УДК 531.36:534.1

© 2006 г. А. С. Андреев, О. А. Перегудова

К МЕТОДУ СРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуется задача об устойчивости невозмущенного движения неавтономной системы на основе уравнений сравнения. Выводится принцип квазиинвариантности положительного предельного множества возмущенного движения, позволяющий установить новую форму достаточных условий устойчивости невозмущенного движения с применением знакоопределенных и знакопостоянных векторных функций Ляпунова. Решаются задачи об условиях устойчивости неустановившихся и стабилизации программных движений механических систем.

1. Основные предположения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{1.1}$$

где $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = (X^1(t, \mathbf{x}), \ldots, X^n(t, \mathbf{x}))^T$ – вектор-функция, определенная в области

$$\Gamma = R^+ \times G = \{(t, \mathbf{x}) : t \geq 0, \|\mathbf{x}\| < \nu, \nu = \text{const} > 0 \text{ или } \nu = +\infty\}$$

$\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^n.

Предположим, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$ равномерно относительно t, т.е. для любого компакта $K \subset G$ существует число $L = L(K)$, такое, что для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ и любого $t \in R^+$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \tag{1.2}$$

Тогда семейство сдвигов

$$\{\mathbf{X}_\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t + \tau, \mathbf{x}), \tau \in R^+\}$$

будет предкомпактно в некотором компактном метрическом пространстве F. При этом для системы (1.1) можно построить семейство предельных систем в соответствии со следующим определением.

Определение 1 [1]. Функция $\mathbf{X}^*(t, \mathbf{x})$, задаваемая для определенной последовательности $t_j \to +\infty$ соотношением

$$\mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \lim_{j \to \infty} \int_0^t \mathbf{X}_j(\tau, \mathbf{x}) d\tau, \quad (t, \mathbf{x}) \in R \times G; \quad \mathbf{X}_j(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t_j + \tau, \mathbf{x}) \tag{1.3}$$

называется предельной к $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$. Система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}) \tag{1.4}$$

называется предельной к исходной системе (1.1).

В зависимости от последовательности $t_j \to +\infty$ системе (1.1) соответствует целое семейство предельных систем (1.4), где $\mathbf{X}^* \in F$. При этом положительное предельное множество $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ решения $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), определяемое по формуле

$$\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0) = \{\mathbf{p} \in G : \exists t_k \to +\infty, \mathbf{x}(t_k, t_0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{p}\}$$

квазиинвариантно относительно семейства систем (1.4) [1, 2].

Введем класс $\mathbb{K}_1$ векторных функций

$$\mathbf{V} = (V^1, V^2, \ldots, V^k)^T, \quad \mathbf{V} : \Gamma \to R^k$$

R^k – k-мерное пространство с нормой $\|\cdot\|_k$, ограниченных, равномерно непрерывных на каждом множестве $R \times K$ таким образом, что для любого компакта $K \subset G$ существует число $m = m(K) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такие, что

$$\|\mathbf{V}(t, \mathbf{x})\|_k \le m, \quad \|\mathbf{V}(t_2, \mathbf{x}_2) - \mathbf{V}(t_1, \mathbf{x}_1)\|_k < \varepsilon$$

для всех $(t, \mathbf{x}) \in R \times K$, $(t_1, \mathbf{x}_1)$, $(t_2, \mathbf{x}_2) \in R \times K$, удовлетворяющих неравенствам $|t_2 - t_1| < \delta$, $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| < \delta$.

Для каждой функции $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$ семейство сдвигов

$$\{\mathbf{V}_\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t + \tau, \mathbf{x}), \tau \in R^+\}$$

будет предкомпактно в некотором функциональном метризуемом пространстве F_υ непрерывных функций $\mathbf{V} : \Gamma \to R^k$ с открытокомпактной топологией [3]. Таким образом, для любой последовательности $t_l \to +\infty$ найдутся подпоследовательность $t_{l_j} \to +\infty$ и функция $\mathbf{V}^* \in F_\upsilon$ такие, что последовательность сдвигов

$$\{\mathbf{V}_j(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t_{l_j} + t, \mathbf{x})\}$$

будет сходиться к $\mathbf{V}^*(t, \mathbf{x})$ в пространстве F_υ, а именно: сходимость будет равномерной по $(t, \mathbf{x}) \in [-\beta, \beta] \times K$ для каждого числа $\beta > 0$ и каждого компактного множества $K \subset G$.

Введем также аналогичные классы $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_3$ векторных функций

$$\mathbf{U} : R \times R^k \to R^k \quad \text{и} \quad \mathbf{W} : R \times G \times R^k \to R^k$$

ограниченных и равномерно непрерывных по $(t, \mathbf{u}) \in R \times K_2$ и $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in R \times K_1 \times K_2$ для любых компактных множеств $K_1 \subset G$ и $K_2 \subset R^k$. При этом дополнительно будем считать, что каждая функция $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$ непрерывно дифференцируема по $\mathbf{u}$.

Соответственно для каждой из функций $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$, $\mathbf{W} \in \mathbb{K}_3$ могут быть построены семейства предельных функций $\{\mathbf{V}^*\}$, $\{\mathbf{U}^*\}$, $\{\mathbf{W}^*\}$. А для определенных последовательностей $t_j \to +\infty$ могут быть найдены предельные совокупности $\{(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)\}$.

2. Задача о локализации положительного предельного множества $\omega^+(\mathbf{t_0}, \mathbf{x_0})$. Рассмотрим задачу о предельном поведении решения системы (1.1) на основе применения непрерывно дифференцируемой вектор-функции Ляпунова $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$ [4].

Пусть для системы (1.1) существует функция $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, $\mathbf{V} \in C^1$, $\mathbf{V}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, производная которой, в силу этой системы, представима в виде

$$\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{V}(t, \mathbf{x})) + \mathbf{W}(t, \mathbf{x}, \mathbf{V}(t, \mathbf{x})), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \tag{2.1}$$

где функция $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{u})$, $\mathbf{U} \in \mathbb{K}_2$, – квазимонотонная и непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{u} \in R^k$, $\partial\mathbf{U}/\partial\mathbf{u} \in \mathbb{K}_2$, функция $\mathbf{W} \in \mathbb{K}_3$, $\mathbf{W}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \le \mathbf{0}$ для любых $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in R \times G \times R^k$.

Из представления (2.1) следует, что $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ – вектор-функция сравнения, а система

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(t, \mathbf{u}) \tag{2.2}$$

будет системой сравнения [4].

Если $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ – функция, удовлетворяющая уравнению (2.1), при этом $\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{V}_0$, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0)$ – решение системы (2.2), определенное на интервале $[t_0, t_0 + \beta)$, $\beta > 0$, то на решении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) выполняется неравенство [4]

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \le \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \beta)$$

Из условия $\mathbf{U} \in K_2$ следует, что система (2.2) предкомпактна [1, 2] и для нее можно определить семейство предельных систем сравнения

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}^*(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{U}^* \in F_u \tag{2.3}$$

Из условий относительно правой части $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{u})$ системы (2.2) следует, что решения этой системы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)$ непрерывно дифференцируемы по $(t_0, \mathbf{u}_0) \in R^+ \times R^k$. Из свойства неубывания зависимости $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)$ по $\mathbf{u}_0$ [4] следует, что матрица

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0) = \frac{\partial \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\mathbf{\Phi}(t_0, t_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – единичная матрица), фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(t, t_0, \mathbf{u}_0)\mathbf{y}, \quad \mathbf{H} = \left.\frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{u}_0)}$$

В дальнейшем будем полагать, что система сравнения (2.2) такова, что матрица $\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0)$ имеет свойство: для любого компакта $K \in R^k$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K) > 0$ такие, что для любых $(t, t_0, \mathbf{u}_0) \in R^+ \times R^+ \times K$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0)\| \le M(K), \quad \det\mathbf{\Phi}(t, t_0, \mathbf{u}_0) \ge \alpha(K) \tag{2.4}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ – какое-либо решение системы (1.1), ограниченное компактом $K_0 \subset G$, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in K_0$ для всех $t \ge t_0$, $\omega(t_0, \mathbf{x}_0)$ – положительное предельное множество этого решения.

Из равенства (2.1) на основании формулы В.М. Алексеева [5] получим следующее соотношение между значением

$$\mathbf{V}[t] = \mathbf{V}(t, \mathbf{x}[t]) = \mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0))$$

функции $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ на решении $\mathbf{x} = \mathbf{x}[t] = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ и решением

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[t] = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0)$$

системы сравнения (2.2):

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}[t]) = \mathbf{u}[t] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau, \mathbf{V}(\tau, \mathbf{x}[\tau])) \cdot \mathbf{W}(\tau, \mathbf{x}[\tau], \mathbf{V}(\tau, \mathbf{x}[\tau]))d\tau \tag{2.5}$$

Допустим, что функция $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве $R^+ \times K_0$ и решение системы (2.2) $\mathbf{u}[t]$ ограничено сверху для всех $t \geq t_0$. Тогда в соответствии с условиями (2.4) найдутся постоянные $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ такие, что

$$\beta_0 \geq \sum_{i=1}^{k} (u^i[t] - V^i[t]) \geq -\alpha_0 \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{t} W^j(\tau, \mathbf{x}[\tau], \mathbf{V}[\tau]) d\tau \geq 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{W}(t, \mathbf{x}[t], \mathbf{V}(t, \mathbf{x}[t])) = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Пусть $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ – предельная точка, определяемая последовательностью

$$\mathbf{x}(t_j, t_0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{p} \quad \text{при} \quad t_j \to +\infty$$

Выберем подпоследовательность $t_{j_l} \to +\infty$, для которой имеют место сходимости

$$\mathbf{X}(t_{j_l} + t, \mathbf{x}) \to \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(t_{j_l} + t, \mathbf{x}) \to \mathbf{U}^*(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{W}(t_{j_l} + t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \to \mathbf{W}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Аналогично указанным ранее предельным переходам [6] найдем, что равномерно по $t \in [-\beta, \beta]$ для каждого $\beta > 0$ имеют место сходимости

$$\mathbf{x}[t_{j_l} + t] \to \mathbf{x}^*[t], \quad \mathbf{u}[t_{j_l} + t] \to \mathbf{u}^*[t]$$

где $\mathbf{x}^*[t] = \mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{p})$, $\mathbf{u}^*[t] = \mathbf{u}^*(t, 0, \mathbf{u}_0^*)$, $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{V}^*(0, \mathbf{p})$ – соответствующие решения систем (1.4) и (2.3). При этом из соотношений (2.5) и (2.6) получаем

$$\mathbf{V}^*(t, \mathbf{x}^*[t]) = \mathbf{u}^*[t], \quad \mathbf{W}^*(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{V}^*[t]) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in R$$

Тем самым, имеем следующую теорему.

Теорема 1. Предположим, что

1) существует вектор-функция Ляпунова $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, удовлетворяющая дифференциальному равенству (2.1);

2) решения системы сравнения (2.2) удовлетворяют условию (2.4);

3) решение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) ограничено некоторым компактом $K \subset \Gamma$ для всех $t \geq t_0$;

4) решение $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{V}_0)$ системы сравнения (2.2), где $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0)$, ограничено при всех $t \geq t_0$.

Тогда для любой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ найдется набор предельных функций $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$ такой, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{p})$ системы (1.4) с начальным условием $\mathbf{x}^*(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{x}^*(t, \mathbf{p}) \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{x}^*(t, \mathbf{p}) \in \{\mathbf{V}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t)\} \cap \{\mathbf{W}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}\}, \quad \forall t \in R$$

где $\mathbf{u}^*(t)$ – решение предельной системы сравнения (2.3) с начальным условием $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{V}^*(0, \mathbf{p})$.

Доказанная теорема представляет собой теорему о локализации положительного предельного множества на основе вектор-функции Ляпунова и системы сравнения. Она является развитием принципа инвариантности Ла-Салля для автономной системы [7] и принципа квазиинвариантности для неавтономной системы на основе скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной [2].

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\exp(-t) + x_2\sin t - (x_1^3 + x_1x_2^2)x_3^2\sin^2 t \\ \dot{x}_2 &= x_1\sin t + x_2\exp(-t) - (x_1^2x_2 + x_2^3)x_3^2\sin^2 t \\ \dot{x}_3 &= -\frac{\dot{p}(t)}{2p(t)}x_3 + x_4, \quad \dot{x}_4 = -p(t)x_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $p(t)$, $0 < p_0 \le p(t) \le p_1$, – некоторая непрерывная функция. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = (V^1, V^2, V^3)^T; \quad V^1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2, \quad V^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2, \quad V^3 = p(t)x_3^2 + x_4^2$$

Используя теорему 1, можно найти, что каждое решение $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ системы (2.7), для которого $x_3(t) \not\equiv 0$, имеет свойство

$$x_1(t) \to 0, \quad x_2(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty$$

а каждое иное решение, для которого $x_3(t) = x_4(t) \equiv 0$, имеет свойство вида

$$(x_1(t) + x_2(t)) \to \alpha\exp(-\cos t), \ (x_1(t) - x_2(t)) \to \beta\exp(\cos t) \ \text{ при } \ t \to +\infty$$

Здесь α и β – некоторые постоянные.

3. Теорема об асимптотической устойчивости. Определим скалярную функцию

$$\bar{V}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} V^i(t, \mathbf{x}) \ \text{ или } \ \bar{V}(t, \mathbf{x}) = \max\{V^1(t, \mathbf{x}), V^2(t, \mathbf{x}), \ldots, V^k(t, \mathbf{x})\}$$

На основании теоремы 1 можно получить следующий результат, развивающий теорему об асимптотической устойчивости из [4].

Теорема 2. Предположим, что существует определенно-положительная вектор-функция Ляпунова $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$, такая, что

1) справедливо дифференциальное равенство (2.1);

2) нулевое решение $\mathbf{u} = 0$ системы сравнения (2.2) равномерно устойчиво;

3) на каждом ограниченном решении системы сравнения (2.2) выполнено условие (2.4);

4) для любой предельной совокупности $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$ и каждого ограниченного решения $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t) \ne 0$ предельной системы сравнения (2.3) множество

$$\{\mathbf{V}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t)\} \cap \{\mathbf{W}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}\}$$

не содержит решений предельной системы (1.4).

Тогда нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Условия *1* и *2* обеспечивают равномерную устойчивость нулевого решения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1). Свойство притяжения решений системы (1.1) к точке $\mathbf{x} = 0$ следует из теоремы 1.

Докажем, что решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) является притягивающим равномерно по $(t_0, \mathbf{x}_0)$, т.е. найдется положительное число $\Delta > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \ge 0$ найдется не зависящее от t_0 число $T = T(\varepsilon)$, такие, что

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0 + T, +\infty), \quad \|\mathbf{x}_0\| < \Delta$$

Предположим противное: можно найти числа $\Delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для любой последовательности $T_k \to +\infty$ найдется последовательность $(t_k, \mathbf{x}_k)$, $t_k \geq 0$, $\|\mathbf{x}_k\| < \Delta_0$, такая, что

$$\|\mathbf{x}(t_k + T_k, t_k, \mathbf{x}_k)\| \geq \varepsilon_0$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$t_k \to +\infty, \quad \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0^* \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

и последовательность $t_k \to +\infty$ определяет предельную совокупность $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$, поскольку иначе в качестве t_k можно взять $t_k + T_k/2$, а в качестве $\mathbf{x}_k$ взять $\mathbf{x}(t_k + T_k/2, t_k, \mathbf{x}_k)$ и перейти, в случае необходимости, к сходящимся подпоследовательностям.

Выберем число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0$ из условия равномерной устойчивости нулевого решения системы (1.1). Тогда

$$\|\mathbf{x}(t + t_k, t_k, \mathbf{x}_k)\| \geq \delta_0 > 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

Перейдя в неравенстве (3.1) к пределу при $t_k \to +\infty$, получим

$$\|\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{x}_0^*)\| \geq \delta_0 > 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

Пусть $\mathbf{x}_0^{**}$ – положительная предельная точка этого решения, определяемая некоторой последовательностью $t_m \to +\infty$. Без ограничения общности будем считать, что последовательность $t_m \to +\infty$ определяет предельную совокупность $(\mathbf{X}^{**}, \mathbf{V}^{**}, \mathbf{U}^{**}, \mathbf{W}^{**})$. В силу условия *4* теоремы $\mathbf{x}^{**}(t, 0, \mathbf{x}_0^{**}) \equiv 0$. Получили противоречие с неравенством (3.2), которое и доказывает, что решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) является притягивающим равномерно по $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия механической системы с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(t, x)\dot{x} + g(t, x) = 0 \tag{3.3}$$

Предположим, что непрерывные функции $f(t, x)$, $g(t, x)$ таковы, что выполняются условия

$$\begin{aligned} &0 < f_1 \leq f(t, x) \leq f_2 < +\infty, \quad t \geq 0, \quad x \in R \\ &0 < g_1 x^2 \leq x g(t, x) \leq g_2 x^2, \quad t \geq 0, \quad x \neq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

С помощью замены

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + 2\dot{x}/f_1$$

уравнение (3.3) можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2} f_1 x_1 + \frac{1}{2} f_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left[-\frac{1}{2} f_1 + f(t, x_1) - 2\frac{g(t, x_1)}{f_1 x_1}\right] x_1 + \left[\frac{1}{2} f_1 - f(t, x_1)\right] x_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Возьмем вектор-функцию Ляпунова в виде $V = (|x_1|, |x_2|)^T$, тогда получим систему сравнения

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{1}{2}f_1u_1 + \frac{1}{2}f_1u_2 \\ \dot{u}_2 &= \left|-\frac{1}{2}f_1 + f(t, x_1(t)) - 2\frac{g(t, x_1(t))}{f_1x_1(t)}\right|u_1 + \left[\frac{1}{2}f_1 - f(t, x_1(t))\right]u_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Нулевое решение $u_1 = u_2 = 0$ системы (3.6) будет равномерно устойчиво, если

$$2g_2 \le f_1^2 \tag{3.7}$$

Применяя теорему 2, получаем, что условие (3.7) является также условием равномерной асимптотической устойчивости в целом нулевого положения равновесия системы (3.3). Действительно, множество $\{\bar{V} = \text{const}\}$ не содержит решений предельной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}f_1x_1 + \frac{1}{2}f_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left[-\frac{1}{2}f_1 + f^*(t, x_1) - 2\frac{g^*(t, x_1)}{f_1x_1}\right]x_1 + \left[\frac{1}{2}f_1 - f^*(t, x_1)\right]x_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

кроме нулевого $x_1 = x_2 = 0$. Здесь $\bar{V} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Полученный результат проиллюстрируем на примере решения задачи о стабилизации нестационарного движения физического маятника [8].

Пусть заданное движение $\theta = \theta_0(t)$ маятника создается регулируемой скоростью $\omega(t)$ его вращения вокруг вертикальной оси. Уравнение движения маятника при учете сил вязкого трения имеет вид

$$A\ddot{\theta} = -(mgz_0 + (C - B)\omega^2(t)\cos\theta)\sin\theta - f(t, \theta, \dot{\theta})$$

Введем отклонение $x = \theta - \theta_0(t)$ истинного движения от программного и допустим, что существуют постоянные f_1, f_2 такие, что

$$0 < f_1 \le f(t, \theta, \dot{\theta})/\dot{\theta} \le f_2 < +\infty, \quad \forall\dot{\theta} \ne 0$$

Уравнения возмущенного движения можно представить в виде (3.3), где

$$\begin{aligned} f(t, x)\dot{x} &= f(t, \theta_0(t) + x, \dot{\theta}_0(t) + \dot{x}) - f(t, \theta_0(t), \dot{\theta}_0(t)) \\ g(t, x) &= p(t, x)\partial S(x)/\partial x, \quad S(x) = 4(1 - \cos(x/2)) \\ p(t, x) &= A^{-1}(mgz_0\cos(\theta_0(t) + x/2) + (C - B)\omega^2(t)\cos(2\theta_0(t) + x)\cos(x/2)) \end{aligned}$$

Из неравенства (3.7) находим достаточные условия равномерно асимптотической устойчивости движения $\theta = \theta_0(t)$

$$p(t, 0) = A^{-1}(mgz_0\cos(\theta_0(t)) + (C - B)\omega^2(t)\cos(2\theta_0(t))) \ge p_0 = \text{const} > 0, \ \forall t \ge 0$$

и, кроме того,

$$2p(t, 0) \le f_1^2/A^2, \quad \forall t \ge 0$$

Они представляют собой условие определенной положительности второй вариации приведенной потенциальной энергии маятника на движении $\theta_0(t)$ и условие ее ограниченности сверху значением $f_1^2/(2A^2)$.

Пример 3. Предположим, что твердое тело, закрепленное в центре масс O, с главными центральными осями OX, OY, OZ под действием момента

$$M_x = M_x(t), \quad M_y = M_z = 0$$

совершает программное движение

$$p = p_0(t), \quad q = r = 0 \tag{3.9}$$

вокруг наибольшей оси инерции OX ($A < B < C$), где p, q, r – проекции угловой скорости на оси $OXYZ$.

Рассмотрим задачу о стабилизации движения (3.9) управляющими моментами M_1, M_2, M_3 относительно осей OX, OY, OZ вида

$$M_1 = -\alpha x, \quad M_2 = -\alpha_1 y + \alpha_2 z, \quad M_3 = \alpha_3 y - \alpha_4 z$$

α и α_i ($i = 1, \ldots, 4$) – некоторые постоянные. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= (B - C)yz + M_1 \\ B\dot{y} &= (C - A)(x + p_0(t))z + M_2 \\ C\dot{z} &= (A - B)(x + p_0(t))y + M_3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем вектор-функцию

$$V = (V_1, V_2)^T; \quad V_1 = |x|, \quad V_2 = (B - A)By^2 + (C - A)Cz^2$$

Находим систему сравнения

$$\dot{u}_1 = -\alpha u_1 + k u_2, \quad k = \text{const} > 0$$

$$\dot{u}_2 = M u_2$$

При выполнении условия

$$M = \max\left\{\frac{1}{B}\left(-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\frac{C - A}{B - A}\right), \frac{1}{C}\left(-2\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2\frac{B - A}{C - A}\right)\right\} \le 0$$

система сравнения будет устойчивой. На основе теоремы 2 получим, что нулевое решение системы (3.10) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

4. Знакопостоянные вектор-функции Ляпунова. Аналогично описанному ранее подходу [6, 9] введем следующие определения.

Определение 2. Нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности ($\mathbf{X}^*$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{U}^*$, $\mathbf{W}^*$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}^*(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < \delta\} \cap \{\bar{V}^*(0, \mathbf{x}) = 0\} \cap \{\mathbf{W}^*(0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}\}$$

системы (1.4) выполняется условие

$$\|\mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$, если оно устойчиво, а также найдется число $\Delta > 0$, при котором для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}^*(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < \Delta\} \cap \{\bar{V}^*(0, \mathbf{x}) = 0\} \cap \{\mathbf{W}^*(0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}\}$$

системы (1.4) выполняется условие

$$\|\mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T$$

Определение 3. Нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) относительно множества $\{\bar{V}^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)\}$, если число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ в определении 2 не зависит (числа $\Delta > 0$ и $T = T(\varepsilon) > 0$ в определении 2 не зависят) от выбора $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$.

Теорема 3. Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$$

такая, что выполнены условия *1–3* теоремы 2, а также следующее условие (условие *A*): нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)\}$.

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Докажем, что решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) устойчиво. Предположим, что это не так. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $t_0 \geq 0$ и две последовательности $\tau_j \to +\infty$ и $\mathbf{x}_j^0 \to 0$ такие, что

$$\|\mathbf{x}(\tau_j, t_0, \mathbf{x}_j^0)\| = \varepsilon_0 \tag{4.1}$$

В силу непрерывности решений системы (1.1) и условия (4.1) для любого числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, найдется последовательность $t_j \to +\infty$ такая, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t_j, t_0, \mathbf{x}_j^0)\| = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 < \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_j^0)\| < \varepsilon_0 \quad \text{при всех} \quad t \in (t_j, \tau_j) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Обозначим $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_j, t_0, \mathbf{x}_j^0)$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(t + t_j, t_j, \mathbf{x}_j)$, $t \geq 0$, системы (1.1). Без ограничения общности будем считать, что последовательность $t_j \to +\infty$ такова, что $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}_0^*$ при $j \to +\infty$ и $t_j \to +\infty$ определяет предельную совокупность $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)$. Тогда последовательность решений $\mathbf{x}(t + t_j, t_j, \mathbf{x}_j)$ системы (1.1) сходится к решению $\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{x}_0^*)$ предельной системы (1.4) равномерно по $t \in [-\beta; \beta]$ ($\beta > 0$ – произвольное число).

Из неравенств

$$0 \le \bar{V}(t_j, \mathbf{x}_j) \le \sum_{i=1}^{k} u^i(t_j, t_0, \mathbf{u}_j^0), \quad \mathbf{u}_j^0 = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_j^0) \tag{4.3}$$

и условия устойчивости нулевого решения $\mathbf{u} = 0$ системы сравнения (2.2) получим, что справедливо соотношение

$$\bar{V}^*(0, \mathbf{x}_0^*) = 0 \tag{4.4}$$

Докажем, что $\tau_j - t_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Предположим, что это не так, т.е. существует число $\tau = \tau(\varepsilon_1) > 0$ такое, что $\tau_j - t_j \le \tau(\varepsilon_1)$. Тогда, с одной стороны, найдется момент $t_1 \in [0, \tau]$ такой, что

$$\|\mathbf{x}^*(t_1, 0, \mathbf{x}_0^*)\| = \varepsilon_0 \tag{4.5}$$

а с другой стороны, в силу условия A теоремы, для $\varepsilon = \varepsilon_0/2 > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \ge 0$$

Положим $\varepsilon_1 = \delta$, тогда будет выполнено неравенство $\|\mathbf{x}^*(t_1, 0, \mathbf{x}_0^*)\| < \varepsilon_0/2$, которое противоречит равенству (4.5). Полученное противоречие доказывает, что $\tau_j - t_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. В силу условия A теоремы найдется число $\Delta_1 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $T = T(\varepsilon)$ такие, что при всех $t \ge T$ и $\mathbf{x}_0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta_1$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \tag{4.6}$$

Положим $\varepsilon_1 = 3\Delta_1/2$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$, тогда при всех $t \ge 0$ будет справедливо неравенство $\|\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{x}_0^*)\| \ge \varepsilon_1$, противоречащее неравенству (4.6). Таким образом, устойчивость нулевого решения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) доказана.

Доказательство равномерной устойчивости этого решения проводится по аналогичной схеме. Предположим, что решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) не является равномерно устойчивым. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $t_0 \ge 0$ и три последовательности $\tau_j \to +\infty$, $t_0^j \in R^+$ и $\mathbf{x}_j^0 \to 0$, такие, что справедливо равенство (4.1) при замене t_0 на t_0^j. При этом справедливы соотношения (4.2) при замене t_0 на t_0^j. Обозначая $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_j, t_0^j, \mathbf{x}_j^0)$ и рассматривая решение $\mathbf{x}(t + t_j, t_j, \mathbf{x}_j)$, $t \ge 0$, системы (1.1), повторяем предыдущие рассуждения. При этом справедливость равенства (4.4) следует из соотношений, отличающихся от (4.3) заменой t_0 на t_0^j, условия равномерной устойчивости нулевого решения $\mathbf{u} = 0$ системы сравнения (2.2) и из условия $\mathbf{V} \in \mathbb{K}_1$. Дальнейшее доказательство повторяется без изменений.

Как продолжение теоремы 3 можно вывести следующий результат.

Теорема 4. Допустим, что в дополнение к условиям предыдущей теоремы множество

$$\{\mathbf{V}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t)\} \cap \{\mathbf{W}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}\}$$

не содержит решений системы (1.4) (здесь $\mathbf{u}^*(t) \ne 0$ – произвольное ограниченное решение предельной системы сравнения (2.3)).

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теоремы 3 и 4 развивают известные результаты [6, 9] для векторной функции Ляпунова.

Пример 4. В примере 3 допустим, что под действием момента относительно оси OX тело совершает программное движение (3.9) вокруг средней главной центральной оси инерции ($B < A < C$). Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения моментами

$$M_1 = -k_1 x, \quad M_2 = -k_2 y, \quad M_3 = -k_3 z$$

где k_1, k_2, k_3 – некоторые положительные постоянные. Уравнения возмущенного движения будут иметь вид (3.10). Обозначим

$$\lambda_1 = (C - A)/B, \quad \lambda_2 = (A - B)/C$$

В качестве функции Ляпунова выберем знакопостоянную функцию

$$V = \frac{1}{2}(\mu_1 y + \mu_2 z)^2 + \frac{1}{2}x^2; \quad \mu_1 = \sqrt{B(A-B)}, \quad \mu_2 = \sqrt{C(C-A)}$$

Вычисляя производную функции Ляпунова в силу линеаризованных уравнений возмущенного движения, получим дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \le \max\{\nu(t), -2k_1^0\} V$$

где

$$\nu(t) = -k_2^0 - k_3^0 + \sqrt{(k_2^0 - k_3^0)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 p_0^2(t)}, \quad k_1^0 = \frac{k_1}{A}, \quad k_2^0 = \frac{k_2}{B}, \quad k_3^0 = \frac{k_3}{C}$$

Используя теорему 4, условие стабилизации программного движения тела можно записать в виде

$$|p_0(t)| \le \sqrt{\frac{k_2^0 k_3^0}{\lambda_1\lambda_2}}, \quad t \ge 0; \quad |p_0^*(t)| \not\equiv \sqrt{\frac{k_2^0 k_3^0}{\lambda_1\lambda_2}}, \quad t \in R \tag{4.7}$$

где $p_0^*(t)$ – функция, предельная к $p_0(t)$.

Отметим, что в случае установившегося вращения ($p_0 = \text{const}$) условие (4.7) совпадает с условием, получаемым с помощью критерия Рауса – Гурвица.

Можно показать, что асимптотическая устойчивость неустановившегося вращения в примерах 3 и 4 будет экспоненциальной.

Авторы благодарят В.В. Румянцева за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00765) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-6667.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Different. Equat. 1977. V. 23. № 2. P. 216–223.
2. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
3. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1,2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 22. P. 254–269.

4. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. *А.А. Воронова, В.М. Матросова*. М.: Наука, 1987. 312 с.
5. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. *Андреев А.С., Бойкова Т.А.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика тв. тела. 2002. Вып. 32. С. 109–116.
7. *La Salle J.P., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. N.Y.: Acad. Press, 1961 = *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
8. *Андреев А.С., Бойкова Т.А.* Об устойчивости неустановившегося движения механической системы // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 678–686.
9. *Косов А.А.* О глобальной устойчивости неавтономных систем. I, II // Изв. вузов. Сер. Математика. 1997. № 7(422). С. 28–35; № 8(423). С. 33–42.

Ульяновск
e-mail: andreevas@ulsu.ru,
peregudovaoa@sv.ulsu.ru

Поступила в редакцию
25.III.2005