о грубости свойства иметь симметричное периодическое движение (СПД). Выясняется зависимость периода СПД от постоянных интегралов. Приводятся результаты по колебаниям квазилинейной системы в вырожденных случаях. Исследуется вырождение и главный резонанс: бифуркация с исчезновением СПД и рождением двух несимметричных циклов. В приложении изучается тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой. Используются уравнения Эйлера – Пуассона; в общем случае задачи интегралы энергии и геометрический – симметричные, в то время как интеграл кинетического момента оказывается асимметричным. В частном случае, когда центр тяжести тела расположен в главной плоскости эллипсода инерции, все три классических интеграла становятся симметричными. Здесь выясняется, что любое СПД тела содержит четыре нулевых ХП, из которых два – простые, а два других образуют жорданову клетку. В типичной ситуации оставшиеся два ХП не равны нулю. Все указанное позволяет говорить о принадлежности СПД к двухпараметрическому семейству и об отсутствии дополнительного первого интеграла. Устанавливается, что тело совершает маятниковые движения и в случае, когда центр тяжести находится близ главной плоскости эллипсоида инерции.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обратимую механическую систему [1]

$$\begin{gathered}\dot{u} = U(u, \upsilon), \quad \dot{\upsilon} = V(u, \upsilon) \\ U(u, -\upsilon) = -U(u, \upsilon), \quad V(u, -\upsilon) = V(u, \upsilon); \quad u \in R^l, \quad \upsilon \in R^n \ (l \geq n)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $M = \{u, \upsilon : \upsilon = 0\}$ называется неподвижным множеством системы (1.1). Движение $u(u^0, t)$, $\upsilon(u^0, t)$ с начальной точкой $u^0 \in M$ симметрично относительно M, а условия [2]

$$\upsilon_s(u_1^0, \ldots, u_l^0, T) = 0, \quad s = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

являются необходимыми и достаточными для существования симметричных периодических движений (СПД) периода $2T$. Видно, что СПД образуют q-семейства, причем в типичном случае имеем $q = l - n + 1$ [2]. Параметрами этого семейства могут служить $l - n$ величин из начальных значений $u_1^0, \ldots, u_l^0$ плюс полупериод T.

Обратимая механическая система может допускать первый интеграл W. Тогда на уровне $W = h(\text{const})$ имеем редуцированную систему, содержащую параметр h, поэтому q-семейство СПД в этой системе будет $(q + 1)$-семейством СПД в исходной системе: типичным становится случай, вырожденный в общей теории. Даже такой беглый взгляд на проблему показывает необходимость изучения СПД обратимой механической системы, допускающей первые интегралы. Более детальный анализ приводит к разделению интегралов на симметричные и асимметричные, проясняет роль каждого из типов интегралов и их числа в размерности семейства СПД, на примере СПД показывает "избранность" одного из интегралов – интеграла энергии, дает отрицательный результат в проблеме существования дополнительного первого интеграла (в том числе, в задаче далекой от интегрируемой), решает проблему продолжения СПД по параметру. Основной результат: выделена типичная ситуация, в которой выводы диктуются только числом интегралов того и другого типов.

Постановка данной задачи интересна не только для системы с первым интегралом, но и для случая, когда можно построить приближенную в определенном смысле систему, допускающую первый интеграл. Также укажем, что постановка задачи естественна для системы, состоящей из слабосвязанных подсистем.

Наконец, отметим, что в задаче о продолжении СПД обратимой механической системы по параметру случай $q = l - n + 1$ является грубым [2]. Негрубые случаи теории рассматривались в [2]. Однако специально случай наличия в системе первого интеграла не исследовался.

Далее в качестве примера обратимой механической системы в типичной ситуации демонстрируется тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой.

2. Первые интегралы и симметричные решения в обратимой механической системе.

Определение 1. Первый интеграл $W(u, \upsilon) = h$ (const) системы (1.1) называется симметричным, если $W(u, -\upsilon) = W(u, \upsilon)$, и асимметричным, если $W(u, -\upsilon) = -W(u, \upsilon)$.

Теорема 1. Если система (1.1) допускает первый интеграл общего вида, то этот интеграл представляется суммой симметричного и асимметричного первых интегралов.

Доказательство. Очевидно, первый интеграл системы (1.1) всегда представляется в виде суммы двух функций

$$W(u, \upsilon) = F(u, \upsilon) + G(u, \upsilon); \quad F(u, -\upsilon) = F(u, \upsilon), \quad G(u, -\upsilon) = -G(u, \upsilon)$$

Вычислив полную производную от функции W в силу уравнений системы (1.1), получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial F(u, \upsilon)}{\partial u} U(u, \upsilon) + \frac{\partial F(u, \upsilon)}{\partial \upsilon} V(u, \upsilon) + \frac{\partial G(u, \upsilon)}{\partial u} U(u, \upsilon) + \frac{\partial F(u, \upsilon)}{\partial \upsilon} V(u, \upsilon)$$

Здесь первые два слагаемые даются нечетными, а остальные два – четными по υ функциями, а полная производная от функции W тождественно равна нулю, поэтому тождественно равны нулю полные производные от функций F и G. Этим доказывается наличие симметричного F и асимметричного G первых интегралов и формула $W = F + G$.

Пусть система (1.1) допускает m симметричных интегралов F_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ и k асимметричных интегралов G_β $(\beta = 1, \ldots, k)$.

Теорема 2. На симметричных движениях постоянные асимметричных интегралов равны нулю.

Доказательство. На симметричных движениях имеем

$$u(-t) = u(t), \quad \upsilon(-t) = -\upsilon(t)$$

поэтому

$$G_\beta(u(-t), \upsilon(-t)) = G_\beta(u(t), -\upsilon(t)) = -G_\beta(u(t), \upsilon(t)) = 0$$

Следствие. Симметричные движения выделяют подпространства размерности $l + n - k$.

Утверждение 1. Если в точке $(u^*, 0) \in M$ имеем

$$\operatorname{rank}(dF_1, \ldots, dF_m, dG_1, \ldots, dG_k) = m + k$$

то $\operatorname{rank}(dF_1, \ldots, dF_m) = m$ и

$$\mathrm{Ra} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}(dG_1, \ldots, dG_k) = k$$

В самом деле, в точке $(u^*, 0) \in M$ имеем

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_1}\delta u_1 + \ldots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_l}\delta u_l + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \upsilon_1}\delta \upsilon_1 + \ldots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \upsilon_n}\delta \upsilon_n = \delta h_\alpha$$

$$\frac{\partial G_\beta}{\partial u_1}\delta u_1 + \ldots + \frac{\partial G_\beta}{\partial u_l}\delta u_l + \frac{\partial G_\beta}{\partial \upsilon_1}\delta \upsilon_1 + \ldots + \frac{\partial G_\beta}{\partial \upsilon_n}\delta \upsilon_n = \delta h_\beta$$

(h_α, h_β – постоянные интегралов). Функции F_α – нечетные по υ, поэтому все $\partial F_\alpha/\partial \upsilon_j = 0$ и $\operatorname{rank}(dF_1, \ldots, dF_m) = m$. Отсюда также следует, что $\mathrm{Ra} = k$.

Утверждение 2. Условие $V(u^*, 0) \neq 0$ является необходимым и достаточным для прохождения через точку $(u^*, 0) \in M$ симметричного решения, отличного от постоянного.

В самом деле, в точке $(u^*, 0) \in M$ имеем $U(u^*, 0) = 0$, поэтому условие $V(u^*, 0) = 0$ является необходимым и достаточным для существования равновесия обратимой механической системы. В случае $V(u^*, 0) \neq 0$ через точку $(u^*, 0) \in M$ проходит симметричное решение.

3. Интегралы обратимой линейной периодической системы. Рассмотрим обратимую линейную 2π-периодическую систему [2]

$$\dot{x} = A^-(t)x + A^+(t)y, \quad \dot{y} = B^+(t)x + B^-(t)y; \quad x \in R^l, \quad y \in R^n \ (l \geq n) \tag{3.1}$$

Здесь и всюду ниже верхний индекс плюс (минус) означает 2π-периодические матрицы, векторы и функции, составленные из четных (нечетных) функций.

Система (3.1) инвариантна относительно одновременно двух преобразований:

$$1)\ (x, y, t) \to (x, -y, -t), \quad 2)\ (x, y, t) \to (-x, y, -t)$$

Таким образом, система имеет два неподвижных множества:

$$M_x = \{x, y : y = 0\}, \quad M_y = \{x, y : x = 0\}$$

Обозначим через

$$S(t) = \begin{Vmatrix} u^+(t) & u^-(t) \\ \upsilon^-(t) & \upsilon^+(t) \end{Vmatrix}, \quad S(0) = I_{l+n} \tag{3.2}$$

(I_j – единичная ($j \times j$)-матрица) фундаментальную систему решений с единичной матрицей начальных условий. Тогда условие $\operatorname{rank} \upsilon^-(\pi) = n - \lambda$ дает $l - n + \lambda$ периодических решений системы (3.1), симметричных относительно множества M_x, а условие $\operatorname{rank} u^-(\pi) = n - \nu$ дает ν подобных решений, симметричных относительно множества M_y [2]. Очевидно, некоторые из указанных решений могут быть симметричными относительно одновременно обоих множеств M_x и M_y. Число таких решений равно $\min(\lambda, \nu)$. Периодическим решениям отвечают нулевые характеристические показатели (ХП).

Посредством замены

$$\xi_i = (p_i^+, x) + (q_i^-, y), \quad i = 1, \ldots l$$
$$\eta_j = (p_j^-, x) + (q_j^+, y), \quad j = 1, \ldots n \tag{3.3}$$

(векторы $p_s^\pm$, $q_s^\pm$ – 2π-периодические по t) приведем систему (3.1) к системе с постоянными коэффициентами. При этом множества M_x, M_y переходят во множества M_ξ, M_η соответственно: $M_\xi = \{\xi, \eta : \eta = 0\}$, $M_\eta = \{\xi, \eta : \xi = 0\}$.

Выпишем часть приведенной системы, отвечающую нулевым ХП. Имеем

$$\dot\xi_i = 0 \ (i = 1, \ldots, l - n + \min(\lambda, \nu)), \quad \dot\eta_j = 0, \quad j = 1, \ldots, \min(\lambda, \nu) \tag{3.4}$$

$$\dot\xi_s = 0, \quad \dot\eta_s = \xi_s, \quad s = l - n + \nu + 1, \ldots, l - n + \lambda, \quad \nu \le \lambda \tag{3.5}$$

$$\dot\xi_s = \eta_s, \quad \dot\eta_s = 0, \quad s = l - n + \lambda + 1, \ldots, l - n + \nu, \quad \nu > \lambda \tag{3.6}$$

Из преобразования (3.3) и уравнений (3.4)–(3.6) следует такое утверждение.

Утверждение 3. Пусть в матрице $S(t)$ (3.2)

$$\operatorname{rank} \upsilon^-(\pi) = n - \lambda, \quad \operatorname{rank} u^-(\pi) = n - \nu$$

Тогда система (3.1) содержит $l - n + 2\min(\lambda, \nu) + 2|\lambda - \nu|$ нулевых ХП, включая $|\lambda - \nu|$ пар, каждая из которых образует жорданову клетку.

Каждой жордановой клетке отвечают линейные интегралы:

при $\nu \le \lambda$

$$W \equiv (\alpha^+(t), x) + (\beta^-(t), y) = \text{const} \tag{3.7}$$

$$tW + (\alpha^-(t), x) + (\beta^+(t), y) = \text{const} \tag{3.8}$$

при $\nu > \lambda$

$$W_* \equiv (\alpha_*^-(t), x) + (\beta_*^+(t), y) = \text{const} \tag{3.9}$$

$$tW_* + (\alpha_*^+(t), x) + (\beta_*^-(t), y) = \text{const} \tag{3.10}$$

Простому ХП также отвечает интеграл (3.7) или (3.9).

4. Зависимость периода СПД от постоянных интегралов. Рассмотрим q-семейство СПД

$$u = \varphi(h, t), \quad \upsilon = \psi(h, t)$$

где значениям $h_1^*, \ldots, h_q^*$ отвечает движение с полупериодом $T(h^*) = \pi$.

Функции $\varphi(h, (T/\pi)t)$, $\psi(h, (T/\pi)t)$ имеют не зависящий от параметра h период, равный 2π. Такими же будут их производные по h_j. Вычислим эти производные, помечая нижней звездочкой подстановку значения $h = h^*$

$$p_j(t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}\right)_* + \frac{t}{\pi}\left(\frac{\partial T}{\partial h_j}\right)_* \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_*, \quad g_j(t) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial h_j}\right)_* + \frac{t}{\pi}\left(\frac{\partial T}{\partial h_j}\right)_* \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_* \tag{4.1}$$

Функции $(\partial\varphi/\partial h_j)_*$, $(\partial\psi/\partial h_j)_*$ составляют систему q независимых решений системы уравнений в вариациях (3.1). Эти решения симметричны относительно множества M_x.

Из равенств (4.1) видно, что при $(\partial T/\partial h_j)_* = 0$ получаем периодическое решение и наоборот: для периодического решения имеем $(\partial T/\partial h_j)_* = 0$.

Система (3.1) всегда имеет $l - n$ периодических решений, симметричных относительно множества M_x, поэтому необходимо, чтобы $l - n$ частных производных от T по h_j обращались в нуль.

Рассмотрим случай наличия в системе (1.1) k асимметричных интегралов.

Лемма. Если через точку $(u^*, 0) \in M$, $u^* = u(0)$ проходит СПД полупериода T и $\mathrm{Ra} = k$, то 1) в точке $(u^{**}, 0) \in M$, $u^{**} = u(T)$ также $\mathrm{Ra} = k$, 2) k уравнений в системе (1.2) – следствия остальных уравнений, 3) система (1.1) имеет r-семейство СПД ($r \geq l - n + k$) с фиксированным периодом $2T$, 4) система в вариациях (3.1) допускает $k^* \geq k$ периодических решений, симметричных относительно M_y, и $r^* \geq r$ периодических решений, симметричных относительно M_x.

Доказательство. Линеаризуем асимметричные интегралы на рассматриваемом СПД. Тогда придем к интегралам вида (3.9) числом k. Согласно утверждению 3, интеграл (3.9) соответствует симметричному относительно множества M_y, периодическому решению системы (3.1) уравнений в вариациях. Так как число таких решений k одно и то же в точках $(u^*, 0)$, $(u^{**}, 0) \in M$, величина Ra в этих точках одинакова.

В точке $(u^{**}, 0)$ уравнения (1.2) рассмотрим вместе с равенствами

$$G(u(u^0, T), v(u^0, T)) = 0$$

Тогда условие $\mathrm{Ra} = k$ позволяет вместо системы (1.2), содержащей n уравнений, анализировать только систему из $n - k$ уравнений: остальные k уравнений выполняются автоматически. Эта редуцированная система по-прежнему содержит l неизвестных u_j^0 и параметр T, но ее решение уже зависит не менее чем от $l - n + k$ параметров и T, что означает существование r-семейства СПД ($r \geq l - n + k$) с фиксированным периодом $2T$. В системе (3.1) это приводит к $r^* \geq r$ симметричным относительно M_x периодическим решениям.

Теорема 3. Если обратимая механическая система (1.1) имеет k асимметричных первых интегралов, то частные производные периода СПД по $l - n + k$ параметрам h_j семейства равны нулю.

Доказательство. Согласно лемме, система имеет r-семейство СПД ($r \geq l - n + k$) фиксированного периода $2T$, а линейная система (3.1) обладает $r^* \geq r$ периодическими решениями, симметричными относительно множества M_x, поэтому из формул (4.1) получим: $l - n + k$ производных $\partial T/\partial h_j$ равны нулю.

Следствие. Если в системе (1.1) $q = l - n + k + 1$, то в точке h^* имеем

$$dT = a dh_q, \quad a = \mathrm{const}$$

т.е. в первом приближение период СПД зависит только от одного параметра.

Замечание. Для справедливости теоремы 3 наличие симметричных интегралов необязательно.

5. Типичная ситуация для СПД обратимой механической системы. Естественное условие $\mathrm{rank}(dG_1, \ldots, dG_k) = k$ означает невырожденность системы асимметричных интегралов в точке $(u^*, 0) \in M$, через которую проходит СПД периода 2π. При выполнении этого условия лемма гарантирует существование в уравнениях (3.1) $k^* \geq k$ периодических решений, симметричных относительно M_y.

Число r параметров семейства СПД фиксированного периода не меньше $l - n + k$. Пусть векторный параметр $h = (h_*, h_{**})$ семейства СПД содержит две компоненты, причем $\partial T/\partial h_* = 0$, $\partial T/\partial h_{**} \neq 0$. Согласно теореме 3, размерность $\dim h_* \geq l - n + k$. При этом строгое неравенство возникает в вырожденном случае, когда одна из неравных нулю производных обращается в нуль.

Пусть параметры обратимой механической системы фиксированы. Тогда вырождение обнаруживается в фазовом пространстве, когда наблюдатель перемещается в нем

вдоль семейства СПД. Другая причина возникновения нетипичной для СПД ситуации – изменение параметров системы.

Число интегралов вида (3.9) равно k^*. Значит, в случае $k^* > k$ линейная система (3.1) имеет больше асимметричных интегралов, чем полная система. Такую ситуацию также следует признать нетипичной для СПД.

Определение 2. Ситуацию, в которой число k^* интегралов вида (3.9) совпадает с числом k асимметричных первых интегралов и $\dim h_* = l - n + k$, назовем типичной для СПД.

В типичной ситуации получим k простых ХП, отвечающих линейным интегралам вида (3.9). Остальные простые ХП отвечают интегралам вида (3.7). С другой стороны, уравнения в вариациях (3.1) всегда имеют периодическое решение $(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$, симметричное относительно множества M_y, поэтому получим одну жорданову клетку. В общем случае таких клеток может быть несколько. Согласно соотношениям (3.5), каждая такая клетка дает растущее решение, симметричное относительно M_x.

Сформулируем выводы, которые пока не связаны явно с наличием симметричных интегралов.

Теорема 4. В типичной ситуации имеем

$$\mathrm{Ra}_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}\left\| \frac{\partial \upsilon_s(u_1^0, \ldots, u_l^0, T)}{\partial u_j^0} \right\|_* = n - k$$

(звездочка означает подстановку значений $u^0 = u^*$, $T = T^* = \pi$).

Доказательство. Из леммы следует, что в типичной ситуации уравнение (3.1) имеет только $l - n + k$ периодических решений, симметричных относительно множества M_x; жордановы клетки таких решений не дают. Значит, $\mathrm{Ra}_1 = n - k$.

Теорема 5. В типичной ситуации размерность q семейства СПД равна $l - n + k + 1$ и оно обязательно включает $(l - n + k)$-подсемейство движений фиксированного периода.

Доказательство. По причине существования СПД редуцированная с учетом k асимметричных интегралов система (1.2) допускает решение: $u^0 = u^*$, $T = \pi$. Согласно теореме 4 имеем $\mathrm{Ra}_1 = n - k$, поэтому теорема о неявной функции позволяет единственным образом найти решение редуцированной системы, содержащей $l - n + k + 1$ произвольных параметров, один из которых – параметр T. Решение при $T = T^*$ дает подсемейство фиксированного периода 2π.

Следствие. В типичной ситуации $\dim h_{**} = 1$.

Найдем грубые случаи теории продолжения СПД по параметру для обратимой механической системы.

Теорема 6. В типичной ситуации, независимо от вида конкретных возмущений, справедливо следующее: *а*) в возмущенной автономной системе семейство СПД продолжается по параметру в случаях $k = 0$, $k = 1$, б) при действии периодических возмущений в случае $k = 0$ рождается $(l - n)$-семейство СПД.

Доказательство. В случае $k = 0$ имеем $\mathrm{Ra}_1 = n$, и вопрос о существовании СПД при наличии возмущений решается применением к системе (1.2) теоремы о неявной функции. В случае $k = 1$ имеем $\mathrm{Ra}_1 = n - 1$, но

$$\mathrm{Ra}_2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}\left\| \frac{\partial \upsilon_s(u^0, T)}{\partial u_j^0}, \frac{\partial \upsilon_s(u^0, T)}{\partial T} \right\|_* = n - k$$

Отсюда получаем вторую часть утверждения *а*.

Выше в теоремах 4–6 наличие симметричных интегралов специально не оговаривалось. Предположим, что система (1.1) допускает m симметричных интегралов. Тогда за параметры семейства СПД можно выбрать произвольные постоянные этих интегралов.

Теорема 7. В типичной ситуации СПД содержит $l - n + 2k$ простых нулевых ХП и $\max\{1, m - (l - n + k)\}$ жордановых клеток, отвечающих нулевым ХП.

Доказательство. Пусть $m \le l - n + k$, т.е. размерность подсемейства СПД фиксированного периода не меньше числа симметричных интегралов. Здесь в любом случае имеем $l - n + k$ симметричных относительно M_x периодических решений (и $l - n + k$ интегралов вида (3.7)) и k таких решений, симметричных относительно M_y, (и k интегралов вида (3.9)). Плюс к этому обязательно получим одну жорданову клетку, отвечающую решению $(\dot\varphi, \dot\psi)$. Таким образом, число нулевых ХП для СПД равно $l - n + 2k + 2$, а жорданова клетка имеется только одна.

Пусть $m > l - n + k$. Размерность семейства СПД фиксированного периода равна $l - n + k$, а система (3.1) имеет только k периодических решений, симметричных относительно M_y. Значит, во-первых, семейство СПД не зависит от $m - (l - n + k + 1)$ постоянных интегралов. Во-вторых, получим $m - (l - n + k)$ жордановы клетки, включая клетку с решением $(\dot\varphi, \dot\psi)$.

Замечание. Из теоремы 7 следует, что при $m = l - n + k + 1$ среди всех симметричных интегралов выделяется только один интеграл. В примерах это – интеграл энергии.

Следующее утверждение связано с несуществованием в обратимой механической системе дополнительных первых интегралов.

Впервые задачу о существовании дополнительного интеграла в гамильтоновых системах, отличного от интеграла энергии, поставил Пуанкаре [3]. Отрицательный ответ на этот вопрос связан с рождением изолированных колебаний на фиксированном уровне энергии [4]. В обратимой механической системе данный факт следует из наличия типичного семейства СПД (в виде колебаний и/или вращений).

Теорема 8. Если известно, что обратимая механическая система допускает m симметричных и k асимметричных первых интегралов, причем $m > l - n + k$ и СПД этой системы содержит $2m - (l - n)$ нулевых ХП, то в типичной ситуации в системе нет дополнительного к известным первым интегралам первого интеграла.

Доказательство. В типичной ситуации все нулевые ХП даются теоремой 7, поэтому в системе нет других нулевых ХП, отвечающих дополнительным первым интегралам.

Следствие. Дополнительные первые интегралы в обратимой механической системе, зависящей от параметров, необходимо искать на множестве параметров нулевой меры, где реализуется нетипичная ситуация для СПД.

Замечания. 1°. Условие $m > l - n + k$ является естественным и выполняется, например, в задаче трех тел ($m = 1$, $l = n = 2$, $k = 0$), для тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой (см. разд. 6) и т.д.

2°. В случае $m \le l - n + k$ недостающие первые интегралы, если они имеются, могут быть только симметричными.

3°. Для гамильтоновой системы утверждение известно. Метод Пуанкаре здесь дает ответ для систем, близких к интегрируемым [4].

6. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой. Движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой описывается уравнениями Эйлера – Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot p &= (B - C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot\gamma_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ B\dot q &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot\gamma_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ C\dot r &= (A - B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot\gamma_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела, P – вес тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести, $\omega = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

Система (6.1) допускает классические интегралы

$$W_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h(\text{const})$$

$$W_2 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma(\text{const})$$

$$W_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Характерная особенность системы (6.1) – ее инвариантность относительно замены R: $(\omega, \gamma, t) \to (-\omega, \gamma, -t)$. Значит, система (6.1) принадлежит [5] к классу обратимых механических систем с неподвижным множеством $M = \{\omega, \gamma : \omega = 0\}$. Интегралы энергии и геометрический симметричны относительно M, т.е.

$$W_{1,3}(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = W_{1,3}(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

в то время как интеграл кинетического момента оказывается асимметричным

$$W_2(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -W_2(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

В случае расположения центра тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции ($y_0 = 0$) система (6.1) инвариантна также относительно замены

$$R_y : (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) \to (p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3, -t)$$

т.е. допускает второе неподвижное множество

$$M_y = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : q = 0, \gamma_2 = 0\}$$

В этом случае все классические интегралы становятся симметричными относительно неподвижного множества M_y, т.е.

$$W_j(p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) = W_j(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

Случаю $y_0 = 0$ принадлежат [6] почти все известные точные решения задачи Эйлера, кроме перманентных вращений. К симметричным, относительно множества M_y, относятся, например, маятниковые движения Млодзеевского [7], регулярные прецессии Гриоли [8] и др. Оказывается [9, 10], решения Гриоли принадлежат к двухпараметрическому семейству СПД.

В случае $y_0 = 0$ уравнения Эйлера – Пуассона (6.1) можно записать в виде обратимой системы (1.1) с $l = 4$, $n = 2$ и векторами $u = (p, q, \gamma_1, \gamma_3)^T$, $\upsilon = (q, \gamma_2)^T$.

Теорема 9. Для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида энерции ($y_0 = 0$) в типичной ситуации СПД системы (6.1) содержит два простых нулевых ХП, одну пару нулевых ХП, образующих жорданову клетку, а оставшиеся два ХП вычисляются построением только одного решения задачи Коши.

Доказательство следует из соотношения размерностей векторов u и υ ($l - n = 2$), наличия трех симметричных интегралов, теоремы 7 и метода вычисления ХП обратимой системы [9].

Замечание. В типичной ситуации два ХП не равны нулю.

Теорема 10. При фиксированных произвольных параметрах A, B, C, x_0, z_0 и $y_0 = 0$ в типичной ситуации СПД системы (6.1) образуют двухпараметрическое от h и σ семейство, содержащее подсемейство фиксированного периода от параметра σ, и это семейство продолжается (при $y_0 = 0$) по параметрам задачи.

Доказательство. Это утверждение следует из теорем 5, 6, наличия трех симметричных первых интегралов и учета фиксированной постоянной в геометрическом интеграле. Далее, два простых нулевых ХП связаны с интегралом кинетического момента и геометрическим интегралом; интегралы дают параметр σ. Другой параметр h доставляется интегралом энергии и связанной с ним парой нулевых ХП с жордановой клеткой.

Замечание. Теорема 10 позволяет обобщить описанное ранее наблюдение [9, 10] на любое СПД задачи.

Проанализируем два примечательных СПД в системе (6.1).

Регулярные прецессии Гриоли. Гриоли [8] обнаружил регулярные прецессии у тела, закрепленного в такой точке, что выполнены условия

$$x_0^2(B-C) = z_0^2(A-B), \quad y_0 = 0, \quad A > B > C \tag{6.2}$$

Прецессии Гриоли имеют две замечательные особенности: 1) они возникают при движении динамически несимметричного тела, подчиненного только условиям (6.2), 2) тело прецессирует вокруг не вертикальной, а наклонной к вертикали под некоторым углом β оси.

Из явных формул для решений Гриоли видно [11], что при условиях закрепления (6.2) имеем механически единственное возможное движение в виде прецессии, которое представляет собой СПД [9]. Тем не менее из теоремы 10 получаем, что данное СПД принадлежит двухпараметрическому семейству от h и σ и это семейство продолжается на тот случай, когда первое условие (6.2) выполняется приближенно.

Маятниковые движения Млодзеевского. Эти движения реализуются в задаче при $y_0 = 0$ без наложения каких-либо дополнительных ограничений на моменты инерции и точку крепления и содержат СПД как в виде колебаний, так и в виде вращений:

$$\begin{gathered} B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = -q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 \\ p = r = 0, \quad \gamma_2 = 0 \end{gathered} \tag{6.3}$$

Семейство СПД (6.3) параметризовано естественным параметром – постоянной интеграла энергии h. ХП для решения (6.3) вычислялись [12]: реализуется типичный случай. Следовательно, однопараметрическое семейство Млодзеевского принадлежит (теорема 11) к двухпараметрическому семейству СПД, содержащему не только плоские, но и близкие к плоским движения.

Примечательно, что маятниковые колебания симметричны относительно одновременно двух неподвижных множеств: M и M_y. Симметричность колебаний относительно M позволяет применить теорему 6 к общему случаю ($y_0 \neq 0$) задачи (6.1) и получить следующий результат.

Теорема 11. В задаче (6.1) с центром тяжести, расположенным близ главной плоскости эллипсоида инерции, всегда существует однопараметрическое от h семейство СПД колебаний, близких к плоским.

Доказательство. В случае $y_0 \neq 0$ в обратимой механической системе (6.1) имеем $l = n = 3$, $m = 2$, $k = 1$. По теореме 5 в типичной ситуации имеем однопараметрическое семейство СПД (постоянная в геометрическом интеграле фиксирована).

Определение 3. Маятниковыми колебаниями тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой называется однопараметрическое от постоянной энергии h семейство симметричных периодических движений, связывающее верхнее и нижнее положения равновесия.

Из теоремы 11 следует, что маятниковые колебания – самые общие СПД задачи; эти движения реализуются как в случае $y_0 = 0$ (колебания Млодзеевского), так и в общем случае. В случае Эйлера – Пуансо указанные колебания вырождаются в положения рав-

новесия. В остальных классических случаях интегрируемости эти СПД содержат шесть нулевых ХП.

Теорема 12. В типичной ситуации задача (6.1) не имеет дополнительного к классическим первого интеграла.

Доказательство. Маятниковые колебания – самые общие СПД тела, поэтому доказательство следует из теоремы 8.

Замечание. В типичной ситуации маятниковые колебания содержат, как и в случае $y_0 = 0$, два простых нулевых ХП плюс два нулевых ХП, образующих жорданову клетку, и два ненулевых ХП противоположного знака.

Теорема 12 для случаев, близких к интегрируемым, известна [4] (см. также [13–16]). Вопрос о несуществовании дополнительного интеграла для других случаев оставался неисследованным. Найденный интеграл [17] в близкой задаче показывает интерес к проблеме. Из характеристики типичной ситуации следует, на каком множестве параметров можно искать дополнительные первые интегралы.

Отметим, что часть результатов разд. 6 анонсирована [18].

7. Квазилинейная система. При переходе в окрестность СПД получаем задачу об исследовании квазилинейной системы. Ниже на примере системы второго порядка приведем результаты по колебаниям в вырожденных случаях, полученные на основе общих теоретических результатов, приведенных ранее [2, 19].

Рассмотрим семейство систем

$$\dot{u} = \xi v + \mu U_1(\mu, u, v, t), \quad \dot{v} = \eta u + \mu V_1(\mu, u, v, t)$$

при $\xi = 0, 1$, $\eta = -1, 0, 1$.

Случай $\xi = 0, \eta = 1$. При $\mu = 0$ имеем семейство равновесий на оси v ($u = 0$). При $\mu \neq 0$ из точки $u = 0$, $v = 0$ рождается изолированное СПД (периодические возмущения) или равновесие (автономная система).

Случай $\xi = 1$, $\eta = -1$. Этот случай негрубый. В порождающей системе находим изохронные колебания, симметричные относительно множеств $M_1 = \{u, v : v = 0\}$ и $M_2 = \{u, v : u = 0\}$. При $\mu \neq 0$ перейдем к переменным амплитуда–угол: A, θ ($u = A\cos\theta$, $v = A\sin\theta$). Тогда

$$\dot{A} = \mu(U_1\cos\theta + V_1\sin\theta), \quad \dot{\theta} = -1 + \frac{\mu}{A}(-U_1\sin\theta + V_1\cos\theta)$$

Видно, что при малых $\mu \neq 0$ угол θ меняется монотонно, поэтому в случае автономной системы получим семейство СПД, близкое к семейству изохронных колебаний. Параметром семейства может служить период движения.

Для периодической системы воспользуемся амплитудным уравнением [19]

$$\int_0^\pi [-U_1(0, A\cos t, -A\sin t, t)\sin t + V_1(0, A\cos t, -A\sin t, t)\cos t]dt = 0$$

простой корень $A = A^*$ которого гарантирует существование изолированного СПД.

Случай $\xi = \eta = 0$. Здесь простой корень $u^0 = u^*$ амплитудного уравнения

$$\int_0^\pi V_1(0, u^*, 0, t)dt = 0 \tag{7.1}$$

обеспечивает [19] существование изолированного СПД. Отметим, что в случае возмущений U_1, V_1, зависящих от времени, случаи $\xi = 1$, $\eta = -1$ и $\xi = \eta = 0$ приводятся один к другому.

Случай $\xi = 1$, $\eta = 0$. При $\mu = 0$ имеем семейство равновесий, лежащих на оси u. В случае $\mu \neq 0$ простой корень уравнения (7.1) гарантирует существование СПД в виде цикла.

8. Обыкновенные и критические точки семейства СПД. Главный резонанс. На семействе СПД период $T(h)$ зависит от параметра h, причем

$$\dim h = q, \quad h = (h_*, h_{**}), \quad \partial T/\partial h_* = 0, \quad \partial T/\partial h_{**} \neq 0$$

В типичной ситуации имеем $\dim h_* = l - n + k$, $\dim h_{**} = 1$.

Определение 4. Точка h семейства СПД называется обыкновенной, если $\dim h_*(h) = l - n + k$, и критической, если $\dim h_*(h) > l - n + k$.

Теорема 6 о грубости свойства иметь СПД доказана для обыкновенных точек. В простейшем случае системы (1.1), когда $l = n = 1$, периодическое возмущение в обыкновенной точке всегда инициирует рождение цикла, отличающего от порождающего СПД на величину возмущения [20]. Здесь при переходе в окрестность СПД возникает случай $\xi = 0$, $\eta = 1$ (разд. 7).

Ниже рассмотрим систему (1.1), когда $l = n = 1$, $m \geq 0$, $k = 0$, $q = 1$, и покажем, какой сценарий колебаний возможен для критической точки.

Очевидно, при переходе в фазовом пространстве от одного к другому СПД семейства производная T_h' может обратиться в нуль: возникает критическая точка. В линейной системе $dT(h) \equiv 0$. Критические точки в нелинейной системе – исключение. Правило – существование обыкновенных точек.

В критической точке решение (4.1) – периодическое и реализуется аналог случая $\xi = 1$, $\eta = -1$ (разд. 7). При действии 2π-периодических возмущений μU_1, μV_1 здесь возникает главный резонанс.

Перейдем в окрестность СПД и положим

$$u = \varphi(h^*, t) + x, \quad \upsilon = \psi(h^*, t) + y$$

Воспользуемся непрерывной по μ нормальной формой [21]. В комплексно-сопряженных переменных w, $\bar{w}$ (выделена нужная система второго порядка) имеем

$$\dot{w} = i(C_{20}w^2 + C_{11}w\bar{w} + C_{02}\bar{w}^2) + i\mu a_0$$

(C_{kj}, a_0 – действительные коэффициенты). Теперь после перехода

$$w = \mu r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu^{1/2}(C_-\sin\theta + C_{11}\sin 3\theta)r^2 \\ \dot{\theta} &= \mu^{1/2}[(C_+\cos\theta + C_{11}\cos 3\theta)r + a_0/r] \\ (C_\pm &= C_{20} \pm C_{02}) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Система (1.1) допускает семейство СПД. То же самое справедливо для системы в переменных x, y, поэтому в нормальной форме (8.1) должно выполняться равенство

$$C_+ + C_{11} = 0 \tag{8.2}$$

Система амплитудных уравнений [19] выводится здесь из условий

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 0$$

Видно, что система не имеет корней, для которых $\sin\theta = 0$. С другой стороны, с учетом равенства (8.2) найдем два простых корня $(r_0, \pm\theta_0)$

$$r_0^2 = \frac{a_0}{2(C_{02} - C_{20})\cos\theta_0}, \quad 1 - 2\sin^2\theta_0 = \frac{C_{02}}{C_{20}}, \quad \sin\theta_0 \neq 0 \tag{8.3}$$

Поэтому справедлив следующий результат.

Теорема 13. В критической точке семейства СПД возникает главный резонанс. Здесь происходит бифуркация: СПД исчезает, но рождаются два несимметричных цикла (8.3) с амплитудой колебаний порядка $\mu^{1/2}$.

Автор благодарит В.В.Румянцева за постоянный интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00068) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-6667. 2006.1)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 131–146.
2. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
3. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. V. 1. Paris: Gauthie-Villars, 1892 = *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
4. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
5. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.А., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
7. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этногр. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
8. *Grioli G.* Esistensa e determinazione della precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante assimetrico // Ann. mat. pura ed appl. 1947. Ser. 4. V. 26. Facs. 3–4. P. 271–281.
9. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
10. *Тхай В.Н.* Периодические движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, близкие к регулярным прецессиям Гриоли // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2000. Ч. 1. С. 60–67.
11. *Гуляев М.П.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1955. № 3. С. 15–21.
12. *Тхай В.Н., Швыгин А.Л.* Об устойчивости вращений вокруг горизонтальной оси тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2000. Ч. 2. С. 149–157.
13. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
14. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I.II. // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41; 1983. Т. 17. Вып. 1. С. 8–23.

15. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. I.II.// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 6. С. 73–81; 1986. № 1. С. 39–44.
16. *Довбыш С.А.* Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 3. С. 70–77.
17. *Соколов В.В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теорет. и мат. физика. 2001. Т. 129. № 1. С. 31–37.
18. *Тхай В.Н.* Семейства симметричных периодических движений в задаче Эйлера // Докл. АН. 2005. Т. 401. № 4. С. 483–485.
19. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 335–371.
20. *Тхай В.Н.* Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 813–834.
21. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.

Москва
e-mail: tkhai@ipu.rssi.ru

Поступила в редакцию
4.X.2005