УДК 531.36

© 2006 г. А. В. Карапетян

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ КЛЕБША–ТИССЕРАНА: СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Обсуждаются вопросы существования и устойчивости инвариантных множеств в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле с квадратичным (по направляющим косинусам оси симметрии поля) потенциалом. Эта задача изоморфна задаче о движении свободного твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью, в однородной идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности [1, 2]. В частности, во втором случае Клебша интегрируемости задачи о движении тела в жидкости последняя изоморфна задаче Тиссерана о движении тела с неподвижной точкой в случае квадратичного потенциала специального вида [3], соответствующего спутниковому приближению потенциала сил ньютоновского притяжения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле с квадратичным потенциалом, соответствующим второму случаю Клебша [2]. Кинетическая энергия тела и потенциал имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{(123)} A_1\omega_1^2, \quad V = \frac{1}{2}\kappa^2\sum_{(123)} A_1\gamma_1^2$$

Здесь A_i ($A_1 < A_2 < A_3$) – главные моменты инерции тела, ω_i и γ_i – компоненты векторов угловой скорости и единичного вектора оси симметрии поля в главных осях инерции тела для неподвижной точки, κ^2 – постоянная, которую без уменьшения общности будем считать равной единице, выбирая соответствующую единицу измерения времени; $i = 1, 2, 3$, символ (123) означает циклическую перестановку индексов 1, 2, 3.

Уравнения движения тела в форме Эйлера–Пуассона

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)(\omega_2\omega_3 - \gamma_2\gamma_3) = 0, \quad \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0 \ (123) \tag{1.1}$$

допускают четыре первых интеграла

$$H = \frac{1}{2}\sum_{(123)} A_1(\omega_1^2 + \gamma_1^2) = h = \text{const}, \quad K = \sum_{(123)} A_1\omega_1\gamma_1 = k = \text{const}, \quad \Gamma = \sum_{(123)} \gamma_1^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$C = \sum_{(123)} (A_1^2\omega_1^2 - A_2A_3\gamma_1^2) = c = \text{const} \tag{1.3}$$

(энергии, площадей, геометрический и Клебша; ср. с [4]).

2. Инвариантные множества. Согласно модифицированной теории Рауса [5] критические множества одного из первых интегралов (1.2), (1.3) на фиксированных уровнях других первых интегралов соответствуют инвариантным множествам системы (1.1). Будем искать критические множества интеграла C на фиксированных уровнях интегралов

$H = h, K = k, \Gamma = 1$

Для этого введем функцию

$$2W = C - \lambda(H - h) - 2\mu(K - k) + \nu(\Gamma - 1)$$

где λ, μ, ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = A_1[(A_1 - \lambda)\omega_1 - \mu\gamma_1] = 0 \ (123) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = (\nu - \lambda A_1 - A_2 A_3)\gamma_1 - \mu A_1 \omega_1 = 0 \ (123) \tag{2.2}$$

К уравнениям (2.1), (2.2) следует добавить уравнения (1.2), которые представляют собой условия стационарности функции W по отношению к неопределенным множителям.

Полагая, что $\lambda \neq 0, A_1, A_2, A_3$, из уравнений (2.1) находим значения ω_i и, подставляя их в уравнения (2.2), считая, что $\gamma_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), заключаем, что

$$\nu = \lambda A_1 + A_2 A_3 + A_1(A_1 - \lambda)^{-1}\mu^2 \ (123)$$

откуда следует

$$\mu^2 = (\lambda - A_1)(\lambda - A_2)(\lambda - A_3)\lambda^{-1} \tag{2.3}$$

Таким образом, если

$$\lambda \in (-\infty, 0) \cup (A_1, A_2) \cup (A_3, +\infty) \tag{2.4}$$

(напомним, что $A_1 < A_2 < A_3$), то интеграл (1.3) на фиксированных уровнях интегралов (1.2) принимает стационарное значение на двумерных множествах вида

$$\omega_i = \lambda_i \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1) \tag{2.5}$$

где $\lambda_i = \mu(A_i - \lambda)^{-1}$, а $\mu = \mu(\lambda)$ определяется соотношением (2.3). Очевидно, если $\lambda < 0$ или $\lambda > A_3$, то все λ_i имеют один и тот же знак (соответственно совпадающий со знаком μ или ему противоположный), а если $\lambda \in (A_1, A_2)$, то λ_2 и λ_3 имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком μ, а λ_1 имеет противоположный знак. Далее без уменьшения общности будем считать, что $\mu > 0$ (случай $\mu < 0$ получается из предыдущего путем замены k на $-k$).

В общем случае двумерные множества (2.5) параметризованы величиной λ, которая, конечно, зависит от постоянных h и k интегралов энергии и площадей. Действительно, подставляя соотношения (2.5) в выражения первых двух интегралов (1.2) и учитывая третий интеграл, получим

$$\sum_{(123)} A_1\left[1 + \frac{\mu^2}{(\lambda - A_1)^2}\right]\gamma_1^2 = 2h, \quad \sum_{(123)} A_1 \frac{\mu}{\lambda - A_1}\gamma_1^2 = -k, \quad \sum_{(123)} \gamma_1^2 = 1 \tag{2.6}$$

Выражая из последних двух соотношений (2.6) γ_1^2 и γ_2^2 через γ_3^2 и k и подставляя результат в первое равенство (2.6), убеждаемся, что коэффициент при γ_3^2 тождественно обращается в нуль. При этом первое соотношение (2.6) принимает вид:

$$2h = \frac{\tilde{A}}{\lambda^2} - \frac{k}{\mu\lambda^2}[2\lambda^3 - (A_1 + A_2 + A_3)\lambda^2 + \tilde{A}]; \quad \tilde{A} = A_1 A_2 A_3 \tag{2.7}$$

Таким образом, инвариантные множества (2.5) образуют двухпараметрические семейства (при этом не следует забывать об условии (2.4)).

3. Динамика тела на инвариантных множествах. Подставляя выражения (2.5) в последнюю систему уравнений (1.1), получим

$$\dot{\gamma}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\gamma_2\gamma_3 = 0 \ (123) \tag{3.1}$$

(при этом первая система уравнений (1.1) выполняется тождественно).

Очевидно, уравнения (3.1) изоморфны уравнениям движения волчка Эйлера и допускают два интеграла

$$\Gamma = \sum_{(123)} \gamma_1^2 = 1 \tag{3.2}$$

$$L = \sum_{(123)} \lambda_1\gamma_1^2 = l = \frac{k-\mu}{\lambda} = l(h, k) = \text{const} \tag{3.3}$$

(значение постоянной l нетрудно получить, исключая из выражения для L переменные γ_1^2 и γ_2^2 с помощью первых двух соотношений (2.6) и учитывая соотношения (2.3) и (2.7)). Отметим, что при анализе уравнений (3.1) вместо интеграла (3.3) удобнее использовать интеграл

$$K_0 = \sum_{(123)} A_1\lambda_1\gamma_1^2 = k \tag{3.4}$$

который получается из интегралов (3.2) и (3.3) ($K_0 = \mu\Gamma + \lambda L$); его постоянная совпадает с постоянной k исходного интеграла площадей. Однако интеграл (3.4), конечно, зависит от постоянной h исходного интеграла энергии, поскольку в левую часть соотношения (3.4) входят постоянные λ_i, зависящие от λ, т.е. от k и h.

Таким образом, движение тела на инвариантных множествах описывается эллиптическими функциями времени

$$\omega_i = \lambda_i\gamma_i^0(t) \equiv \omega_i^0(t), \quad \gamma_i = \gamma_i^0(t), \quad i = 1, 2, 3$$

где $\gamma_i^0(t)$ ($i = 1, 2, 3$) – общее решение системы (3.1). Отметим, что в отличие от классической задачи Эйлера–Пуансо, для которой поверхности уровней ее интегралов всегда представляют собой эллипсоиды, в задаче (3.1) это имеет место только при $\lambda < 0$ или $\lambda > A_3$; при $\lambda \in (A_1, A_2)$ поверхности уровня интеграла (3.4) представляют собой при $k \neq 0$ двуполостный (при $k\mu < 0$) или однополостный (при $k\mu > 0$) гиперболоиды,а при $k = 0$ – конус.

Тем не менее совместные уровни первых интегралов (3.2) и (3.4) определяют (при учете соотношений (2.5)) одномерные инвариантные множества системы (1.1) при любых допустимых значениях постоянных h и k; они вырождаются в нульмерные инвариантные множества при $2h = A_i + k^2/A_i$ ($i = 1, 2, 3$), соответствующие перманентным вращениям тела вокруг главных осей инерции.

4. Устойчивость инвариантных множеств. Вычислим вторую вариацию функции W:

$$2\delta^2 W = -\sum_{(123)} \tilde{A}_1 u_1^2; \quad u_1 = \delta(\omega_1 - \lambda_1\gamma_1), \quad \tilde{A}_1 = A_1(\lambda - A_1) \ (123) \tag{4.1}$$

Согласно модифицированной теории Рауса инвариантные множества (2.5), (3.4) устойчивы, если квадратичная форма (4.1) знакоопределена на линейном многообразии $\delta H = \delta K = \delta\Gamma = 0$, которое определяется соотношениями

$$\sum_{(123)} A_1\gamma_1^0(t)(\lambda_1\delta\omega_1 + \delta\gamma_1) = 0, \quad \sum_{(123)} A_1\gamma_1^0(t)(\delta\omega_1 + \lambda_1\delta\gamma_1) = 0, \quad \sum_{(123)} \gamma_1^0(t)\delta\gamma_1 = 0 \tag{4.2}$$

Выражая из последних двух соотношений (4.2) $\gamma_1^0(t)\delta\gamma_1$ и $\gamma_2^0(t)\delta\gamma_2$ через $\gamma_3^0(t)\delta\gamma_3$ и $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ и подставляя полученные выражения в первое соотношение (4.2), находим соотношение, которое содержит только u_1, u_2, u_3:

$$\sum_{(123)} B_1 u_1 = 0; \quad B_1 = A_1\tilde{B}_1\gamma_1^0(t), \quad \tilde{B}_1 = (A_3 + A_2 - A_1)\lambda^2 - 2A_2A_3\lambda + \tilde{A} \tag{4.3}$$

Очевидно, если $\lambda < 0$ или $\lambda > A_3$, то квадратичная форма (4.1) знакоопределена при любых u_1, u_2, u_3 (в частности, при u_1, u_2, u_3, удовлетворяющих соотношению (4.3)). Следовательно, инвариантные множества (2.5), (3.4), соответствующие $\lambda < 0$ или $\lambda > A_3$, устойчивы, поскольку доставляют интегралу (1.3) на фиксированных уровнях интегралов (1.2) экстремальные значения (см. также [4]).

Если $\lambda \in (A_1, A_2)$, то при произвольных u_1, u_2, u_3 квадратичная форма (4.1) знакопеременна. Покажем, что в зависимости от параметров задачи квадратичная форма (4.1) либо остается знакопеременной (при этом инвариантные множества неустойчивы [5]), либо становится знакоопределенной на многообразии (4.3) (при этом инвариантные множества устойчивы). Для этого вычислим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ B_3 & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \end{vmatrix} = \tilde{A}\sum_{(123)}(\lambda - A_1)(\lambda - A_2)A_3\tilde{B}_3^2(\gamma_3^0(t))^2 \tag{4.4}$$

Напомним, что функции $\gamma_i^0(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют системе (3.1), и, следовательно, соотношениям (3.2) и (3.4). Выражая из последних $\gamma_1^0(t)$ и $\gamma_2^0(t)$ через $\gamma_3^0(t)$ и k и подставляя полученные выражения в равенство (4.4), находим, что коэффициент при $(\gamma_3^0(t))^2$ обращается в нуль; в результате

$$\Delta = \tilde{A}[4\tilde{A}(\lambda - A_1)^2(\lambda - A_2)^2(\lambda - A_3)^2 - k\mu\lambda P(\lambda)]$$

$$P(\lambda) = \left[\sum_{(123)}(A_1^2 - 2A_2A_3)\right]\lambda^4 + \tilde{A}\left[12\lambda^3 - 6\lambda^2\sum_{(123)}A_1 + 4\lambda\sum_{(123)}A_2A_3 - 3\tilde{A}\right] \tag{4.5}$$

При этом $P(\lambda) > P_0 > 0$ при всех $\lambda \in (A_1, A_2)$. Действительно, рассмотрим функцию $Q(1/\lambda) = P(\lambda)/\lambda^4$. Очевидно,

$$dQ/d(1/\lambda) = 12\tilde{A}(\lambda - A_1)(\lambda - A_2)(\lambda - A_3)/\lambda^3 > 0, \quad \forall\lambda \in (A_1, A_2)$$

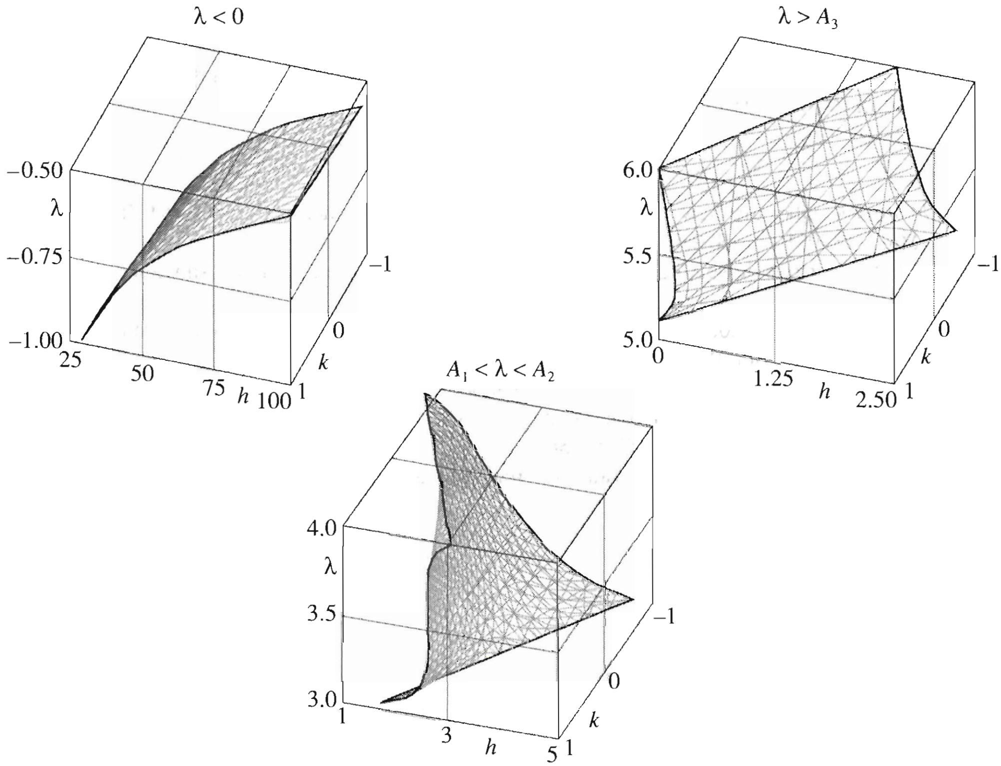
Следовательно, $Q(1/\lambda) > Q(1/A_2)$, т.е.

$$P(\lambda) > (A_1/A_2)^4 P(A_2) = A_1^4(A_2 - A_1)^2(A_2 - A_3)^2/A_2^2 > 0$$

Таким образом (напомним, что $\mu > 0$, $\lambda \in (A_1, A_2)$), определитель (4.5) больше нуля при всех $k \le 0$, меньше нуля при всех $k \ge k_0$, где k_0 – максимум функции

$$R(\lambda) = 4\tilde{A}(\lambda - A_1)(\lambda - A_2)(\lambda - A_3)\mu(\lambda)/P(\lambda)$$

на отрезке $\lambda \in [A_1, A_2]$, и всегда меняет знак на интервале $\lambda \in (A_1, A_2)$ при $k \in (0, k_0)$.



5. Геометрическая интерпретация. В пространстве (h, k, λ) инвариантные множества (2.5), (3.4) соответствуют поверхности $\lambda = \lambda(h, k)$, определяемой соотношением (2.7). Очевидно, при любом фиксированном значении k

$$dh/d\lambda = -\tilde{A}/\lambda^3 + k\mu P(\lambda)/[4\lambda^2(\lambda - A_1)^2(\lambda - A_2)^2(\lambda - A_3)^2]$$

Следовательно (см. выражение (4.5)),

$$\partial\lambda/\partial h = -4A_1A_2A_3\lambda^3(\lambda - A_1)^2(\lambda - A_2)^2(\lambda - A_3)^2/\Delta$$

Таким образом, устойчивым инвариантным множествам соответствуют участки поверхности (2.7), для которых $\lambda < 0$ или $\lambda > A_3$, а также те из участков этой поверхности, отвечающих $\lambda \in (A_1, A_2)$, на которых функция $\lambda(h, k)$ убывает с ростом h при фиксированном k (фигура). Неустойчивым инвариантным множествам соответствуют участки поверхности (2.7), отвечающие $\lambda \in (A_1, A_2)$, на которых функция $\lambda(h, k)$ возрастает с ростом h при фиксированном k.

В заключение заметим, что если вместо интеграла K_0 ввести интеграл

$$G = \rho\Gamma + \sigma L = g = \text{const}$$

где

$$g = -\Delta/(4\tilde{A}\mu^4\lambda^2) = g(\lambda(h, k)),\ \sigma = P(\lambda)/(4\tilde{A}\mu^2),\ \rho = \sigma\mu\lambda^{-1}$$

то устойчивые (неустойчивые) инвариантные множества, отвечающие $\lambda \in (A_1, A_2)$, соответствуют случаю, когда поверхность $G = g$ – двуполостный (однополостный) гиперболоид.

Автор благодарит Д.В. Трещева за обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00398, 05-01-00454).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flussigkeit // J. Reine und angew. Math. 1870. B. 71. S. 237–262.
2. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flussigkeit // Math. Annalen. 1870. Bd. 3. S. 238–262.
3. *Tisserand M.F.* Sur le mouvement des planètes autour du Soleil d'après la loi èlectrodynamique de Weber // C.R. Acad. Sci. Paris, 1872. V. 75. P. 760–763.
4. *Субханкулов Г.И.* Об устойчивости некоторых стационарных движений твердого тела в жидкости // Задачи устойчивости, управления, колебания. Сб. трудов 5-ой Четаевской конф. М.: ВЦ АН СССР, 1990. С. 50–56.
5. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.

Москва
e-mail: avkarap@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
16.III.2006