

УДК 531.391:62–50

© 2006 г. Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник, С. А. Кумакшев, С. В. Нестеров

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С ПОДВИЖНЫМИ ВНУТРЕННИМИ МАССАМИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача управления движением абсолютно жесткого неоднородного цилиндра по шероховатой горизонтальной плоскости. Управляющее воздействие осуществляется посредством регулируемого перемещения внутренних масс. Построены математические модели, отвечающие качеству без отрыва и проскальзывания. Выписаны условия физической реализуемости такого движения. Детально исследован случай, когда подвижные внутренние массы образуют жесткий маятник, центр инерции которого лежит на оси цилиндра. С помощью асимптотического подхода приближенно построено оптимальное по быстрдействию управление в форме синтеза, позволяющее требуемым образом изменять полную энергию системы. Проведено моделирование основных режимов: раскачивания цилиндра до большой угловой амплитуды, приведения во вращение с заданной энергией, торможения качения до полной остановки, колебаний или вращений в окрестности сепаратрисы.

Среди классических моделей систем, рассматриваемых в механике и физике, существенная роль принадлежит колебательно-вращательным системам, простейшая из которых – математический или физический маятник. Эти модели позволяют исследовать важные свойства и особенности поведения физических и технических систем различной природы, такие, как наличие и устойчивость стационарных состояний, колебательные и вращательные режимы движения и особенности перехода одних в другие, способы возбуждения или гашения колебаний и вращений. Существенный аспект такого исследования – изучение возможностей управления колебаниями и вращениями и построение конкретных законов управления, позволяющих привести систему в требуемое состояние при наличии ограничений, диктуемых физическими особенностями системы (например, природой связей – удерживающие или неудерживающие) или ресурсом системы управления и приводов.

Управлению колебательно-вращательными системами посвящено большое число публикаций. Были предложены и развиты асимптотические методы решения задач оптимального управления колебательными системами, уравнения движения которых содержат малый параметр [1, 2]. Эти методы базируются на принципе максимума Понтрягина [3] в сочетании с методом усреднения Крылова – Боголюбова [4, 5]. С помощью метода усреднения решено большое число конкретных задач управления нелинейными системами маятникового типа. Управляющей переменной служит момент сил, приложенный к неподвижной оси вращения маятника, сила, приложенная к подвижной массивной точке подвеса, или скорость точки подвеса. Был рассмотрен [1] широкий класс задач управления перемещением линейных маятниковых систем, имеющих важные технические приложения, например, при создании систем автоматического управления подъемными кранами и контейнерными перегружателями.

Были решены задачи оптимального параметрического управления маятником с подвижным точечным телом внутри [6, 7]. Точечное тело может двигаться вдоль прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс маятника; управляющей переменной служит смещение [6] или скорость [7] внутреннего тела относительно маятника, пределы изменения которых ограничены. Рассмотрено оптимальное управление движением плоскопараллельного бифилярного маятника за счет перемещения внутреннего точечного тела [8]. Управлениями слу-

жат компоненты скорости или ускорения движения внутренней материальной точки относительно тела маятника. Полученные результаты позволяют выяснить возможности возбуждения и гашения колебаний в механизмах типа качелей.

Исследованы управление и стабилизация физического маятника, подвешенного на неподвижной горизонтальной оси, с массивным маховиком внутри [9]. Маховик может вращаться вокруг горизонтальной оси, фиксированной относительно маятника, и приводится в движение электроприводом. Построен закон управления электродвигателем привода, при котором маятник из любого начального состояния приводится в верхнее неустойчивое положение равновесия и стабилизируется в нем. Рассмотрены также режимы управления вращениями маятника при помощи маховика. Теоретические результаты подтверждены экспериментами, поставленными авторами цитируемой работы. Данный способ управления по существу является параметрическим, так как подобно системам, перечисленным выше [6–8], управление маятником реализуется за счет движения тела внутри него.

Ниже рассматривается управляемое качение по горизонтальной плоскости абсолютно жесткого цилиндра с маховиком внутри. Центр масс цилиндра в общем случае не лежит на его геометрической оси (цилиндр несбалансирован), а центр масс маховика лежит на этой оси. Управление осуществляется путем изменения углового ускорения маховика относительно цилиндра. Данная система относится к классу колебательно-вращательных, обобщает известную модель управляемого движения маятника и по своей природе близка к рассмотренной ранее [9]. В обоих случаях управление несущим телом (маятником) осуществляется путем управления вращением маховика внутри него. В отличие от случая неподвижной оси подвеса маятника [9], здесь линия контакта колеса с плоскостью опоры движется, так как колесо катится по плоскости. Кроме того, условия качения цилиндра по плоскости представляют неудерживающую связь, вследствие чего требуется налагать дополнительные условия, позволяющие контролировать отсутствие схода с этой связи.

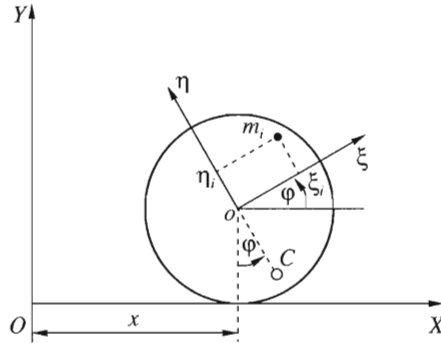
Полученные результаты представляют интерес с точки зрения теории управления колебательно-вращательными системами, а также в связи с возможными приложениями в робототехнике и механике транспортных механизмов, в частности моноциклов [10, 11].

1. Исходная механическая модель. Рассматривается плоско-параллельное движение (качение) неоднородного абсолютно жесткого кругового цилиндра по шероховатой горизонтальной плоскости. Внутри цилиндра имеется совокупность материальных точек, которые могут перемещаться относительно него регулируемым образом. В плоскости, перпендикулярной оси цилиндра и проходящей через его центр масс, введем неподвижную (инерциальную) систему координат XU с центром в точке O и жестко связанную с цилиндром подвижную систему координат $\xi\eta$ с центром в точке o на оси цилиндра (фиг. 1). За ось X выбрана линия пересечения координатной плоскости XU с горизонтальной плоскостью, по которой катится цилиндр, а ось U направлена вертикально вверх. Ось η проходит через центр масс C цилиндра и направлена от точки C к точке o (фиг. 1).

Будем считать, что при движении не происходит проскальзывания цилиндра и (или) потери его контакта с плоскостью. О физических условиях обеспечения такого движения будет сказано ниже. В этом случае положение цилиндра характеризуется одной переменной (обобщенной координатой) – координатой x проекции точки o на ось оси X или углом φ поворота цилиндра относительно оси последнего. Определим φ как угол между осями ξ и X , считая положительным направление вращения оси ξ против часовой стрелки. Переменные x и ξ связаны соотношением

$$x - x_0 = -R(\varphi - \varphi_0) \quad (1.1)$$

где R – радиус цилиндра, x_0 и φ_0 – постоянные, определяемые выбором начал отсчета для соответствующих переменных. Без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$. Положение материальной точки m_i ($i = 1, \dots, n$) относительно цилиндра описывается декартовыми координатами ξ_i и η_i в системе $\xi\eta$. В дальнейшем функции $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ считаются заданными и достаточно гладкими.



Фиг. 1

Если в качестве обобщенной координаты выбран угол φ , то выражения для кинетической энергии T_M и потенциальной энергии U_M цилиндра имеют вид

$$T_M = \frac{1}{2}[J_C + M(R^2 + l^2 - 2Rl \cos \varphi)]\dot{\varphi}^2, \quad U_M = Mgl(1 - \cos \varphi) \quad (1.2)$$

Здесь J_C – момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс C параллельно образующей, M – масса цилиндра, l – расстояние от оси цилиндра до его центра масс, g – ускорение силы тяжести.

Кинетическая T_m и потенциальная U_m энергии совокупности материальных точек m_i равны суммам соответствующих энергий T_{mi} и U_{mi} отдельных точек

$$T_m = \sum_{i=1}^n T_{mi}, \quad U_m = \sum_{i=1}^n U_{mi}$$

$$T_{mi} = \frac{m_i^* R^2 \dot{\varphi}^2}{2} + (m_{i\xi} \dot{\xi}_i + m_{i\eta} \dot{\eta}_i) R \dot{\varphi} + \frac{m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2)}{2}$$

$$m_i^* = m_i \left[1 + \frac{(\xi_i^2 + \eta_i^2)}{R^2} + 2 \left(\frac{\xi_i}{R} \right) \sin \varphi + 2 \left(\frac{\eta_i}{R} \right) \cos \varphi \right] \quad (1.3)$$

$$m_{i\xi} = -m_i \left(\frac{\eta_i}{R} + \cos \varphi \right), \quad m_{i\eta} = m_i \left(\frac{\xi_i}{R} + \sin \varphi \right)$$

$$U_{mi} = m_i g (\xi_i \sin \varphi + \eta_i \cos \varphi) + U_{i0}, \quad U_{i0} = \text{const}$$

Если движение точек m_i относительно цилиндра задано достаточно гладкими функциями $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$, то движение цилиндра описывается уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad T = T_M + T_m, \quad U = U_M + U_m \quad (1.4)$$

При выводе уравнений движения соотношение (1.1), означающее, что качение цилиндра по плоскости происходит без отрыва и проскальзывания, постулировалось. В действительности выполнение этого условия обеспечивается физическими силами, приложенными на линии контакта, – силой нормальной реакции поверхности опоры N , на-

правленной вдоль оси Y , и силой трения F , направленной вдоль оси X инерциальной системы отсчета XY . Сила нормальной реакции должна быть неотрицательна, так как поверхность опоры может действовать на цилиндр только в сторону последнего. Будем полагать, что между цилиндром и поверхностью опоры действует сила сухого трения, подчиняющаяся закону Кулона. В этом случае величина силы трения не может превышать величины нормальной реакции, умноженной на коэффициент трения. Таким образом, полная совокупность условий движения цилиндра по плоскости без отрыва и проскальзывания с учетом физических особенностей действующих сил имеет вид

$$\dot{x} + R\dot{\varphi} \equiv 0, \quad y \equiv R, \quad N \geq 0, \quad |F| \leq kN \quad (1.5)$$

где x и y – X - и Y -координаты точки o пересечения оси цилиндра с координатной плоскостью XY , а k – коэффициент трения. Отметим, что неравенство $N \geq 0$ вытекает из неравенства $|F| \leq kN$, поэтому первое неравенство в (1.5) можно опустить.

В случае движения без отрыва и проскальзывания силы N и F определяются выражениями

$$\begin{aligned} N = & (M + m)g + Ml(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i [\ddot{\xi}_i \sin \varphi + \ddot{\eta}_i \cos \varphi + \dot{\varphi}(\xi_i \cos \varphi - \eta_i \sin \varphi) - \\ & - \dot{\varphi}^2(\xi_i \sin \varphi + \eta_i \cos \varphi) + 2\dot{\varphi}(\dot{\xi}_i \cos \varphi - \dot{\eta}_i \sin \varphi)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} F = & (M + m)\ddot{x} + Ml(\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i [\ddot{\xi}_i \cos \varphi - \ddot{\eta}_i \sin \varphi - \dot{\varphi}(\xi_i \sin \varphi + \eta_i \cos \varphi) - \\ & - \dot{\varphi}^2(\xi_i \cos \varphi - \eta_i \sin \varphi) - 2\dot{\varphi}(\dot{\xi}_i \sin \varphi + \dot{\eta}_i \cos \varphi)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

где m – сумма масс материальных точек m_i .

Выражения (1.6) и (1.7) выводятся на основе теоремы о движении центра масс механической системы. Текущие координаты центра масс рассматриваемой системы X_C и Y_C в неподвижной системе отсчета XY определяются выражениями

$$\begin{aligned} (M + m)X_C = & M(x + l \sin \varphi) + \sum_{i=1}^n m_i(x + \xi_i \cos \varphi - \eta_i \sin \varphi) \\ (M + m)Y_C = & M(R - l \cos \varphi) + \sum_{i=1}^n m_i(R + \xi_i \sin \varphi + \eta_i \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из внешних сил вдоль оси Y на систему действует сила тяжести, равная $(M + m)g$ и направленная вертикально вниз, и сила нормальной реакции N , а вдоль оси X – только сила трения F . Соответственно уравнения движения центра масс имеют вид

$$(M + m)\ddot{X}_C = F, \quad (M + m)\ddot{Y}_C = -(M + m)g + N \quad (1.9)$$

Из соотношений (1.8) и (1.9) вытекают равенства (1.6) и (1.7).

Из уравнения движения (1.4) можно выразить обобщенное ускорение $\ddot{\varphi}$ через фазовые переменные (обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$) и подставить полученные выражения в соотношения (1.6) и (1.7). В результате получим нормальную реакцию и силу трения как функции фазовых переменных системы и времени.

Движение цилиндра по плоскости происходит без отрыва и проскальзывания тогда и только тогда, когда в любой момент времени t выполнены условия (1.5).

Из соотношений (1.2)–(1.4) видно, что в уравнение движения (1.4) входят функции $\xi_i(t)$, $\dot{\xi}_i(t)$, $\ddot{\xi}_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\dot{\eta}_i(t)$ и $\ddot{\eta}_i(t)$, характеризующие движение точек m_i относительно цилиндра. Управляя движением этих точек, можно управлять движением цилиндра. При постановке задач управления за управляющие переменные целесообразно брать $\ddot{\xi}_i(t)$ и $\ddot{\eta}_i(t)$.

В частном случае, когда координаты ξ_i и η_i постоянны, рассматриваемая система представляет собой абсолютно твердый цилиндр с соответствующим распределением масс. Такая система в зависимости от начальных условий совершает колебательные или вращательные движения и может трактоваться как обобщенный физический маятник, движение которого описывается уравнением вида

$$J_*(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{J'_*(\varphi)\dot{\varphi}^2}{2} + U'_*(\varphi) = 0 \quad (1.10)$$

Здесь $J_*(\varphi)$ – момент инерции системы относительно мгновенной линии контакта (образующей цилиндра), $U_*(\varphi)$ – потенциальная энергия системы в поле сил тяжести, штрих обозначает дифференцирование по переменной φ . Система (1.10) имеет интеграл энергии

$$\frac{J_*(\varphi)\dot{\varphi}^2}{2} + U_*(\varphi) = \text{const}$$

и допускает полное интегрирование в эллиптических функциях.

Уравнение движения (1.4) при произвольном числе материальных точек, движущихся внутри цилиндра, и при произвольных функциях $\xi(t)$ и $\eta(t)$ весьма громоздко и сложно для решения задач управления такими системами. Поэтому представляется целесообразным наложить ограничения на движения этих точек для упрощения уравнения движения.

Упрощенные варианты модели. 1° . *Заданные траектории движения точечных масс.* Во многих прикладных задачах целесообразно считать, что точечные массы m_i движутся относительно цилиндра по заданным траекториям. Конструктивно такое движение может быть обеспечено, например, направляющими соответствующей формы. Траектории движения в системе координат $\xi\eta$ могут быть представлены в виде кривых, заданных параметрически

$$\xi_i = \xi_i(s_i), \quad \eta_i = \eta_i(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

где $\xi_i(s_i)$ и $\eta_i(s_i)$ – заданные функции, определяющие форму кривой, а s_i – ее параметр, например, длина, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки. Характеризуя параметром s_i положение точки m_i на соответствующей траектории, можно представить движение этой точки относительно цилиндра функциями $\xi_i(s_i(t))$ и $\eta_i(s_i(t))$, где $s_i(t)$ задает закон изменения параметра кривой со временем при движении точки. Производные функций $s_i(t)$ могут рассматриваться в качестве управляющих воздействий.

Одним из простых и вместе с тем важных в исследовательском и прикладном отношении примеров кривых (2.1) служат окружности с общим центром в точке o на оси цилиндра. В этом случае уравнения (2.1) конкретизируются следующим образом:

$$\xi_i = \rho_i \cos \psi_i, \quad \eta_i = \rho_i \sin \psi_i, \quad \psi_i = \psi_i(t); \quad 0 \leq \rho_i \leq R, \quad \rho_i = \text{const} \quad (2.2)$$

Здесь ρ_i – радиусы окружностей, ψ_i – угол между радиусом-вектором точки на соответствующей окружности и осью ξ . Угловые переменные ψ_i в выражениях (2.2) играют роль параметров s_i в соотношениях (2.1).

Подставив выражения (2.2) в соотношения (1.3), получим сравнительно простые выражения для кинетической и потенциальной энергий материальных точек

$$T_{mi} = \frac{1}{2} m_i [R^2 \dot{\phi}^2 + \rho_i^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi}_i)^2 + 2R\rho_i \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\psi}_i) \sin(\phi + \psi_i)] \quad (2.3)$$

$$U_{mi} = m_i g \rho_i \sin(\phi + \psi_i) + U_{i0}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Уравнение Лагранжа (1.4) при таком упрощении все еще остается громоздким и сложным для качественного анализа и решения задач управления. При решении ряда задач управления (в том числе оптимального) подобными системами в качестве управляющих переменных целесообразно принять функции $\dot{\psi}_i$, полагая их кусочно-непрерывными. Тогда переменные ψ_i и ϕ находятся интегрированием управляющей функции, при этом функция $\psi_i(t)$ будет непрерывно дифференцируема, а $\dot{\psi}_i(t)$ – кусочно-дифференцируема, что отвечает физическим представлениям о характере изменения координаты и скорости точечного тела. Вместе с тем переменные ψ_i и $\dot{\psi}_i$ для траектуемой таким образом управляемой системы являются фазовыми переменными, и если точечных масс много, приходится решать задачу управления с большим числом фазовых переменных, что весьма затруднительно.

2°. *Динамическая уравновешенность подвижных внутренних масс.* Пусть число подвижных внутренних масс m_j четно ($n = 2j^*$), материальные точки с номерами j и $j + j^*$ ($j = 1, \dots, j^*$) имеют одинаковые массы и расположены в каждый момент времени симметрично относительно центра o . В этом случае имеем

$$\begin{aligned} m_j &= m_{j+j^*}, \quad \xi_{j+j^*} = -\xi_j, \quad \eta_{j+j^*} = -\eta_j \\ T_{mj} + T_{m,j+j^*} &= m_j (R^2 + \xi_j^2 + \eta_j^2) \dot{\phi}^2 + \\ &+ 2m_j (\xi_j \dot{\eta}_j - \eta_j \dot{\xi}_j) \dot{\phi} + m_j (\dot{\xi}_j^2 + \dot{\eta}_j^2) \\ U_{mj} + U_{m,j+j^*} &= 2U_{j0} = \text{const}; \quad j = 1, \dots, j^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

При выполнении наложенных условий центр масс системы материальных точек m_i лежит на оси цилиндра (в точке o). Поэтому в данном случае систему подвижных внутренних масс уместно назвать динамически уравновешенной.

Выражения (2.4) не содержат линейных по ξ_j , $\dot{\xi}_j$ и η_j , $\dot{\eta}_j$ слагаемых. Кроме того, отсутствует зависимость от ϕ , что существенно упрощает уравнения управляемого движения. Если, кроме того, точки с номерами j и $j + j^*$ ($j = 1, \dots, j^*$) движутся синхронно по окружностям, то выражение (2.4) приводится к виду

$$T_{mj} + T_{m,j+j^*} = m_j R^2 \dot{\phi}^2 + m_j \rho_j^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi}_j)^2 \quad (2.5)$$

где ρ_j и ψ_j – параметры окружности, определяемые соотношениями (2.2).

В случае, когда система внутренних масс динамически уравновешена и соответствующие материальные точки движутся по окружностям, уравнение движения (1.4) приобретает сравнительно простой обозримый вид

$$J_*(\varphi)\ddot{\varphi} + Ml(g + R\dot{\varphi}^2)\sin\varphi = -2 \sum_{j=1}^{j^*} m_j \rho_j^2 \ddot{\psi}_j$$

$$J_*(\varphi) = J_C + J_m + (M + m)R^2 + Ml^2 - 2MlR\cos\varphi \quad (2.6)$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad J_m = 2 \sum_{j=1}^{j^*} m_j \rho_j^2$$

Здесь J_m – момент инерции, создаваемый точечными массами m_j относительно оси цилиндра, $J_*(\varphi)$ – суммарный момент инерции цилиндра с подвижными массами относительно мгновенной оси вращения цилиндра (образующей, вдоль которой цилиндр касается плоскости качения).

Пусть все материальные точки m_i движутся по своим окружностям с одной и той же угловой скоростью, т.е. $\dot{\psi}_j \equiv \dot{\psi}$ для всех $j = 1, \dots, j^*$. В таком случае подвижные массы образуют абсолютно твердое тело (маховик), вращающееся относительно цилиндра вокруг оси последнего. При этом уравнение движения (2.6) еще больше упрощается и принимает вид

$$J_*(\varphi)\ddot{\varphi} + Ml(g + R\dot{\varphi}^2)\sin\varphi = -J_m\ddot{\psi} \quad (2.7)$$

Выражения (1.6) и (1.7) для нормальной (N) и касательной (F) компонент силы реакции поверхности опоры в рассматриваемом случае имеют вид

$$N = (M + m)g + Ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = (M + m)g + Ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - MlJ_*^{-1}\sin\varphi[J_m\ddot{\psi} + Ml(g + R\dot{\varphi}^2)\sin\varphi] \quad (2.8)$$

$$F = Ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - (M + m)R\dot{\varphi} = -Ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + J_*^{-1}[(M + m)R - Ml\cos\varphi][J_m\ddot{\psi} + Ml(g + R\dot{\varphi}^2)\sin\varphi] \quad (2.9)$$

В соответствии с соотношениями (1.5) величины N и F должны удовлетворять условиям $N \geq 0$ и $|F| \leq kN$, где k – коэффициент трения. Если дебаланса цилиндра нет ($l = 0$), то первое неравенство выполняется всегда, а второе – при достаточно малой величине относительного углового ускорения маховика или достаточно большом коэффициенте трения, а именно, если $J_m J_*^{-1} R |\ddot{\psi}| \leq kg$. При наличии дебаланса оба неравенства могут нарушаться для достаточно больших $|\dot{\varphi}|$ ($l\dot{\varphi}^2 \sim g$) или $|\ddot{\psi}|$ ($J_m J_*^{-1} l |\ddot{\psi}| \sim g$). В пространстве переменных l , $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\psi}$ существует область, в которой неравенства (1.5) выполнены для любого φ .

В отсутствие дебаланса ($l = 0$) имеет место равенство

$$J_*\dot{\varphi} + J_m\dot{\psi} = \text{const}$$

выражающее сохранение момента импульса системы относительно линии контакта цилиндра с плоскостью. Если в начальный момент времени вся система покоилась ($\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\psi} = 0$), то константа в правой части этого равенства равна нулю. В таком случае для качения цилиндра в определенном направлении маховик должен все время вращаться относительно цилиндра в направлении, противоположном вращению цилиндра при качении, т.е. величина $\dot{\psi}$ должна иметь постоянный знак и не обращаться в нуль. Отметим,

что разгон цилиндра до любой скорости возможен при сколь угодно малом значении $|\ddot{\psi}|$, что позволяет избежать проскальзывания при разгоне. Если $l > 0$, разгону цилиндра из устойчивого состояния равновесия (когда центр масс цилиндра лежит на вертикальной прямой, проходящей через ось цилиндра, ниже последней) препятствуют момент сил тяжести $-Mgl \sin \varphi$ и момент центробежных сил инерции $-MR\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$. Это видно из уравнения (2.7). Тем не менее и в этом случае разгон цилиндра возможен при сколь угодно малом значении $|\ddot{\psi}|$ за счет резонансной раскачки системы. Во избежание нарушений условий качения без отрыва и проскальзывания (1.5) величина дебаланса l и величина относительного углового ускорения маховика $\ddot{\psi}$ должны быть достаточно малы.

Как видно из соотношения (2.7), при $l > 0$ и $\ddot{\psi} = 0$ цилиндр на плоскости имеет счетное множество устойчивых положений равновесия $\varphi_e = 2\pi p$ ($x_e = -2R\pi p$) ($p = 0, \pm 1, \dots$), что может представлять интерес для приложений.

Ниже решаются задачи оптимального управления системой (2.7), которая, по-видимому, представляет собой простейшую систему рассматриваемого класса. За управляющую переменную принимается величина $\ddot{\psi}$. Критериями качества в таких задачах обычно служат время приведения системы в заданное фазовое состояние или полная механическая энергия в момент окончания процесса управления. В силу сказанного выше, для выполнения условий движения цилиндра без отрыва от плоскости и проскальзывания величина $|\ddot{\psi}|$ должна быть достаточно малой. Поэтому будем считать $|\ddot{\psi}|$ асимптотически малой величиной, что позволит применить эффективные асимптотические методы для приближенного построения оптимальных движений.

3. Построение стандартной системы уравнений управляемого качения цилиндра. Полагая $M \neq 0$ и $l \neq 0$, введем безразмерные переменные и параметры

$$\theta = vt, \quad v = \sqrt{\frac{Mlg}{J}}, \quad \lambda = \frac{MRl}{J}, \quad u = \frac{\ddot{\psi}}{\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{J_m \gamma}{Jv^2} \quad (3.1)$$

$$J = J_C + J_m + (M + m)R^2 + Ml^2$$

и представим уравнение (2.7) в виде

$$(1 - 2\lambda \cos \varphi)\varphi'' + (1 + \lambda\varphi'^2)\sin \varphi = -\varepsilon u, \quad \varepsilon \ll 1, \quad |u| \leq 1 \quad (3.2)$$

а условия качения без отрыва и проскальзывания (1.5) при учете выражений (2.8) и (2.9) для N и F в виде

$$N^* \geq 0, \quad |F^*| \leq kN^*$$

$$N^* = \zeta + \lambda^2 \left[\varphi'^2 \cos \varphi - \frac{\varepsilon u + (1 + \lambda\varphi'^2)\sin \varphi}{1 - 2\lambda \cos \varphi} \sin \varphi \right] \quad (3.3)$$

$$F^* = -\lambda^2 \varphi'^2 \sin \varphi + \lambda(\zeta - \cos \varphi) \frac{\varepsilon u + (1 + \lambda\varphi'^2)\sin \varphi}{1 - 2\lambda \cos \varphi}$$

$$\zeta = \frac{M + m}{J} R^2$$

Штрих означает дифференцирование по безразмерному времени θ , а γ – максимально допустимое значение модуля углового ускорения маховика $\ddot{\psi}$ (параметр системы управ-

ления). Параметр ν характеризует частоту $\nu_e = \frac{\nu}{\sqrt{1-2\lambda}}$ малых колебаний цилиндра в отсутствие управления относительно положений равновесия $\varphi_e = 0, \pm 2\pi, \dots$

Безразмерный параметр λ лежит в интервале $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Для доказательства последнего неравенства представим суммарный момент инерции системы относительно мгновенной линии контакта цилиндра с плоскостью, определенный вторым равенством (2.6), в виде $J_*(\varphi) = J(1 - 2\lambda \cos \varphi)$. Величина $J_*(\varphi)$ положительна при всех φ . Неравенство $\lambda < \frac{1}{2}$ следует из соотношения $J_*(0) > 0$.

Если $M = 0$ или $l = 0$, замена переменных (3.1) неприменима из-за обращения в нуль параметра ν , фигурирующего в формуле, связывающей исходное (размерное) время t с безразмерным временем θ . Поэтому указанные случаи требуют отдельного рассмотрения. Из соотношений (2.6) и (2.7) вытекает, что при $M = 0$ или $l = 0$ уравнение (2.7) принимает вид

$$J^* \ddot{\varphi} = -J_m \dot{\psi}, \quad J^* = \begin{cases} J_C + J_m + (M + m)R^2, & \text{если } l = 0 \\ J_m + mR^2, & \text{если } M = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Учтено, что при обращении в нуль массы цилиндра M его момент инерции J_C также обращается в нуль.

Формально уравнение (3.4) совпадает с уравнением движения материальной точки вдоль горизонтальной прямой под действием управляющей силы. Координата материальной точки отождествляется с переменной φ , масса – с постоянным коэффициентом J^* , а управляющая сила – с величиной $-J_m \dot{\psi}$. Управление этой системой весьма подробно исследовано и в настоящей статье не рассматривается.

Отметим, что если в уравнении (3.2) положить $\lambda = 0$, получится уравнение, формально совпадающее с уравнением движения маятника (математического или физического) с неподвижной горизонтальной осью вращения под действием управляющего момента сил $-\epsilon i$, приложенного к этой оси. В терминах исходных размерных переменных этот случай отвечает $R = 0$ при $l \neq 0$. Такая ситуация физически возможна, поскольку при выводе выражений (1.2) и (1.3) для кинетической и потенциальной энергий системы важно лишь, что поверхность качения тела, содержащего внутри подвижные массы, по плоскости цилиндрическая, а сама форма этого тела и распределение масс внутри него несущественны. Поэтому радиус катящегося цилиндра R и расстояние от оси этого цилиндра до центра масс тела, несущего подвижные массы, никак между собой не связаны. Таким образом, рассматриваемая система обобщает модель маятника, управляемого моментом сил, приложенным к оси его вращения.

При $\epsilon = 0$ или $i \equiv 0$ управление отсутствует. В этом случае система (3.2) имеет первый интеграл (интеграл энергии)

$$E = \frac{1}{2}(1 - 2\lambda \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 + 1 - \cos \varphi \quad (3.5)$$

С физической точки зрения величина E – полная механическая энергия рассматриваемого несбалансированного цилиндра с жестко прикрепленным к нему маховиком, т.е. величина E не учитывает составляющих кинетической энергии, связанных с вращением маховика относительно цилиндра. Если $E < 2$, то система совершает периодические колебания относительно положения устойчивого равновесия с амплитудой

$\varphi_* = \arccos(1 - E)$. При $E > 2$ цилиндр катится (вращается) с периодически меняющейся скоростью. Случай $E = 2$ отвечает сепаратрисе.

Периоды колебаний Θ_v и вращений Θ_r определяются стандартным для консервативной системы образом [1, 2]

$$\Theta_v(E, \lambda) = 2\sqrt{2}I_v(\varphi_*, 2\lambda), \quad \varphi_* = \arccos(1 - E), \quad 0 < E < 2$$

$$I_v(\varphi_*, \alpha) = \int_0^{\varphi_*} \left(\frac{1 - \alpha \cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_*} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.6}$$

$$\Theta_r(E, \lambda) = \sqrt{2}\beta I_r(\beta, 2\lambda), \quad \beta = \frac{1}{(E - 1)}, \quad E > 2$$

$$I_r(\beta, \alpha) = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \alpha \cos \varphi}{1 + \beta \cos \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 \tag{3.7}$$

Интегралы вида $I_v(\varphi_*, \alpha)$ и $I_r(\beta, \alpha)$ отсутствуют в наиболее полных справочниках и требуют отдельных вычислений. Они могут быть выражены через полный эллиптический интеграл третьего рода $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$ [12].

После нетривиальной замены аргумента φ и громоздких вычислений функцию $I_v(\varphi_*, \alpha)$ (3.6) удается представить в виде

$$I_v(\varphi_*, \alpha) = \frac{\sqrt{2}(1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \alpha \cos \varphi_*}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$$

$$p = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \kappa^2, \quad \kappa = \sqrt{\frac{(1 + \alpha)(1 - \cos \varphi_*)}{2(1 - \alpha \cos \varphi_*)}} < 1 \tag{3.8}$$

Отметим, что коэффициент при интеграле $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$ в равенстве (3.8) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 1$. Однако при этом модуль κ и параметр p интеграла стремятся к единице снизу, что приводит к его расходимости ($\Pi \sim (1 - \alpha)^{-1}$). Вместе с тем правая часть равенства (3.8) имеет конечный предел при $\alpha \rightarrow 1$, который равен интегралу (3.6) при $\alpha = 1$:

$$I_v(\varphi_*, 1) = 2\text{Arch}\left(\left(\cos \frac{\varphi_*}{2}\right)^{-1}\right) = 2\left[\ln\left(1 + \sin \frac{\varphi_*}{2}\right) - \ln\left(\cos \frac{\varphi_*}{2}\right)\right] \tag{3.9}$$

Отсюда вытекает, что $I_v(\varphi_*, 1) \rightarrow 0$ при $\varphi_* \rightarrow 0$. Можно также установить, что $I_v \rightarrow \infty$ при $\varphi_* \rightarrow \pi$. Это свойство неограниченности периода колебаний Θ_v характерно для движений вблизи сепаратрисы ($E \leq 2$). Наоборот, при малых амплитудах колебаний ($\varphi_* \ll 1, E \ll 1$) для интеграла I_v и периода Θ_v получаются приближенные выражения

$$I_v \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \alpha}, \quad \Theta_v \approx 2\pi \sqrt{1 - 2\lambda} \tag{3.10}$$

Эти величины не зависят от φ_* (или E); величина Θ_v в (3.10) совпадает с периодом малых колебаний цилиндра, описываемых линеаризованным уравнением (3.2) при $\epsilon = 0$.

При $\alpha \rightarrow 0$ параметр p стремится к нулю и полный эллиптический интеграл третьего рода $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$ переходит в полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(\kappa)$.

Интеграл $I_r(\beta, \alpha)$, связанный с периодом вращений Θ_r , в выражениях (3.7) также требует громоздких вычислений. Он приводится к виду

$$I_r(\beta, \alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right) \quad (3.11)$$

$$p = \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}}$$

Как и в выражении (3.8) для I_v , коэффициент при интеграле $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$ в равенстве (3.11) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow \frac{1}{2}$), а сам интеграл неограниченно возрастает. Однако правая часть равенства (3.11) стремится при $\alpha \rightarrow 1$ к конечному пределу

$$I_r(\beta, 1) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Arsh}\left(\sqrt{\frac{2\beta}{1-\beta}}\right), \quad 0 < \beta < 1 \quad (3.12)$$

$$I_r(\beta, 1) \rightarrow 2\sqrt{2}, \quad \beta \rightarrow 0; \quad I_r(\beta, 1) \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow 1$$

В общем случае $0 \leq \alpha \leq 1$ величины I_r (3.11), (3.12) и Θ_r (3.7) неограничены при $\beta \rightarrow 1$, что соответствует медленным вращательным движениям вблизи сепаратрисы $E \geq 2$. Для периода быстрых вращений ($E \geq 1$, $\beta \ll 1$) имеет место приближенное выражение

$$\Theta_r(E, \lambda) \approx 2 \sqrt{\frac{2(1+2\lambda)}{E}} \mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{1+2\lambda}{2}}\right) \ll 1 \quad (3.13)$$

где \mathbf{E} – полный эллиптический интеграл второго рода. Отметим, что при $\alpha = 0$ параметр p обращается в нуль, а интеграл $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p, \kappa\right)$ обращается в полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(\kappa)$ с присущим свойством расходимости при $\kappa \rightarrow 1$, т.е. при $\beta \rightarrow 1$.

Для описания динамики системы (3.2) при $\varepsilon > 0$ удобно перейти от фазовых переменных координата – скорость (φ, φ') к переменным энергия – фаза (E, Ψ). Переменная E определяется соотношением (3.5) и изменяется в соответствии с уравнением

$$E' = -\varepsilon u \varphi'(E, \varphi) \quad (3.14)$$

которое получается дифференцированием выражения (3.5) в силу уравнения (3.2). Функция $\varphi'(E, \varphi)$ неявно определяется соотношением (3.5). Разрешив это соотношение относительно φ' , получим

$$\varphi'(E, \varphi) = \pm \left[\frac{2(E-1+\cos\varphi)}{1-2\lambda\cos\varphi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Фаза Ψ определяется соотношением

$$\Psi = \frac{2\pi}{\Theta(E)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\xi}{\varphi'(E, \xi)} \quad (3.16)$$

где φ_0 – значение переменной φ при $\theta = 0$. Дифференцируя выражение (3.16) по θ при учете равенства (3.14), получим

$$\Psi' = \frac{2\pi}{\Theta(E)} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{2\pi}{\Theta(E)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\xi}{\varphi'(E, \xi)} \right) \varphi'(E, \varphi) u \quad (3.17)$$

Выразив переменную φ как функцию E и Ψ с помощью соотношения (3.16) и подставив $\varphi = \varphi(E, \Psi)$ в правые части равенств (3.14) и (3.17), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений для переменных E и Ψ . Правые части этой системы – 2π -периодические функции Ψ .

В первом приближении метода усреднения [4, 5] фаза Ψ находится с погрешностью $O(1)$ на интервале времени $\theta \sim \varepsilon^{-1}$, так как медленная переменная (энергия E) вычисляется с погрешностью $O(\varepsilon)$ на этом интервале. Поэтому слагаемое с коэффициентом ε в уравнении (3.17) может быть опущено без потери точности, что существенно упрощает решение задач управления рассматриваемой механической системой.

4. Квазиоптимальные режимы управления энергией колебаний и вращения неоднородного цилиндра. Рассмотрим задачи оптимального управления системой (3.14), (3.17) на асимптотически большом интервале времени ($\theta \sim \varepsilon^{-1}$) [1, 2].

Задача 1 (максимизация или минимизация полной энергии в заданный момент времени). Для системы (3.14), (3.17), подчиненной начальным условиям

$$E(0) = E_0, \quad \Psi(0) = \Psi_0 \quad (4.1)$$

найти оптимальное управление $u = u_0(E, \Psi)$, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$ и минимизирующее (максимизирующее) энергию E в заданный момент времени $\theta_f = L\varepsilon^{-1}$, т.е.

$$J_1(u) = \pm E(\theta_f) \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1, \quad \theta_f = L\varepsilon^{-1} \quad (4.2)$$

Задача 2 (приведение системы в состояние с заданной энергией за минимальное время). Найти оптимальное управление $u = u_0(E, \Psi)$, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$ и приводящее систему (3.14), (3.17), подчиненную начальным условиям (4.1), в состояние с энергией $E = E_f$ за минимальное время, т.е.

$$J_2(u) = \theta_f \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1, \quad E(\theta_f) = E_f \quad (4.3)$$

Приближенное решение этих задач может быть построено на основе принципа максимума Понтрягина [3] в сочетании с методом усреднения [4, 5], который используется для решения краевой задачи принципа максимума [1, 2]. Для определенности остановимся на задаче 2. Приближенное (квазиоптимальное) управление представляется в форме синтеза в виде

$$u_0 = \text{sign}[(E - E_f)\varphi'], \quad E \neq E_f \quad (4.4)$$

Управление (4.4) – локально оптимальное, а именно оно в каждый момент времени минимизирует скорость изменения модуля разности между текущим значением энергии E и терминальным значением E_f .

Отметим [1, 2], что для задачи 1 квазиоптимальное управление имеет вид $u_0 = \mp \text{sign} \varphi'$.

Под φ' в соотношении (4.4) следует понимать функцию (3.15), где величина φ выражена через E и Ψ в соответствии с соотношением (3.16). Таким образом, управление (4.4) – функция переменных E и Ψ , как требует постановка задачи оптимального управления. С другой стороны, это управление можно выразить как функцию исходных переменных φ и φ' системы (3.2), которые доступны непосредственному измерению. Для этого нужно вместо E в равенство (4.4) подставить выражение (3.5).

Изменение переменной E с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $\sim \varepsilon^{-1}$ описывается уравнением, которое получается после подстановки управления (4.4) в соотношение (3.14) и усреднения последнего по фазе Ψ . Введение медленного аргумента $\tau = \varepsilon\theta$ позволяет привести усредненное уравнение к виду (точкой в позиции штриха обозначено дифференцирование по τ)

$$E' = V(E, \lambda) \text{sign}(E - E^f), \quad E(0) = E_0$$

$$V(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi'(E, \Psi)| d\Psi = \frac{1}{\Theta(E, \lambda)} \int_0^{\Theta} |\varphi'| d\theta = \frac{1}{\Theta} \oint \text{sign} \varphi' d\varphi, \quad \Theta = \Theta_{v,r} \quad (4.5)$$

Зависимость периодов колебаний Θ_v или вращений Θ_r от E и λ определяется выражениями (3.6), (3.10), или (3.7), (3.13).

Интегралы, входящие в выражение для $V(E, \lambda)$, вычисляются аналитически, и в результате для функции V получаются выражения

$$V_v(E, \lambda) = \frac{4}{\Theta_v(E, \lambda)} \varphi_*(E) = \frac{4 \arccos(1 - E)}{\Theta_v(E, \lambda)}, \quad 0 < E < 2$$

$$V_r(E, \lambda) = \frac{2\pi}{\Theta_r(E, \lambda)}, \quad E > 2 \quad (4.6)$$

Амплитуда колебаний φ_* определяется согласно второй формуле (3.6); при $E \ll 1$ имеем $\varphi_* \approx \sqrt{2E}$.

Уравнение (4.5) допускает разделение переменных, и его решение выражается квадратурой

$$\tau = \int_{E_0}^E \frac{dE}{\text{sign}(E - E^f) V(E, \lambda)} \quad (4.7)$$

Минимальное медленное время изменения энергии от величины E_0 до E_f вычисляется по формуле

$$\tau_f = \left| \int_{E_0}^{E_f} \frac{dE}{V(E, \lambda)} \right|, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq E_0, \quad E_f < \infty \quad (4.8)$$

Анализ свойств функции V свидетельствует о полной управляемости рассматриваемой системы в режимах колебаний и вращений. При $E \ll 1$ и $E \gg 1$ имеет место асимптотика $V \sim \sqrt{E}$, т.е. $E \sim \tau^2$. Управление (4.4) применимо также при эволюции движения цилиндра из режима колебаний в режим вращения. Переход через сепаратрису приводит к увеличению погрешности асимптотического решения: вместо оценки $O(\varepsilon)$ имеет место оценка $O(\varepsilon \ln \varepsilon^{-1})$, что представляется удовлетворительным с точки зрения приложений при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

5. Математическое моделирование управляемых колебаний и вращений неоднородного цилиндра при квазиоптимальном законе управления. Приближенно оптимальное управление (4.4), построенное в форме синтеза, позволяет управлять системой (3.2), не-

прерывно измеряя ее фазовые переменные φ и φ' и вычисляя энергию E по формуле (3.5). В данном разделе приводятся и анализируются результаты численного моделирования поведения системы при названном законе управления. Моделирование состоит в интегрировании уравнения

$$\begin{aligned} (1 - 2\lambda \cos \varphi)\varphi'' + (1 + \lambda \varphi'^2) \sin \varphi &= -\varepsilon u_0(\varphi, \varphi') \\ u_0(\varphi, \varphi') &= \text{sign}[(E(\varphi, \varphi') - E_f)\varphi'] \\ E &= \frac{1}{2}(1 - 2\lambda \cos \varphi)\varphi'^2 + 1 - \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

при заданных параметрах λ , ε и E_f и начальных условиях

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi'_0 \quad (5.2)$$

Уравнение (5.1) получено подстановкой в уравнение (3.2) квазиоптимального управления (4.4). Правая часть этого уравнения – разрывная функция фазовых переменных, причем количество разрывов вдоль траектории движения может быть асимптотически большим ($\sim \varepsilon^{-1}$). Это обстоятельство существенно затрудняет численное интегрирование уравнения (5.1) на основе стандартного программного обеспечения. Поэтому представляется целесообразным сглаживать управляющую функцию (4.4) на множестве разрывов $(E - E_f)\varphi' = 0$, сглаживая тем самым правую часть уравнения (5.1).

При моделировании движений рассматриваемой системы, результаты которого представлены ниже, управление (4.4) аппроксимировалось функцией

$$u_*(\varphi, \varphi') = \frac{E - E_f}{|E - E_f| + d_E} \frac{\varphi' + c}{|\varphi'| + d_\varphi} \quad (5.3)$$

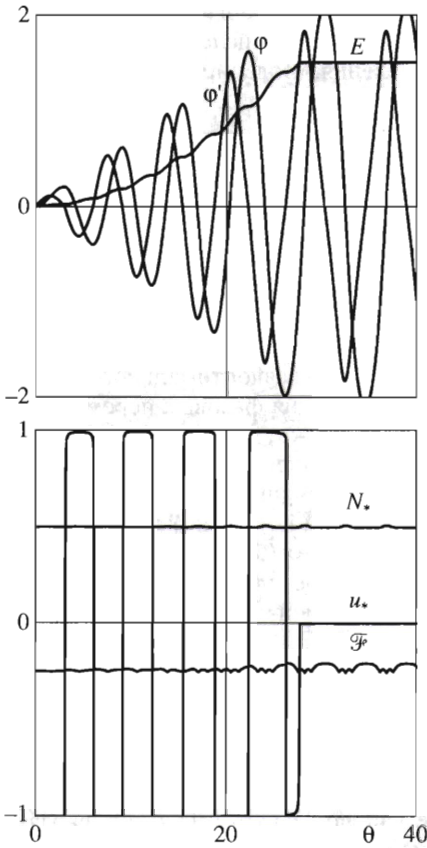
Здесь d_E , d_φ и c – параметры аппроксимации, причем d_E и d_φ положительны. При стремлении всех параметров аппроксимации к нулю функция u_* (5.3) стремится к функции u_0 (4.4) или (5.1). Предполагается, что $|c| \leq d_\varphi$. Это условие обеспечивает выполнение ограничения $|u_*| \leq 1$, наложенного на управляющую переменную. Параметры d_E и d_φ вводятся для сглаживания релейной функции. Дополнительный параметр c вводится для обеспечения ненулевого управления при $\varphi' = 0$, например, при начале движения из состояния равновесия. Выбором знака c можно регулировать направление движения на начальном участке, а также при прохождении через сепаратрису (со скоростью, близкой к нулю) в случае, когда $E_0 < 2$, а $E_f > 2$. Если $c = 0$, то направление движения цилиндра при прохождении через сепаратрису оказывается трудно предсказуемым, особенно при весьма малых значениях ε . Заданная энергия $E_f > 2$ достигается независимо от направления вращения. Кроме того, при управлении (5.2) с $c = 0$ наблюдается существенное влияние ошибок округления при интегрировании уравнения движения (3.2) на этапе перехода от колебаний к вращениям. Это также способствует неопределенности направления вращения на финальном этапе движения. Для процесса торможения (при $E_f < E_0$) можно положить $c = 0$ независимо от режима колебаний или вращений.

Таким образом, вместо уравнения (5.1) при моделировании интегрировалось уравнение

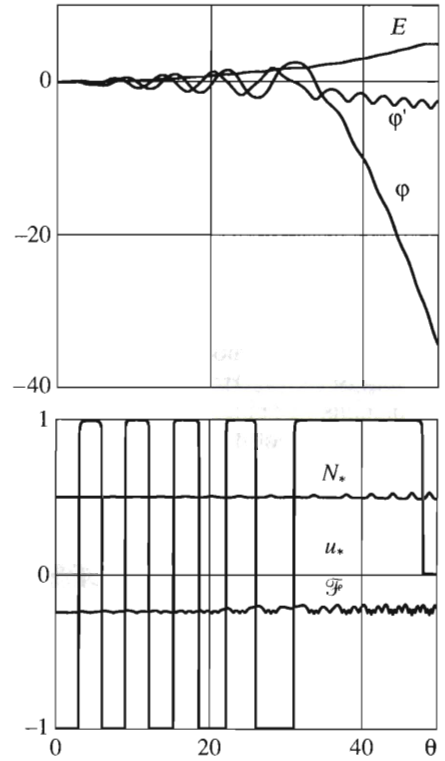
$$(1 - 2\lambda \cos \varphi)\varphi'' + (1 + \lambda \varphi'^2) \sin \varphi = -\varepsilon u_*(\varphi, \varphi') \quad (5.4)$$

Входные данные моделирования включали безразмерные параметры системы λ , ε и ζ (см. (3.3)), коэффициент трения цилиндра о шероховатую плоскость k , начальное E_0 и конечное E_f значения энергии, а также параметры аппроксимирующего управления d_E , d_φ и c . Начальные условия задавались следующим образом:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi'_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{1 - 2\lambda}} \quad (5.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

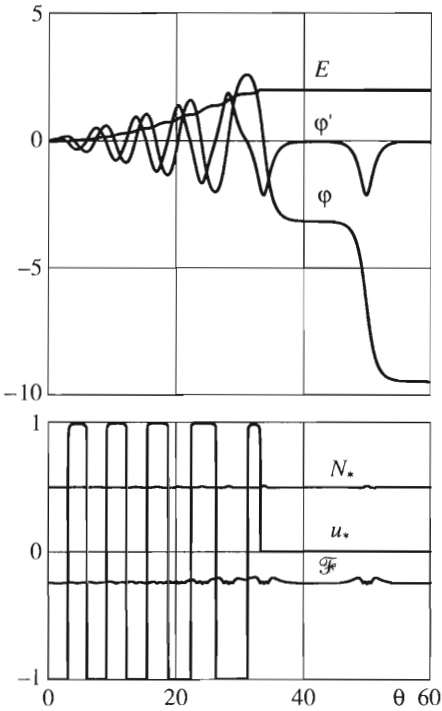
Первое условие означает, что в начальном состоянии центр масс цилиндра занимает нижнее положение. Начальная скорость φ'_0 рассчитывалась по формуле (3.15) для $E = E_0$ и $\varphi = \varphi_0 = 0$; для определенности правая часть бралась со знаком плюс.

Выходные данные содержали функции $\varphi(\theta)$, $\varphi'(\theta)$, $E(\theta)$, $u_*(\varphi(\theta), \varphi'(\theta))$, $N^*(\theta)$ и $\mathcal{F}(\theta) = |F_*(\theta)| - kN^*(\theta)$. Они характеризуют зависимость безразмерных значений угла поворота цилиндра, его угловой скорости, энергии E , управления (5.5), силы нормальной реакции плоскости качения на цилиндр и разности между модулем силы трения цилиндра о плоскость и силой нормальной реакции, умноженной на коэффициент трения от безразмерного времени θ . Величины N^* и F^* определены формулами (3.3). В проведенных расчетах полагалось

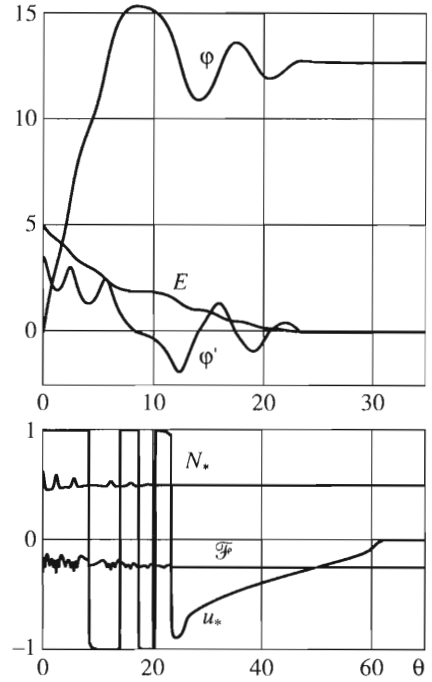
$$\zeta = 0.5, \quad k = 0.5, \quad d_E = 0.01, \quad d_\varphi = 0.01, \quad c = 0.001$$

Изменениям подвергались значения ε , λ , E_0 и E_f . Графики перечисленных функций представлены на фиг. 2–5 для четырех наборов исходных данных.

Кривые на фиг. 2–4 отвечают значениям $\lambda = 0.05$, $\varepsilon = 0.1$, $E_0 = 0$ и различным значениям E_f : $E_f = 1.5$ (фиг. 2), $E_f = 5$ (фиг. 3) и $E_f = 2 - 5.576 \cdot 10^{-6}$ (фиг. 4). Вариант с $E_f = 1.5$ соответствует раскачке цилиндра из устойчивого равновесия до угловой амплитуды $\varphi_0 = 120^\circ$, вычисляемой по формуле $\varphi_0 = \arccos(1 - E)$ для $E = 1.5$. Потребное время



Фиг. 4



Фиг. 5

$\theta_f \approx 27.6$ отвечает формуле (4.8). При $E_f = 5$ цилиндр из состояния устойчивого равновесия приводится во вращение. Время быстрогодействия $\theta_f \approx 38$ согласуется с выражением (4.8). При $E_f = 2 - 5.576 \cdot 10^{-6}$ приближенное время быстрогодействия $\theta_f \approx 33$. Этот случай отвечает переводу цилиндра из устойчивого равновесия, характеризуемого значением $\varphi = 0$, в неустойчивое равновесие со значением $\varphi = \pi(\text{mod } 2\pi)$ или $\varphi = -\pi(\text{mod } 2\pi)$. На фазовой плоскости $\varphi\varphi'$ это равновесие изображается точкой $(\pi, 0)$ или $(-\pi, 0)$ на сепаратрисе, разделяющей области колебательных и вращательных движений. Для фазовых состояний, лежащих на сепаратрисе, $E_f = 2$ (см. разд. 3). Однако при этом значении конечной энергии из-за вычислительных погрешностей и неустойчивости равновесия, в котором требуется привести систему, результаты моделирования не показывают заметной “задержки” цилиндра в неустойчивом положении равновесия. Для демонстрации эффекта задержки значение E_f вблизи $E_f = 2$ подбиралось экспериментально. Эти эксперименты показали очень высокую чувствительность моделирования эффекта задержки в неустойчивом положении равновесия к вариации значения энергии и выбору шага численного интегрирования уравнения движения.

На фиг. 5 представлены кривые для исходных данных

$$\lambda = 0.1, \quad \varepsilon = 0.2, \quad E_0 = 5, \quad E_f = 0$$

В этом случае происходит торможение начального вращения цилиндра до полной остановки в устойчивом положении равновесия. Приближенное время торможения $\theta_f \approx 24$.

Для всех приведенных вариантов моделирования кривая $\mathcal{F}(\theta)$ лежит ниже оси абсцисс, что свидетельствует о выполнении условий (3.3), гарантирующих движение цилиндра по плоскости без отрыва и проскальзывания. Соответственно кривая $N^*(\theta)$ лежит выше оси абсцисс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00563) и Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ-9831.2006.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
7. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
8. Акуленко Л.Д. Оптимальное управление движениями бифилярного маятника // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 793–806.
9. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 27–38.
10. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
11. Хи У., Аи К.В. Stabilization and path following of a single wheel robot // IEEE Trans. Mechatronics. 2004. V. 9. № 2. P. 407–419.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Москва
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
27.VII.2005