

УДК 531.391:62–50

© 2006 г. Ф. Л. Черноушко

## АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО ПОСРЕДСТВОМ ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ

Исследуется управляемое горизонтальное движение тела при наличии сил сухого трения. Управление осуществляется посредством подвижной массы, которая может перемещаться внутри тела в ограниченных пределах. Исследуются простейшие варианты периодических относительных движений подвижной массы, при которых происходит перемещение всей системы как целого. Накладываются ограничения на смещение, скорость и ускорение относительного движения подвижной массы. Определены оптимальные параметры относительного движения, при которых достигается максимальная средняя скорость движения тела.

**1. Уравнения движения.** Хорошо известно, что тело может перемещаться по горизонтальной плоскости за счет колебательных внутренних движений. Этот эффект обусловлен наличием внешнего сопротивления, например сил сухого трения между телом и плоскостью. Аналогичное явление имеет место при движении тела в сопротивляющейся среде при различных законах сопротивления.

В настоящей работе рассматривается простейшая механическая модель данного явления. Исследуются прямолинейные периодические движения некоторой массы внутри основного тела (корпуса), при которых вся система перемещается поступательно как целое вдоль горизонтальной прямой при наличии сил сухого трения между телом и плоскостью. В отличие от работы [1] в данной работе внутренняя масса не взаимодействует с внешней средой. Проводится оптимизация средней скорости тела по параметрам относительного движения.

Рассмотрим абсолютно твердое тело массы  $M$ , которое может двигаться по горизонтальной прямой. Внутри тела имеется подвижная масса  $m$ , которая также движется горизонтально (фиг. 1). В дальнейшем тело массы  $M$  и внутреннюю массу будем для краткости называть “тело  $M$ ” и “масса  $m$ ” соответственно. На тело  $M$  действует внешняя сила сухого трения  $R$ . Тела  $M$  и  $m$  взаимодействуют друг с другом. Силу взаимодействия, приложенную к телу  $M$ , обозначим через  $F$ ; тогда на массу  $m$  действует сила  $-F$ . Обозначим через  $x$  координату тела  $M$ , через  $v$  – его скорость, через  $\xi$  – смещение массы  $m$  относительно тела  $M$ , а через  $u$  и  $w$  – скорость и ускорение массы  $m$  относительно тела  $M$  соответственно.

Кинематические уравнения прямолинейного движения массы  $m$  относительно тела  $M$  запишем в виде

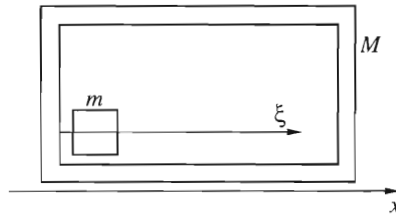
$$\dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w \quad (1.1)$$

Динамические уравнения движения масс  $M$  и  $m$  вдоль горизонтальной прямой имеют вид

$$M\dot{v} = F + R, \quad m(\dot{v} + w) = -F \quad (1.2)$$

Исключая силу  $F$  из уравнений (1.2), получим

$$\dot{v} = -\mu w + (M + m)^{-1}R, \quad \mu = m(M + m)^{-1} < 1 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Согласно закону Кулона, при сухом трении имеем

$$R = -(M+m)fg \operatorname{sign} v \text{ при } v \neq 0; \quad |R| \leq (M+m)fg \text{ при } v = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести,  $f$  – постоянный коэффициент трения.

Скольжение тела “вперед” и “назад” может происходить при разных коэффициентах трения, поэтому имеет смысл рассмотреть более общий случай *анизотропного* сухого трения. При этом сила сопротивления задается соотношениями

$$\begin{aligned} R &= -(M+m)f_+g, \quad v > 0 \\ R &= (M+m)f_-g, \quad v < 0 \\ -(M+m)f_+g &\leq R \leq (M+m)f_-g, \quad v = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения движения (1.3) массы  $M$  в общем случае анизотропного сухого трения (1.5) приводятся к виду

$$\dot{v} = -\mu w - a_+ \text{ при } v > 0, \quad \dot{v} = -\mu w + a_- \text{ при } v < 0 \quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения

$$a_+ = f_+g, \quad a_- = f_-g \quad (1.7)$$

Состояние покоя сохраняется, если внешняя сила  $(-\mu w)$  не превосходит силы трения, т.е.

$$v = 0 \text{ при } -a_+ \leq \mu w \leq a_- \quad (1.8)$$

Рассматриваются периодические с периодом  $T$  законы изменения скорости тела  $M$  при нулевой начальной скорости. Поэтому имеем условия

$$v(0) = 0, \quad v(T) = 0 \quad (1.9)$$

Смещение тела  $M$  удовлетворяет уравнению и нулевому начальному условию

$$\dot{x} = v, \quad x(0) = 0 \quad (1.10)$$

Средняя за период  $T$  скорость  $V$  тела  $M$  определяется формулой

$$V = \frac{x(T)}{T} \quad (1.11)$$

**2. Относительное движение.** Движение массы  $m$  относительно тела  $M$  описывается уравнениями (1.1) и происходит в ограниченном интервале “разрешенных” относитель-

ных перемещений. Не нарушая общности, зададим ограничение на перемещение массы  $m$  в виде

$$0 \leq \xi(t) \leq L \tag{2.1}$$

где  $L > 0$  – заданная величина. Ограничение (2.1) может определяться, например, размерами полости в теле  $M$  или имеющимися ограничителями перемещения массы  $m$ .

Будем рассматривать периодические относительные движения массы  $m$ , так что функции  $\xi(t)$ ,  $u(t)$ ,  $w(t)$  – периодические функции с периодом  $T > 0$ . Предполагаем, что функция  $\xi(t)$  принимает оба крайних значения, допускаемых неравенствами (2.1). Это предположение не ограничивает общности, так как всегда можно его выполнить за счет сдвига по координате  $\xi$  и уменьшения величины  $L$ . Выберем начало отсчета времени  $t$  в момент, когда  $\xi = 0$ . Тогда имеем

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(T) = 0; \quad \xi(\theta) = L, \quad \theta \in [0, T] \tag{2.2}$$

Так как смещение  $\xi(t)$  принимает свое минимальное значение при  $t = 0$  и  $t = T$ , скорость  $u = \dot{\xi}$  удовлетворяет условиям

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \tag{2.3}$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$u(\varepsilon_1) > 0, \quad u(T - \varepsilon_2) < 0, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0 \tag{2.4}$$

для достаточно малых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

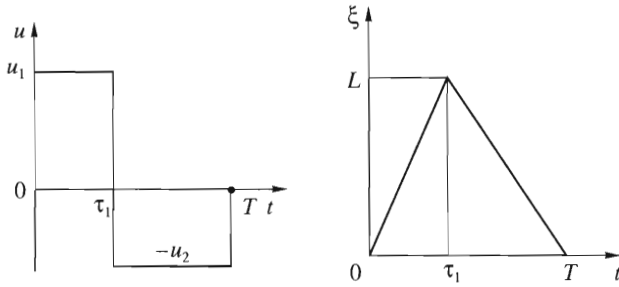
В данной работе ограничимся рассмотрением двух простейших типов периодического относительного движения массы  $m$ , удовлетворяющих наложенным условиям (2.1)–(2.4). Эти движения будем называть двухфазными и трехфазными. В *двухфазном* движении относительная скорость  $u(t)$  массы  $m$  кусочно-постоянна, причем на периоде движения имеются два участка постоянства скорости. В *трехфазном* движении относительное ускорение  $w(t)$  массы  $m$  кусочно-постоянно, и на периоде движения имеются три участка постоянства ускорения.

Нетрудно показать, что рассматриваемые двухфазное и трехфазное движения имеют при наложенных условиях периодичности наименьшее возможное число участков постоянства скорости и ускорения соответственно.

В самом деле, при одном участке постоянства скорости  $u(t)$  нельзя обеспечить условие периодичности смещения (2.2). Если имеется всего два участка постоянства ускорения  $w(t)$ , то скорость  $u(t)$  будет кусочно-линейной непрерывной функцией с двумя линейными участками на интервале  $[0, T]$ . Но такая функция при условиях (2.3) будет знакопостоянной на интервале  $[0, T]$ , и поэтому условие (2.4) не выполняется. Следовательно, должно быть как минимум три участка постоянства ускорения.

Рассматриваемые здесь двухфазное и трехфазное движения – простейшие модели следующих ситуаций. Двухфазное движение соответствует случаю большого (теоретически неограниченного) возможного относительного ускорения и ограниченной относительной скорости. Трехфазное движение отвечает ограниченному относительному ускорению. Таким образом, оба рассматриваемых движения моделируют различные ограничения относительного движения массы  $m$ , соответствующие разным возможностям двигателей, управляющих этой массой.

Приведем необходимые для дальнейшего соотношения для двухфазного и трехфазного движений.



Фиг. 2

Для двухфазного движения обозначим через  $\tau_1$  и  $\tau_2$  длительности участков постоянства скорости, а через  $u_1$  и  $-u_2$  – величины скорости на этих участках соответственно. Имеем

$$u(t) = u_1, \quad t \in (0, \tau_1); \quad u(t) = -u_2, \quad t \in (\tau_1, T), \quad T = \tau_1 + \tau_2 \quad (2.5)$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  – положительные постоянные, в соответствии с условиями (2.4). В моменты  $t = 0$  и  $t = T$  доопределим скорость  $u(t)$  соотношениями (2.3). Тогда относительное ускорение  $w(t)$  состоит из скачков в моменты  $t = 0$ ,  $t = \tau_1$  и  $t = T$  и может быть представлено в виде

$$w(t) = u_1 \delta(t) - (u_1 + u_2) \delta(t - \tau_1) + u_2 \delta(t - T) \quad (2.6)$$

Здесь  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

Конечно, скачки в начале и в конце периода можно объединить в один скачок, однако представление (2.6) удобно тем, что оно согласуется с условиями (2.3). При этом моменты  $t = 0$  и  $t = T$  рассматриваются как равноправные.

Интегрируя соотношения (2.5) при начальном условии из (2.2), получим кусочно-линейный закон для смещения

$$\xi(t) = u_1 t, \quad t \in [0, \tau_1]; \quad \xi(t) = u_1 \tau_1 - u_2 (t - \tau_1), \quad t \in [\tau_1, T] \quad (2.7)$$

Чтобы удовлетворялись наложенные условия (2.2), необходимо потребовать

$$u_1 \tau_1 = u_2 \tau_2 = L, \quad \theta = \tau_1 \quad (2.8)$$

Двухфазное движение изображено на фиг. 2. Его можно охарактеризовать, при заданном  $L$ , двумя независимыми положительными параметрами  $u_1$  и  $u_2$ . Остальные параметры, согласно условиям (2.8), выражаются через  $u_1$  и  $u_2$  соотношениями

$$\tau_1 = \theta = \frac{L}{u_1}, \quad \tau_2 = \frac{L}{u_2}, \quad T = L(u_1^{-1} + u_2^{-1}) \quad (2.9)$$

На относительную скорость массы  $m$  при двухфазном движении может быть наложено ограничение сверху. Тогда имеем ограничения

$$0 < u_i \leq U, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

где  $U > 0$  – заданная постоянная.

Для трехфазного движения обозначим через  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  длительности участков постоянства относительного ускорения, а через  $w_1$ ,  $-w_2$  и  $w_3$  – величины ускорения на соответствующих участках. Имеем

$$\begin{aligned} w(t) &= w_1, \quad t \in (0, \tau_1); \quad w(t) = -w_2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2) \\ w(t) &= w_3, \quad t \in (\tau_1 + \tau_2, T), \quad T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из уравнения  $\dot{u} = w$  и условий (2.3) и (2.4) следует, что  $w_1 > 0$ ,  $w_3 > 0$  в равенствах (2.11). Если  $w_2 \leq 0$ , то при учете неравенств  $w_1 > 0$ ,  $w_3 > 0$  заключаем, что функция  $u(t)$  строго возрастает при  $t \in (0, \tau_1)$  и  $t \in (\tau_1 + \tau_2, T)$  и не убывает при  $t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ , что противоречит второму условию (2.3). Следовательно,  $w_2 > 0$ .

Проинтегрируем уравнения (1.1) при ускорении (2.11) и начальных условиях (2.3) и (2.2). Получим относительную скорость массы  $m$  в трехфазном движении

$$\begin{aligned} u(t) &= w_1 t; \quad t \in [0, \tau_1]; \quad u(t) = w_1 \tau_1 - w_2(t - \tau_1), \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \\ u(t) &= w_1 \tau_1 - w_2 \tau_2 + w_3(t - \tau_1 - \tau_2), \quad t \in [\tau_1 + \tau_2, T] \end{aligned} \quad (2.12)$$

и ее относительное смещение

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{w_1 t^2}{2}, \quad t \in [0, \tau_1] \\ \xi(t) &= \frac{w_1 \tau_1^2}{2} + w_1 \tau_1(t - \tau_1) - \frac{w_2(t - \tau_1)^2}{2}, \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \\ \xi(t) &= \frac{w_1 \tau_1^2}{2} + w_1 \tau_1 \tau_2 - \frac{w_2 \tau_2^2}{2} + (w_1 \tau_1 - w_2 \tau_2)(t - \tau_1 - \tau_2) + \\ &+ \frac{w_3(t - \tau_1 - \tau_2)^2}{2}, \quad t \in [\tau_1 + \tau_2, T] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из второго условия (2.3) и соотношений (2.12) вытекает

$$w_1 \tau_1 - w_2 \tau_2 + w_3 \tau_3 = 0 \quad (2.14)$$

Подставляя смещение (2.13) во второе условие (2.2), получим

$$\frac{w_1 \tau_1^2}{2} + w_1 \tau_1 \tau_2 - \frac{w_2 \tau_2^2}{2} + w_1 \tau_1 \tau_3 - w_2 \tau_2 \tau_3 + \frac{w_3 \tau_3^2}{2} = 0 \quad (2.15)$$

Максимальное смещение  $\xi(\theta) = L$  достигается на интервале  $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$  при  $u(\theta) = 0$ . Из соотношений (2.12) найдем

$$\theta = \tau_1 + w_1 \tau_1 / w_2, \quad \theta \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2) \quad (2.16)$$

Подставим выражение (2.16) в соотношение (2.13) и запишем последнее условие (2.2). Получим после упрощения

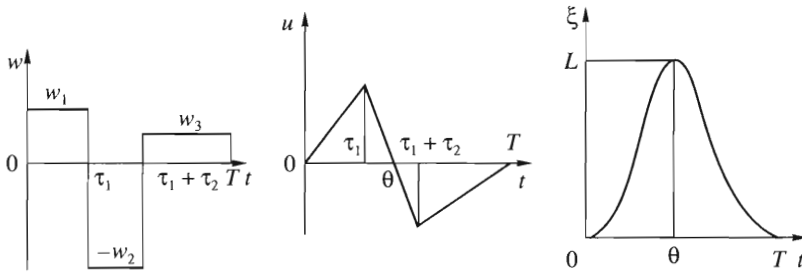
$$w_1(w_1 + w_2)\tau_1^2 = 2w_2L \quad (2.17)$$

Трехфазное движение иллюстрирует фиг. 3. Это движение, при заданном  $L$ , можно охарактеризовать тремя положительными параметрами  $w_1, w_2, w_3$ . Параметры  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  могут быть выражены посредством уравнений (2.14), (2.15), (2.17). Из равенства (2.14) имеем

$$\tau_2 = (w_1 \tau_1 + w_3 \tau_3) / w_2 \quad (2.18)$$

Подставляя выражение (2.18) в равенство (2.15), получим в результате упрощений

$$w_1(w_1 + w_2)\tau_1^2 = w_3(w_2 + w_3)\tau_3^2 \quad (2.19)$$



Фиг. 3

Разрешая соотношения (2.17)–(2.19) относительно  $\tau_1$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_2$ , последовательно находим

$$\tau_1 = \left[ \frac{2w_2L}{w_1(w_1 + w_2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_3 = \left[ \frac{2w_2L}{w_3(w_2 + w_3)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_2 = \left( \frac{2L}{w_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{w_1}{w_1 + w_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{w_3}{w_2 + w_3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.20)$$

Пользуясь равенствами (2.20), выразим длительность периода  $T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  через параметры  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ . Получим

$$T = \left( \frac{2L}{w_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{w_1 + w_2}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{w_2 + w_3}{w_3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.21)$$

На ускорение массы  $m$  при трехфазном движении может быть наложено ограничение сверху. Тогда имеем ограничения для параметров  $w_i$

$$0 < w_i \leq W, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

где  $W > 0$  – заданная положительная постоянная.

В следующих разд. 3–6 исследуется и оптимизируется движение тела  $M$  при двухфазном и трехфазном относительном движении массы  $m$  в общем случае анизотропного сухого трения (1.5). При этом для указанных движений находится максимальная (при наложенных ограничениях (2.10) и (2.22)) средняя скорость  $V$  тела  $M$  из (1.11).

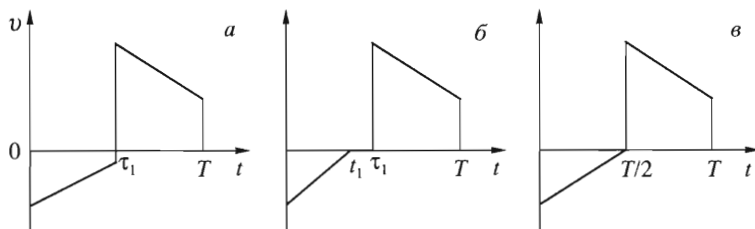
**3. Двухфазное движение.** Подставим зависимость  $w(t)$  для двухфазного движения (2.6) в уравнения (1.6). Из уравнений (1.6) и условий (1.9) следует, что скорость  $v(t)$  имеет три скачка на интервале  $[0, T]$ : два скачка на концах интервала, при которых  $v(t)$  убывает, и один скачок большей величины внутри интервала, при котором  $v(t)$  возрастает. В промежутках между скачками имеет место линейное убывание модуля скорости  $v(t)$ , а также возможно наличие участка покоя.

Как показывает несложный анализ, возможны два режима движения тела  $M$ , изображенных на фиг. 4, а, б. При режиме а участок покоя перед скачком при  $t \in (0, \tau_1]$  отсутствует, а при режиме б имеется участок покоя  $(t_1, \tau_1)$ . На фиг. 4, в изображен случай, пограничный между режимами а и б.

Расчет скорости  $v(t)$  для обоих режимов проведем при помощи соотношений (1.6), (2.6) и (1.9).

Получим для режима а

$$\begin{aligned} v(t) &= -\mu u_1 + a_- t \quad \text{при } t \in (0, \tau_1) \\ v(t) &= \mu u_2 + a_- \tau_1 - a_+(t - \tau_1) \quad \text{при } t \in (\tau_1, T) \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 4

При этом должно выполняться условие (см. фиг. 4, а)

$$v(\tau_1 - 0) = -\mu u_1 + a_- \tau_1 \leq 0 \tag{3.2}$$

Второе равенство (1.9) при учете соотношений (1.6) и (2.6) приводится к виду

$$v(T) = v(T - 0) - \mu u_2 = a_- \tau_1 - a_+ \tau_2 = 0 \tag{3.3}$$

Для режима б имеем

$$\begin{aligned} v(t) &= -\mu u_1 + a_- t, & t \in (0, t_1) \\ v(t) &= 0, & t \in (t_1, \tau_1) \\ v(t) &= \mu(u_1 + u_2) - a_+(t - \tau_1), & t \in (\tau_1, T) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь  $t_1 \in (0, \tau_1)$  – момент остановки, определяемый из условия  $v(t_1) = 0$ . Получим из соотношений (3.4)

$$t_1 = \mu u_1 / a_- < \tau_1 \tag{3.5}$$

Второе условие (1.9) для режима б дает

$$v(T) = v(T - 0) - \mu u_2 = \mu u_1 - a_+ \tau_2 = 0 \tag{3.6}$$

Заметим, что неравенства (3.2) и (3.5) взаимно исключают друг друга и определяют режимы а и б соответственно. Подставим соотношения (2.9) в эти неравенства, а также в формулы (3.3) и (3.6). Выразая  $u_2$  через  $u_1$ , получим

$$u_2 = a_+ u_1 / a_-, \quad u_1 \geq (La_- / \mu)^{\frac{1}{2}} \text{ для режима а} \tag{3.7}$$

$$u_2 = a_+ L / (\mu u_1), \quad u_1 < (La_- / \mu)^{\frac{1}{2}} \text{ для режима б} \tag{3.8}$$

Подсчитаем полное смещение  $x(T)$  тела  $M$  за период, для чего проинтегрируем  $v(t)$  по интервалу  $[0, T]$  при условии  $x(0) = 0$  (см. (1.10)).

Для режима а получим после упрощений с использованием равенства (3.3)

$$x(T) = \frac{a_- \tau_1 (\tau_1 + \tau_2)}{2} \tag{3.9}$$

Средняя скорость  $V$  движения тела  $M$  определена равенством (1.11). Для режима  $a$  на основании равенств (3.9) и (2.9) заключаем

$$V = \frac{a_- \tau_1}{2} = \frac{La_-}{2u_1} \quad (3.10)$$

Для режима  $b$ , используя равенства (3.4)–(3.6), получим

$$x(T) = \mu^2 u_1 \frac{\left[ \left( \frac{u_1}{a_+} \right) + 2 \left( \frac{u_2}{a_+} \right) - \left( \frac{u_1}{a_-} \right) \right]}{2} \quad (3.11)$$

Подсчитаем среднюю скорость (1.11), используя соотношения (3.11) и (2.9). Исключая  $u_2$  при помощи равенства (3.8), будем иметь для режима  $b$

$$V = \frac{\left[ \mu L + \left( \frac{\mu^2 u_1^2}{2} \right) (a_+^{-1} - a_-^{-1}) \right] u_1}{L + \mu u_1^2 a_+^{-1}} \quad (3.12)$$

Дальнейший анализ удобнее проводить в безразмерных переменных. Введем обозначения

$$u_0 = \left( \frac{La_-}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad c = \frac{a_+}{a_-} \quad (3.13)$$

и перейдем к безразмерным параметрам по формулам

$$u_i = u_0 x_i, \quad i = 1, 2, \quad V = \frac{(\mu La_-)^{\frac{1}{2}} \Phi}{2} \quad (3.14)$$

Тогда соотношения (3.7), (3.8), (3.10), (3.12) приводятся к виду

$$x_2 = cx_1, \quad x_1 \geq 1, \quad \Phi(x_1) = x_1^{-1} \quad \text{для режима } a \quad (3.15)$$

$$x_2 = \frac{c}{x_1}, \quad x_1 < 1, \quad \Phi(x_1) = [2c + x_1^2(1-c)]x_1(c + x_1^2)^{-1} \quad \text{для режима } b \quad (3.16)$$

**4. Оптимизация двухфазного движения.** Найдем значения скоростей  $u_1$  и  $u_2$ , при которых достигается наибольшая средняя скорость  $V$  движения тела  $M$ . Эта задача сводится к нахождению безразмерного параметра  $x_1 = x_1^* > 0$ , который доставляет максимум  $\Phi^*$  функции  $\Phi(x_1)$ , определяемой соотношениями (3.15) и (3.16). Имеем

$$\Phi^*(c) = \max_{x_1} \Phi(x_1) = \Phi(x_1^*) \quad (4.1)$$

*4.1. Случай отсутствия ограничений (2.10).* Сначала будем предполагать, что никаких ограничений сверху на скорости  $u_1$  и  $u_2$  и, следовательно, на параметры  $x_1$  и  $x_2$  не наложено. Найдем максимум (4.1) при  $x_1 \in (0, \infty)$ .



Согласно соотношениям (3.15), функция  $\Phi(x_1)$  монотонно убывает при  $x_1 \geq 1$ . Исследуем эту функцию на экстремум при  $x_1 < 1$ , для чего вычислим ее производную при помощи равенства (3.16). Получим

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = \Phi_1(z)(c+z)^{-2} \tag{4.2}$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi_1(z) = (1-c)z^2 + c(1-3c)z + 2c^2, \quad z = x_1^2 \tag{4.3}$$

Исследование квадратного трехчлена  $\Phi_1(z)$  (4.3) приводит к следующим результатам.

Трехчлен  $\Phi_1(z)$  имеет вещественные корни  $z_1, z_2$  при  $c \geq \frac{7}{9}$ . При этом, если  $c \in [\frac{7}{9}, 1]$ , оба корня лежат в области  $z \geq 1$ . Следовательно, при  $c \leq 1$  функция  $\Phi_1(z)$  положительна в интервале  $z \in (0, 1)$ , поэтому, в силу (4.2), функция  $\Phi(x_1)$  монотонно возрастает при  $x_1 \in (0, 1)$ . Следовательно, при  $c \leq 1$  абсолютный максимум функции  $\Phi(x_1)$  достигается при  $x_1 = 1$ .

В случае  $c > 1$  один из корней квадратного трехчлена (4.3), равный

$$z_1(c) = c(c-1)^{-1} \sqrt{\frac{1-3c+(9c^2+2c-7)^{\frac{1}{2}}}{2}} \tag{4.4}$$

лежит в интервале  $(0, 1)$  и соответствует максимуму функции  $\Phi(x_1)$ .

Таким образом, искомый максимум (4.1) и соответствующее значение  $x_1 = x_1^*$ , доставляющее этот максимум, определяются соотношениями

$$\Phi^*(c) = 1, \quad x_1^* = 1 \quad \text{при} \quad c \leq 1 \tag{4.5}$$

$$\Phi^*(c) = \Phi(x_1^*), \quad x_1^* = z_1^{\frac{1}{2}}(c) \quad \text{при} \quad c > 1 \tag{4.6}$$

Величина  $\Phi(x_1^*)$  определена формулой (3.16). Максимальная безразмерная средняя скорость  $\Phi^*(c)$ , согласно формулам (4.5), (4.6), реализуется в режиме *a* при  $c \leq 1$  и в режиме *b* при  $c > 1$ . На фиг. 5 изображены полученные по формулам (4.4)–(4.6) зависимости

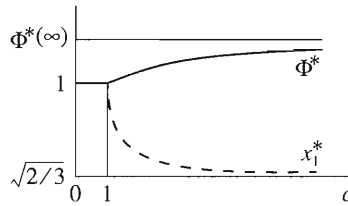
$$x_1^*(c) = z_1^{\frac{1}{2}}(c) \text{ и } \Phi^*(c).$$

Отметим некоторые свойства этих зависимостей. Функция  $x_1^*(c)$  монотонно убывает

от  $x_1^* = 1$  до  $x_1^* = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.816$  при изменении  $c$  от 1 до  $\infty$ . Функция  $\Phi^*(c)$  монотонно воз-

растает от 1 до значения  $\Phi^*(\infty) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.0887$  при изменении  $c$  от 1 до  $\infty$ . Так как

при всех  $c > 1$  функция  $\Phi^*(c)$  не превышает значения  $\Phi^*(\infty)$ , преимущество в скорости оптимального режима *b* (4.6) над режимом *a* составляет не более 9%.



Фиг. 5

Возвратимся к размерным переменным  $u_1$ ,  $u_2$  и  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  по формулам (3.14) и (2.9). Вводя еще обозначение (см. (3.13)).

$$\tau_0 = \frac{L}{u_0} = \left(\frac{\mu L}{a_-}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u_0 = \left(\frac{La_-}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

получим, согласно соотношениям (3.14), (3.15), (4.5), для оптимального движения при  $c \leq 1$

$$u_1 = u_0, \quad u_2 = cu_0, \quad \tau_1 = \tau_0, \quad \tau_2 = c^{-1}\tau_0, \quad V = \frac{(\mu La_-)^2}{2} \quad \text{при } c \leq 1 \quad (4.8)$$

При  $c > 1$ , используя формулы (3.5), (3.14), (3.16), (4.6), (4.7), имеем

$$u_1 = u_0 x_1^*(c), \quad u_2 = u_0 c / x_1^*(c), \quad \tau_1 = \tau_0 / x_1^*(c), \quad (4.9)$$

$$\tau_2 = \tau_0 c^{-1} x_1^*(c), \quad t_1 = \tau_0 x_1^*(c), \quad V = \frac{(\mu La_-)^{\frac{1}{2}} \Phi^*}{2} \quad \text{при } c > 1$$

В силу формул (4.9) и отмеченных выше свойств функции  $x_1^*(c)$  – см. фиг. 5 – справедливы следующие соотношения для длин интервалов:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tau_1 \leq t_1 = [x_1^*(c)]^2 \tau_1 < \tau_1,$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{[x_1^*(c)]^2}{c} < [x_1^*(c)]^2 < 1 \quad \text{при } c > 1$$

В наиболее простом случае изотропного сухого трения при  $a_+ = a_- = a$  имеем  $c = 1$ . В этом случае, согласно соотношениям (4.7) и (4.8), оптимален режим, для которого

$$u_1 = u_2 = u_0 = (La/\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_0 = \left(\frac{\mu L}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.10)$$

$$T = 2\tau_0, \quad V = \frac{(\mu La)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{при } c = 1$$

Этот случай изображен на фиг. 4, в.

Заметим, что, даже при отсутствии ограничений сверху (2.10) для скоростей относительного движения  $u_1, u_2$ , максимальная средняя скорость  $V$  движения тела  $M$  получилась ограниченной, согласно равенствам (4.8), (4.9). При всех значениях параметра  $c$  она оказалась заключенной в довольно узких пределах

$$(\mu La_-)^{\frac{1}{2}} \leq 2V < \Phi^*(\infty)(\mu La_-)^{\frac{1}{2}}, \quad \Phi^*(\infty) < 1.09 \quad (4.11)$$

4.2. *Случай наличия ограничений (2.10).* Предположим теперь, что на относительную скорость точки  $t$  наложено ограничение сверху (2.10). Используя обозначения (3.13) и (3.14), перейдем к безразмерным переменным и представим ограничения (2.10) в виде

$$0 < x_i \leq X, \quad i = 1, 2, \quad X = U/u_0 \quad (4.12)$$

Задача отыскания максимальной средней скорости тела  $M$  сводится к максимизации (4.1) функции  $\Phi(x_1)$ , заданной равенствами (3.15), (3.16) при ограничениях (4.12).

Рассмотрим последовательно четыре случая.

1)  $c \leq 1, x_1 \geq 1$ . В этом случае ограничения (3.15) и (4.12) непротиворечивы при  $X \geq 1$  и определяют следующий интервал изменения  $x_1$ :  $x_1 \in [1, X]$ .

2)  $c > 1, x_1 \geq 1$ . Ограничения (3.15) и (4.12) непротиворечивы при  $X \geq c$  и определяют интервал  $x_1 \in \left[1, \frac{X}{c}\right]$ .

3)  $c \leq 1, x_1 < 1$ . Ограничения (3.16) и (4.12) сводятся к неравенствам  $x_1 < 1$  и  $c/X \leq x_1 \leq X$ , которые непротиворечивы при  $X > c$  и  $X \geq c^{1/2}$ . В результате данный случай реализуется при  $X \geq c^{1/2}$  и определяет интервал  $x_1 \in \left[\frac{c}{X}, X\right]$  при  $X < 1$  и интервал  $x_1 \in \left[\frac{c}{X}, 1\right)$  при  $X \geq 1$ .

4)  $c > 1, x_1 < 1$ . Ограничения (3.16) и (4.12) совместны при  $X \geq c$  и определяют интервал  $x_1 \in \left[\frac{c}{X}, 1\right)$ .

В случаях 1 и 2 функция  $\Phi(x_1)$  (3.15) монотонно убывает при  $x_1 \geq 1$  и достигает своего максимума на левом конце интервала возможного изменения  $x_1$ , т.е. при  $x_1 = 1$ .

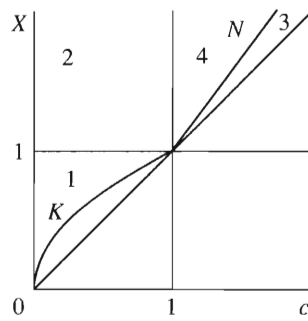
В случае 3, как показано выше, функция  $\Phi(x_1)$  (3.16) монотонно возрастает на интервале  $x_1 \in (0, 1)$ , поэтому искомым максимум достигается при  $x_1 = X$ , если  $X < 1$ , и при  $x_1 = 1-0$ , если  $X \geq 1$ .

В случае 4 единственный максимум функции  $\Phi(x_1)$  (3.16) на интервале  $x_1 \in (0, 1)$  достигается при  $x_1 = z_1^{\frac{1}{2}}$ , величина  $z_1(c)$  определена формулой (4.4). Таким образом, искомым максимум достигается здесь при  $x_1 = z_1^{\frac{1}{2}}$ , если  $c/X \leq z_1^{\frac{1}{2}}$ , и при  $x_1 = \frac{c}{X}$ , если  $\frac{c}{X} > z_1^{\frac{1}{2}}$ .

Соединяя результаты случаев 1 и 3, получим, что при  $c \leq 1$  искомым максимум достигается при

$$1) x_1^* = X, \quad \Phi^*(c) = \Phi(X) \quad \text{при} \quad c^{\frac{1}{2}} \leq X < 1 \quad (4.13)$$

$$2) x_1^* = 1, \quad \Phi^*(x) = 1 \quad \text{при} \quad c \leq 1, X \geq 1$$



Фиг. 6

Сопоставляя результаты случаев 2 и 4, приходим к следующим результатам при  $c > 1$ :

$$3) x_1^* = \frac{c}{X}, \quad \Phi^*(c) = \Phi\left(\frac{c}{X}\right) \quad \text{при} \quad 1 < c \leq X < cz_1^{-\frac{1}{2}}(c) \quad (4.14)$$

$$4) x_1^* = z_1^{\frac{1}{2}}(c), \quad \Phi^*(c) = \Phi\left(z_1^{\frac{1}{2}}(c)\right) \quad \text{при} \quad c > 1, \quad X \geq cz_1^{-\frac{1}{2}}(c)$$

В равенствах (4.13), (4.14) функция  $\Phi$  определена соотношениями (3.15), (3.16).

Таким образом, искомый максимум безразмерной скорости  $\Phi^*(c)$  (4.1) при ограничениях (4.12) полностью определен равенствами (4.13) при  $c \leq 1$  и (4.14) при  $c > 1$ .

Используя соотношения (3.13), (3.14) и (2.9), можно вернуться к исходным размерным переменным.

На фиг. 6 в плоскости  $c, X$  показаны области, соответствующие разным случаям формул (4.13) и (4.14). Рассматриваемые двухфазные движения при ограничениях (2.10) или

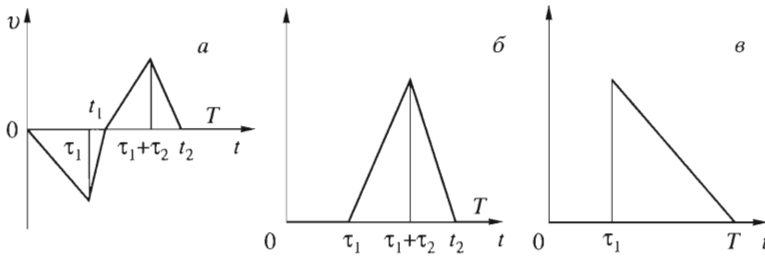
(4.12) реализуемы лишь при  $X \geq c^{\frac{1}{2}}$ , если  $c \leq 1$ , и  $X > c$ , если  $c > 1$ , т.е. при условии

$$X \geq \max\left(c^{\frac{1}{2}}, c\right) \quad (4.15)$$

Кривые  $X = c^{\frac{1}{2}}$  и  $X = cz_1^{-\frac{1}{2}}(c)$  помечены на фиг. 6 буквами  $K$  и  $N$  соответственно. Вместе с прямыми  $c = 1$ ,  $X = 1$  и  $X = c$  они разделяют область (4.15) на четыре области, помеченные цифрами 1, 2, 3, 4 и соответствующие последовательно четырем возможным решениям в формулах (4.13) и (4.14). В области 2 и на фиг. 6 реализуется режим движения  $a$ , в остальных областях 1, 3, 4 – режим  $b$ .

Отдельно рассмотрим случай изотропного сухого трения ( $a_+ = a_- = a$ ) при ограничении (2.10) или (4.12). Для этого можно обратиться к общим формулам (4.13) или воспользоваться решением в размерных переменных для этого случая (4.10). Получим, что если предельная допустимая скорость достаточно велика:  $X \geq 1$ , или, в размерных пере-

менных,  $U \geq (\mu La)^{\frac{1}{2}}$ , то оптимальным является движение (4.10). Если же  $X < 1$  (или  $U < (\mu La)^{\frac{1}{2}}$ ), то рассматриваемое двухфазное движение нереализуемо.



Фиг. 7

**5. Трехфазное движение.** Рассматриваемое движение описывается соотношениями (1.6)–(1.9), в которые нужно подставить закон (2.11) изменения ускорения. Учитывая знаки ускорений и наложенные условия, приходим к выводу, что возможны два режима движения: *a* и *б*, изображенные на фиг. 7.

В режиме *a* скорость  $v(t)$  становится отрицательной при  $t > 0$  и убывает до момента  $t = \tau_1$  смены знака ускорения. Затем скорость возрастает, проходит через нуль при некотором  $t = t_1 \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$  и продолжает возрастать до момента  $t = \tau_1 + \tau_2$ . Далее  $v(t)$  убывает и обращается в нуль при  $t = t_2 \in (\tau_1 + \tau_2, T)$ . При этом режиме тело  $M$  в начале периода движется “назад”, т.е.  $v(t) < 0$ .

В режиме *б* тело  $M$  стоит на месте при  $t \in (0, \tau_1)$  и  $t \in (t_2, T)$ , где  $t_2 \in (\tau_1 + \tau_2, T)$ , и движется вперед при  $t \in (\tau_1, t_2)$ . Скорость  $v(t)$  неотрицательна, возрастает на интервале  $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$  и убывает при  $t \in (\tau_1 + \tau_2, t_2)$ .

Интегрируя уравнения (1.6) при  $w(t)$ , заданном соотношениями (2.11), и при начальном условии (1.9), получим для режима *a*

$$\begin{aligned}
 v(t) &= (a_- - \mu w_1)t, & t \in [0, \tau_1] \\
 v(t) &= (a_- - \mu w_1)\tau_1 + (\mu w_2 + a_-)(t - \tau_1), & t \in [\tau_1, t_1] \\
 v(t) &= (\mu w_2 - a_+)(t - t_1), & t \in [t_1, \tau_1 + \tau_2] \\
 v(t) &= (\mu w_2 - a_+)(\tau_1 + \tau_2 - t_1) - (\mu w_3 + a_+)(t - \tau_1 - \tau_2), & t \in [\tau_1 + \tau_2, t_2] \\
 v(t) &= 0, & t \in [t_2, T]
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Приведем условия, которые должны выполняться для рассматриваемого режима *a*. Так как на начальном участке  $v(t) < 0$ , имеем, согласно соотношениям (5.1),

$$\mu w_1 > a_-
 \tag{5.2}$$

Момент  $t_1$  определяется из условия  $v(t_1) = 0$ , поэтому получим

$$t_1 = \tau_1 + \frac{\mu w_1 - a_-}{\mu w_2 + a_-} \tau_1 = \frac{\mu(w_1 + w_2)}{\mu w_2 + a_-} \tau_1
 \tag{5.3}$$

Чтобы тело  $M$  двигалось вперед, момент  $t_1$  должен наступить раньше, чем окончится участок  $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ , т.е.  $t_1 < \tau_1 + \tau_2$ . Данное неравенство при помощи условия (5.3) приводится к виду

$$\mu w_1 \tau_1 < \mu w_2 \tau_2 + a_-(\tau_1 + \tau_2)
 \tag{5.4}$$

Так как скорость положительна при  $t \in (t_1, \tau_1 + \tau_2)$ , должно быть выполнено неравенство

$$\mu w_2 > a_+ \quad (5.5)$$

Момент  $t_2$  определяем из условия  $v(t_2) = 0$ . Согласно соотношениям (5.1), получим

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2 + \frac{(\mu w_2 - a_+)(\tau_1 + \tau_2 - t_1)}{\mu w_3 + a_+} \quad (5.6)$$

Отсюда и из условия  $t_2 \leq T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  следует неравенство

$$(\mu w_2 - a_+)(\tau_1 + \tau_2 - t_1) \leq (\mu w_3 + a_+)\tau_3 \quad (5.7)$$

Если в соотношении (5.7) имеет место строгое неравенство, т.е. когда  $t_2 < T$ , то для осуществления в режиме  $a$  (5.1) состояния покоя  $v = 0$  при  $t \in [t_2, T]$  необходимо потребовать

$$\mu w_3 \leq a_- \quad (5.8)$$

В случае же знака равенства в (5.7), т.е. когда  $t_2 = T$ , условие (5.8) не накладывается.

Соотношения (5.2)–(5.8) вместе с сопутствующими пояснениями определяют условия существования режима  $a$ .

Подсчитаем суммарное смещение  $x(T)$  тела  $M$  за период  $T$ , для чего проинтегрируем по периоду скорость  $v(t)$  (5.1). Для этого достаточно сложить, с учетом знаков, площади треугольников под графиком функции  $v(t)$  на фиг. 7,  $a$ . Имеем равенство

$$x(T) = \frac{v(\tau_1)t_1}{2} + \frac{v(\tau_1 + \tau_2)(t_2 - t_1)}{2}$$

Подставляя в данное равенство требуемые значения из соотношений (5.1), (5.3), (5.6), получим

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{\mu(a_- - \mu w_1)(w_1 + w_2)\tau_1^2}{2(\mu w_2 + a_-)} + \frac{(\mu w_2 - a_+)(\tau_1 + \tau_2 - t_1)^2}{2} \left(1 + \frac{\mu w_2 - a_+}{\mu w_3 + a_+}\right) = \\ &= \frac{\mu(a_- - \mu w_1)(w_1 + w_2)\tau_1^2}{2(\mu w_2 + a_-)} + \frac{\mu(\mu w_2 - a_+)(w_2 + w_3)}{2(\mu w_3 + a_+)} (\tau_2 - q\tau_1)^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь введено обозначение

$$q = \frac{(\mu w_1 - a_-)}{(\mu w_2 + a_-)} \quad (5.10)$$

Преобразуем последнее выражение в скобках в равенстве (5.9), подставляя в него выражения (2.20) для  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Получим

$$\tau_2 - q\tau_1 = \left(\frac{2L}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{w_1 + w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a_-}{\mu w_2 + a_-} + \left(\frac{w_3}{w_2 + w_3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5.11)$$

Теперь подставим выражение (5.11), а также выражение (2.20) для  $\tau_1$  в соотношение (5.9). После преобразований имеем

$$x(T) = \mu L \left\{ \frac{w_2(a_- - \mu w_1)}{w_1(\mu w_2 + a_-)} + \frac{(w_1 + w_2)(w_2 + w_3)(\mu w_2 - a_+)a_-^2}{w_1 w_2 (\mu w_2 + a_-)^2 (\mu w_3 + a_+)} + \frac{w_3(\mu w_2 - a_+)}{w_2(\mu w_3 + a_+)} + \frac{2(\mu w_2 - a_+)a_-}{w_2(\mu w_2 + a_-)(\mu w_3 + a_+)} \left[ \frac{w_3(w_1 + w_2)(w_2 + w_3)}{w_1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.12)$$

Введем обозначение

$$r_1 = \left( 1 + \frac{w_2}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

и перепишем формулу (5.12), выражая  $w_1$  через  $r_1$  посредством равенства (5.13). Получим

$$x(T) = A_1 r_1^2 + A_2 r_1 + A_3 \quad (5.14)$$

$$A_1 = \frac{\mu L a_-}{\mu w_2 + a_-} \left[ 1 + \frac{(w_2 + w_3)(\mu w_2 - a_+)a_-}{w_2(\mu w_2 + a_-)(\mu w_3 + a_+)} \right]$$

$$A_2 = \frac{2\mu L(\mu w_2 - a_+)a_- [w_3(w_2 + w_3)]^{1/2}}{w_2(\mu w_2 + a_-)(\mu w_3 + a_+)}$$

$$A_3 = \mu L \left[ -1 + \frac{w_3(\mu w_2 - a_+)}{w_2(\mu w_3 + a_+)} \right] = -\frac{\mu L(w_2 + w_3)a_+}{w_2(\mu w_3 + a_+)} < 0$$

Используя равенство (5.14), формулу (2.21) для  $T$  и обозначение (5.13), подсчитаем среднюю скорость тела  $M$  в режиме  $a$

$$V = \frac{x(T)}{T} = \frac{(A_1 r_1^2 + A_2 r_1 + A_3)}{\left( \frac{2L}{w_2} \right)^{\frac{1}{2}} (r_1 + r_3)}, \quad r_3 = \left( 1 + \frac{w_2}{w_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Исследуем зависимость скорости  $V$  от параметра  $w_1 > 0$  при фиксированных  $w_2$  и  $w_3$  в режиме  $a$ . Скорость  $V$  зависит от  $w_1$  только посредством  $r_1$ . Вычислим производную скорости (5.15) по  $r_1$

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = \frac{A_1 r_1^2 + 2A_1 r_1 r_3 + A_2 r_3 - A_3}{\left( \frac{2L}{w_2} \right)^{\frac{1}{2}} (r_1 + r_3)^2} \quad (5.16)$$

При учете условия (5.5) коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  удовлетворяют неравенствам

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0$$

поэтому  $\frac{\partial V}{\partial r_1} > 0$ . Так как в силу равенства (5.13) параметр  $r_1$  монотонно возрастает при убывании  $w_1$ , скорость  $V$  монотонно возрастает с уменьшением  $w_1$ .

Значения параметра  $w_1$  в режиме  $a$  ограничены снизу неравенством (5.2). Пусть при некоторых  $w_2$  и  $w_3$ , удовлетворяющих условиям (5.5) и (5.8), значение  $w_1 = \frac{a_-}{\mu}$  допускается условиями (5.4) и (5.7). Тогда наибольшее значение скорости  $V$  реализуется в режиме  $a$  в пределе при  $w_1 = \frac{a_-}{\mu} + 0$ , т.е. на границе режимов  $a$  и  $b$ . Заметим, что режим  $b$ , в котором отсутствует обратное движение тела  $M$ , представляется также более естественным, простым и удобным для практической реализации, поэтому в дальнейшем рассматривается только режим  $b$ .

Интегрируя уравнения (1.6) для режима  $b$  при ускорении  $w(t)$ , определяемом соотношениями (2.11), получим

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_1] \\ v(t) &= (\mu w_2 - a_+)(t - \tau_1) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \\ v(t) &= (\mu w_2 - a_+)\tau_2 - (\mu w_3 + a_+)(t - \tau_1 - \tau_2) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_1 + \tau_2, t_2] \\ v(t) &= 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_2, T] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Приведем условия, обеспечивающие реализацию режима  $b$ . Чтобы на интервале  $[0, \tau_1]$  тело  $M$  оставалось в покое, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu w_1 \leq a_- \quad (5.18)$$

Как и для режима  $a$ , должно быть выполнено неравенство (5.5). Момент  $t_2$  определяется из условия  $v(t_2) = 0$ . Согласно соотношениям (5.17), имеем

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2 + \frac{\mu w_2 - a_+}{\mu w_3 + a_+} \tau_2 \quad (5.19)$$

Условие  $t_2 \leq T$  приводит к неравенству

$$(\mu w_2 - a_+)\tau_2 \leq (\mu w_3 + a_+)\tau_3 \quad (5.20)$$

Если  $t_2 < T$ , то на интервале  $[t_2, T]$  должно сохраняться состояние покоя тела  $M$ , поэтому при строгом неравенстве в (5.20) должно выполняться условие, аналогичное (5.18). Имеем

$$\mu w_3 \leq a_- \quad \text{при} \quad (\mu w_2 - a_+)\tau_2 < (\mu w_3 + a_+)\tau_3 \quad (5.21)$$

Если же в условии (5.20) имеет место знак равенства, т.е. если

$$(\mu w_2 - a_+)\tau_2 = (\mu w_3 + a_+)\tau_3 \quad (5.22)$$

то выполнение условия  $\mu w_3 \leq a_-$  не требуется. В дальнейшем будем иметь в виду, что может выполняться одно из двух ограничений: либо совокупность неравенств (5.21), либо альтернативное условие – равенство (5.22).



Подсчитаем смещение  $x(T)$  как площадь треугольника под графиком функции  $u(t)$  на фиг. 7, б

$$x(T) = \frac{v(\tau_1 + \tau_2)(t_2 - \tau_1)}{2} \quad (5.23)$$

Подставляя в равенство (5.23) выражения  $u(t)$  (5.17) и  $t_2$  (5.19), получим

$$x(T) = \frac{\mu(w_2 + w_3)(\mu w_2 - a_+) \tau_2^2}{2(\mu w_3 + a_+)} \quad (5.24)$$

Вычислим среднюю скорость, используя равенства (1.11), (5.24) и формулы (2.20), (2.21) для  $\tau_2$  и  $T$ . Здесь снова применяем обозначения  $r_1$  и  $r_3$  согласно соотношениям (5.13) и (5.15). В результате получим для режима б

$$V = \frac{x(T)}{T} = \frac{\mu \left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (w_2 + w_3)(\mu w_2 - a_+)(r_1 + r_3)}{w_2^{\frac{1}{2}}(\mu w_3 + a_+)r_1^2 r_3^2} \quad (5.25)$$

Перейдем, аналогично формулам (3.14), к безразмерным переменным

$$w_i = \frac{a_- y_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, 3, \quad V = \left(\frac{\mu L a_-}{2}\right) F, \quad c = \frac{a_+}{a_-} \quad (5.26)$$

Тогда при учете равенств (5.13) и (5.15) для  $r_1$  и  $r_3$  соотношение (5.25) преобразуем к виду

$$F(y) = \frac{(y_2 - c) \left[ y_1^{\frac{1}{2}} y_3 (y_1 + y_2)^{\frac{1}{2}} + y_1 y_3^{\frac{1}{2}} (y_2 + y_3)^{\frac{1}{2}} \right]}{y_2^{\frac{1}{2}} (y_1 + y_2) (y_3 + c)} \quad (5.27)$$

Здесь  $y = (y_1, y_2, y_3)$  – трехмерный вектор.

Ограничения (5.18) и (5.5) в безразмерных переменных (5.26) примут вид

$$0 < y_1 \leq 1, \quad y_2 > c \quad (5.28)$$

Для преобразования условий (5.21) и (5.22) к безразмерному виду подставим выражения (5.26) в формулы (2.20) и вычислим отношение

$$\tau^0 = \frac{\tau_2}{\tau_3} = \frac{y_3 (y_1 + y_2)^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}} y_3^{\frac{1}{2}} (y_2 + y_3)^{\frac{1}{2}}}{y_2 (y_1 + y_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.29)$$

Подставим отношение (5.29) в условия (5.21), (5.22) и перейдем к безразмерным переменным (5.26) в этих условиях. Условие (5.21) при учете второго неравенства (5.28) приводится к виду

$$0 < y_3 \leq 1 \quad \text{при} \quad \tau^0 < \frac{(y_3 + c)}{(y_2 - c)} \quad (5.30)$$

Второе неравенство (5.30) выразим явно через  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), используя соотношение (5.29). Вводя обозначение

$$\psi(y) = c^2(y_1 + y_2) + y_3(2y_1c + c^2 - y_1y_2) \quad (5.31)$$

представим условие (5.30) в виде

$$0 < y_3 \leq 1 \quad \text{при} \quad \psi(y) > 0 \quad (5.32)$$

Альтернативное условие (5.22) преобразуется к виду

$$\psi(y) = 0 \quad (5.33)$$

Режим *б* осуществим при условии  $y \in D$ , область  $D$  определяется неравенствами (5.28), а также условиями (5.32) и (5.33).

**6. Оптимизация трехфазного движения.** Найдем значения параметров  $w_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), при которых достигается наибольшая средняя скорость  $V$  движения тела  $M$  в трехфазном режиме *б*. Эта задача сводится к определению вектора  $y$ , доставляющего максимум функции  $F$  (5.27). Аналогично изложенному в разд. 4 сначала не будем накладывать ограничений сверху (2.22) на искомые параметры, т.е. будем искать максимум  $F$  при  $y \in D$ , а затем введем эти ограничения.

Вычисляя частные производные функции  $F$  (5.27) по  $y_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), получим неравенство

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} > 0 \quad (6.1)$$

при всех  $y_i > 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), и соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = G_1 + G_2(2y_1 + 2c - y_3) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} = G_3 \left[ 2c(y_1 + y_2)^{\frac{1}{2}}(y_2 + y_3)^{\frac{1}{2}}y_3 + y_1^{\frac{1}{2}}(2cy_3 - y_2y_3 + cy_2) \right] \quad (6.3)$$

Здесь  $G_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – некоторые функции от  $y$ , положительные при всех  $y_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

*6.1. Случай отсутствия ограничений (2.22).* Из неравенства (6.1) следует, что функция  $F$  не имеет внутренних экстремумов в области  $D$ , и ее максимум достигается на границе этой области, включая, возможно, бесконечно удаленные точки.

Граница области  $D$ , согласно соотношениям (5.28), (5.32), (5.33), состоит из участков плоскостей  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = c$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_3 = 1$  и поверхности  $\psi(y) = 0$ . При выполнении одного из условий  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = c$ ,  $y_3 = 0$  функция  $F$  (5.27) обращается в нуль, и на соответствующих участках границы искомый максимум не достигается.

На участке границы  $y_3 = 1$  в силу условия (6.1) максимум может достигаться лишь на одной из границ этого участка, т.е. при  $y_1 = 1$  или  $\psi(y) = 0$ . Следовательно, достаточно рассмотреть только те участки границы области  $D$ , где  $y_1 = 1$  или  $\psi(y) = 0$ .

6.1.1. Пусть сначала  $y_1 = 1$  и  $\psi(y) \neq 0$ . Тогда должно быть выполнено условие (5.32), которое при  $y_1 = 1$  и учете равенства (5.31) распадается на два условия:

$$\begin{aligned} 0 < y_3 \leq 1 \quad \text{при} \quad y_2 \leq c(c + 2) \\ 0 < y_3 \leq 1 \quad \text{и} \quad y_3 < \psi_1(y_2) \quad \text{при} \quad y_2 > c(c + 2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь введено обозначение

$$\Psi_1(y_2) = \frac{c^2(y_2 + 1)}{y_2 - c(c + 2)} \quad \text{при } y_2 > c(c + 2) \quad (6.5)$$

Так как в рассматриваемом случае  $y_1 = 1$  и, согласно условиям (6.4),  $y_3 \leq 1$ , из соотношения (6.2) следует  $\frac{\partial F}{\partial y_2} > 0$ , поэтому в данном случае максимум функции  $F$  по  $y_2$  достигается при  $y_2 \rightarrow \infty$ . Подставляя  $y_1 = 1$  и  $y_2 = \infty$  в равенство (5.27), получим

$$F = y_3^{\frac{1}{2}} \left( y_3^{\frac{1}{2}} + 1 \right) (y_3 + c)^{-1} \quad (6.6)$$

Область изменения  $y_3$  при  $y_2 \rightarrow \infty$  становится, согласно соотношениям (6.4) и (6.5), интервалом

$$\begin{aligned} 0 < y_3 < c^2 & \quad \text{при } c < 1 \\ 0 < y_3 \leq 1 & \quad \text{при } c \geq 1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Функция (6.6), как показывает элементарное исследование, имеет единственный максимум по  $y_3$  при  $y_3 \geq 0$ , который достигается при

$$y_3 = y_3^0 = c + 2c^2 + 2c(c + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Нетрудно проверить, что как при  $c < 1$ , так и при  $c \geq 1$  справедливо неравенство  $y_3^0 > \min(1, c^2)$ , так что значение  $y_3^0$  лежит вне интервала, определяемого соотношениями (6.7) как при  $c < 1$ , так и при  $c \geq 1$ , поэтому функция (6.6) строго возрастает на интервале (6.7) и достигает своего максимума на правой границе этого интервала. Имеем

$$\begin{aligned} \max F = 1, \quad y_2 = \infty, \quad y_3 = c^2 - 0 & \quad \text{при } c < 1 \\ \max F = 2(c + 1)^{-1}, \quad y_2 = \infty, \quad y_3 = 1 & \quad \text{при } c \geq 1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Результат (6.8) получен при условиях  $y_1 = 1, \Psi(y) \neq 0$ .

6.1.2. Рассмотрим вторую возможность для достижения максимума функции  $F$ , а именно поверхность  $\Psi(y) = 0$ . При помощи равенства (5.31) находим в этом случае

$$y_3 = \frac{c^2(y_1 + y_2)}{y_1 y_2 - 2y_1 c - c^2} \quad \text{при } y_1 y_2 - 2y_1 c - c^2 > 0 \quad (6.9)$$

Подставим это выражение для  $y_3$  в соотношение (5.27). Получим после упрощений

$$F = (y_1^{-1} + y_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \quad (6.10)$$

Максимум функции (6.10) по  $y_1, y_2$  при ограничениях (5.28) достигается при  $y_1 = 1, y_2 = \infty$  и равен  $F = 1$ . Из равенства (6.9) при этом получим  $y_3 = c^2$  при любом  $c$ .

Сопоставляя эти результаты с соотношениями (6.8), приходим к выводу, что абсолютный максимум функции  $F$  по  $y \in D$  определяется равенствами

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \infty, \quad y_3 = c^2, \quad F = 1 \quad (6.11)$$

при любых  $c > 0$ .

Соответствующие размерные переменные находим по формулам (5.26), (2.20), (5.19) в виде

$$w_1 = \frac{a_-}{\mu}, \quad w_2 \rightarrow \infty, \quad w_3 = \frac{a_+^2}{a_- \mu}, \quad V = \left( \frac{\mu L a_-}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

$$\tau_1 = \left( \frac{2\mu L}{a_-} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = \frac{(2\mu L a_-)^{\frac{1}{2}}}{a_+}, \quad t_2 = \tau_1 + \tau_3 = T$$

Отметим некоторые особенности построенного оптимального режима (6.12).

В момент  $t = \tau_1$  имеет место скачок скорости тела  $M$ . Пользуясь формулами (5.17), (6.12), (2.20) и раскрывая неопределенность, найдем величину этого скачка

$$\Delta v = v(\tau_1 + 0) - v(\tau_1 - 0) = \mu w_2 \tau_2 = \mu (2L)^{\frac{1}{2}} \left( w_1^{\frac{1}{2}} + w_3^{\frac{1}{2}} \right) = \left( \frac{2\mu L}{a_-} \right)^{\frac{1}{2}} (a_+ + a_-) \quad (6.13)$$

Согласно соотношениям (5.17) и (6.13), скорость  $v(t)$  тела  $M$  в оптимальном режиме (6.12) изменяется следующим образом:

$$v(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau_1), \quad v(\tau_1 + 0) = \Delta v$$

$$v(t) = \Delta v - \left( \frac{a_+}{a_-} \right) (a_+ + a_-) (t - \tau_1) \quad \text{при} \quad t \in (\tau_1, T) \quad (6.14)$$

$$v(T) = 0$$

Здесь участок покоя тела  $M$  в конце периода отсутствует. График изменения скорости  $v(t)$  в оптимальном режиме показан на фиг. 7, в.

В случае изотропного сухого трения ( $a_+ = a_- = a$ ) имеем, согласно формулам (6.12), (6.13),

$$w_1 = w_3 = \frac{a}{\mu}, \quad w_2 = \infty, \quad \tau_1 = \tau_3 = \left( \frac{2\mu L}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_2 = 0 \quad (6.15)$$

$$\Delta v = 2(2\mu L a)^{\frac{1}{2}}, \quad V = \left( \frac{\mu L a}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

6.2. *Случай наличия ограничений (2.22).* Перейдем к задаче максимизации средней скорости  $V$  при наличии ограничений сверху (2.22) для ускорения относительного движения. Запишем эти ограничения в безразмерных переменных (5.26)

$$0 < y_i \leq Y, \quad i = 1, 2, 3, \quad Y = \frac{\mu W}{a_-} \quad (6.16)$$

Поставленная задача оптимизация сводится к отысканию максимума функции  $F$  (5.27) по области  $D^*$ , которая является пересечением области  $D$ , определяемой условиями (5.28), (5.32), (5.33), с множеством, задаваемым ограничениями (6.16).

Объединяя условия (5.28) и (6.16), получим, что область  $D^*$  будет непустым множеством, если

$$Y > c \tag{6.17}$$

а параметры  $y_i$  удовлетворяют неравенствам

$$0 < y_1 \leq \min(1, Y), \quad c < y_2 \leq Y, \quad 0 < y_3 \leq Y \tag{6.18}$$

Принимая во внимание условия (5.32) и (5.33), получим, что  $y \in D^*$ , если одновременно выполнены либо условия

$$0 < y_1 \leq \min(1, Y), \quad c < y_2 \leq Y, \quad 0 < y_3 \leq \min(1, Y), \quad \psi(y) > 0 \tag{6.19}$$

либо условия

$$0 < y_1 \leq \min(1, Y), \quad c < y_2 \leq Y, \quad 0 < y_3 \leq Y, \quad \psi(y) = 0 \tag{6.20}$$

Как и в случае отсутствия ограничений (2.22), в силу неравенства (6.1) максимум функции  $F$  не может достигаться внутри области  $D^*$  и на плоскостях  $y_1 = 0, y_2 = c, y_3 = 0$ , где имеем  $F = 0$  согласно соотношениям (5.27). Далее, на участках плоскостей  $y_3 = 1, y_3 = Y$  и  $y_2 = Y$  в силу неравенства (6.1) максимум  $F$  может достигаться лишь на границах этих участков, т.е. при выполнении еще одного из оставшихся ограничений (6.19), (6.20), т.е. либо при  $y_1 = \min(1, Y)$ , либо при  $\psi(y) = 0$ .

В результате условия (6.19) вместе с неравенством (6.17) приводятся к следующим двум случаям:

$$y_1 = 1, \quad c < y_2 \leq Y, \quad 0 < y_3 \leq 1, \quad \psi(y) > 0 \quad \text{при} \quad Y > \max(1, c) \tag{6.21}$$

$$y_1 = Y, \quad c < y_2 \leq Y, \quad 0 < y_3 \leq Y, \quad \psi(y) > 0 \quad \text{при} \quad c < Y \leq 1 \tag{6.22}$$

Третий возможный случай задается условиями (6.20) и (6.17).

Рассмотрим последовательно эти три случая.

6.2.1. Пусть выполнены условия (6.21). Из соотношения (6.2) при  $y_1 = 1, y_3 \leq 1$  имеем, как и в случае 6.1.1,

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} > G_2(2 + 2c - 2y_3) > 0$$

Следовательно, максимум функции  $F$  при условиях (6.21) достигается при  $y_2 = Y$ . Неравенство  $\psi(y) > 0$  из (6.21) при учете соотношений  $y_1 = 1, y_2 = Y$  и (5.31) преобразуется к виду

$$c^2(1 + Y) + y_3(2c + c^2 - Y) > 0 \tag{6.23}$$

а равенство (6.3) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} = G_3 \left[ 2c(1 + Y)^{\frac{1}{2}}(Y + y_3)^{\frac{1}{2}}y_3^{\frac{1}{2}} + 2cy_3 - Yy_3 + cY \right] \tag{6.24}$$

Здесь  $G_3 > 0$ .

Оценим снизу производную (6.24) при  $Y > 0, 0 < y_3 \leq 1$ . Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > G_3(4cy_3 - Yy_3 + cY) \quad (6.25)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > G_3[4y_3 + Y(1 - y_3)] > 0 \quad \text{при } c \geq 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > G_3cY > 0 \quad \text{при } c < 1, Y \leq 4c$$

В случае  $c < 1, Y > 4c$  перепишем оценку (6.25) в форме

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > G_3(Y - 4c)[\psi_2(Y) - y_3] \quad (6.26)$$

где введено обозначение

$$\psi_2(Y) = cY(Y - 4c)^{-1} \quad (6.27)$$

Заметим, что функция  $\psi_2(Y)$  монотонно убывает с ростом  $Y$ .

Рассмотрим раздельно случаи

$$Y \in (4c, 4c(1 - c)^{-1}), \quad Y \geq 4c(1 - c)^{-1} \quad (6.28)$$

которые могут встретиться при условиях  $c < 1, Y > 4c$ . В первом случае (6.28) при учете обозначения (6.27) получим

$$\psi_2(Y) > \psi_2(4c(1 - c)^{-1}) = 1 \quad (6.29)$$

Так как  $y_3 \leq 1$ , из оценки (6.26) вследствие соотношения (6.29) имеем  $\frac{\partial F}{\partial y_3} > 0$  в первом

из случаев (6.28).

Во втором случае (6.28) заведомо выполнено неравенство  $Y > c(c + 2)$ , поэтому условие (6.23) представляется в виде  $y_3 < \psi_1(Y)$ , функция  $\psi_1$  определена равенством (6.5). Следовательно, оценка (6.26) примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > G_3(Y - 4c)[\psi_2(Y) - \psi_1(Y)]$$

Подставляя в полученное неравенство функции  $\psi_1(Y)$  и  $\psi_2(Y)$  из формул (6.5) и (6.27) соответственно, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} > \frac{G_3c[(1 - c)Y^2 - 3c(1 - c)Y + 4c^2]}{Y - c(c + 2)} \quad (6.30)$$

В рассматриваемом втором случае (6.28) имеем

$$c < 1, \quad Y \geq 4c(1 - c)^{-1} > 3c$$

и поэтому из оценки (6.30) вытекает неравенство  $\frac{\partial F}{\partial y_3} > 0$ .

Итак, доказано, что  $\frac{\partial F}{\partial y_3} > 0$  при условиях  $y_2 = Y$  и (6.21).

Следовательно, в случае 6.2.1 максимум функции  $F$  реализуется при  $y_1 = 1, y_2 = Y$  и наибольшем значении  $y_3 = 1$ , допускаемом условиями (6.21). Требуется еще проверить неравенство  $\psi(y) > 0$  из (6.21). Это неравенство при  $y_1 = 1, y_2 = Y$  имеет вид (6.23). Подставляя в него  $y_3 = 1$ , получим после упрощений условие

$$2c + (c - 1)Y > 0 \tag{6.31}$$

Введем обозначение

$$Y_0(c) = 2c/(1 - c), \quad c < 1 \tag{6.32}$$

Условие (6.31) выполняется при  $c \geq 1$  и при  $c < 1, Y < Y_0(c)$ .

В результате получим, что искомый максимум функции  $F$  (5.27) в случае 6.2.1 определяется соотношениями

$$y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = 1, \quad F = \frac{2(Y - c)}{(1 + c)Y^{\frac{1}{2}}(Y + 1)^{\frac{1}{2}}} \tag{6.33}$$

при  $c \geq 1, Y > c$  и при  $c < 1, 1 < Y < Y_0(c)$

6.2.2. Пусть выполнены условия (6.22). Из соотношения (6.2) при  $y_1 = Y, y_3 \leq Y$  имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} > G_2(2Y + 2c - y_3) > 0$$

Отсюда, как и в случае 6.1.1, получим  $y_2 = Y$ . Неравенство  $\psi(y) > 0$  снова примет вид (6.23), а соотношение (6.3) приводится к виду (6.24). Данное в случае 6.2.1 доказательство неравенства  $\frac{\partial F}{\partial y_3} > 0$  было проведено для любых  $Y > 0$  и  $0 < y_3 \leq 1$  и поэтому остается справедливым и в рассматриваемом случае.

Следовательно, максимум функции  $F$  в данном случае достигается при  $y_2 = Y$  и наибольшем значении  $y_3 = Y$ , допускаемом условиями (6.22).

Для проверки условия  $\psi(y) > 0$  подставим  $y_3 = Y$  в неравенство (6.23). Получим после упрощения

$$Y^2 - 2c(c + 1)Y - c^2 < 0 \tag{6.34}$$

Единственный положительный корень квадратного трехчлена (6.34) равен

$$Y^*(c) = c \left[ c + 1 + (c^2 + 2c + 2)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{6.35}$$

Квадратный трехчлен (6.34) отрицателен при  $Y < Y^*(c)$  и положителен при  $Y > Y^*(c)$ , поэтому неравенство (6.34) выполнено при  $Y < Y^*(c)$ . В рассматриваемом случае 6.2.2 должны выполняться еще неравенства  $c < Y \leq 1$  из (6.22). Таким образом, имеем условия реализуемости случая 6.2.2 в виде

$$c < Y < \min(1, Y^*(c)) \tag{6.36}$$

Заметим, что в силу равенства (6.35) имеем  $Y^*(c) > c$  при всех  $c > 0$ , а условие  $1 < Y^*(c)$  приводится к виду

$$c^2 + 2c(c + 1) - 1 > 0$$

Это неравенство, в свою очередь, приводится к виду  $c > \frac{1}{3}$ . Таким образом, имеем

$$Y^*(c) \leq 1 \quad \text{при} \quad c \leq \frac{1}{3}; \quad Y^*(c) > 1 \quad \text{при} \quad c > \frac{1}{3} \quad (6.37)$$

Подставляя  $y_1 = y_2 = y_3 = Y$  в соотношение (5.27) и учитывая неравенства (6.36) и (6.37), получим искомое решение в случае 6.2.2

$$y_1 = y_2 = y_3 = Y, \quad F = (2Y)^{\frac{1}{2}} \frac{Y - c}{Y + c} \quad (6.38)$$

$$\text{при} \quad c \leq \frac{1}{3}, \quad c < Y \leq Y^*(c) \quad \text{и} \quad \text{при} \quad c > \frac{1}{3}, \quad c < Y < 1$$

6.2.3. Предполагаем, что выполнены условия (6.20). Из равенства  $\psi(y) = 0$ , как и в случае 6.1.2, выразим  $y_3$  в форме (6.9). Подставляя выражение (6.9) в равенство (5.27), получим  $F$  в виде формулы (6.10). Так как функция  $F$  (6.10) монотонно возрастает по  $y_1, y_2$ , искомый максимум достигается при наибольших  $y_1, y_2$ , допускаемых условиями (6.20). Совокупность этих ограничений задается неравенствами

$$0 < y_1 \leq \min(1, Y), \quad c < y_2 \leq Y \quad (6.39)$$

а также условием  $y_3 \leq Y$ , которое при помощи равенства (6.9) преобразуется к виду

$$y_2(Yy_1 - c^2) \geq (2Yc + c^2)y_1 + c^2Y \quad (6.40)$$

В плоскости  $y_1, y_2$  неравенства (6.39) задают прямоугольник, а неравенство (6.40) – гиперболу с асимптотами  $y_1 = c^2Y^{-1}$  и  $y_2 = 2c + c^2Y^{-1}$ , изображенную кривой  $H$  на фиг. 8. Точки, допустимые по условиям (6.39) и (6.40), лежат справа и выше от гиперболы  $H$  и в то же время в прямоугольнике (6.39). Так как функция  $F$  (6.10) монотонно возрастает по обоим аргументам  $y_1, y_2$ , искомый максимум всегда лежит в точке  $A$  с координатами (см. фиг. 8).

$$y_1 = \min(1, Y), \quad y_2 = Y \quad (6.41)$$

если только значения (6.41) удовлетворяют неравенству (6.40). Иначе данный вариант режима  $b$  неосуществим. Значение функции  $F$  определяется формулой (6.10), а значение параметра  $y_3$  – соотношением (6.9).

Рассмотрим отдельно случаи  $Y \geq 1$  и  $Y < 1$ .

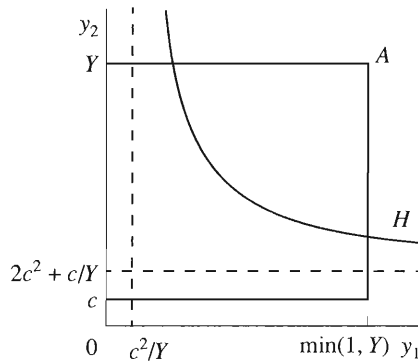
При  $Y \geq 1$  из соотношений (6.40), (6.41) имеем

$$y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad Y^2 - 2c(c + 1) - c^2 \geq 0$$

Последнее неравенство при учете результатов анализа квадратного трехчлена (6.34) представляется в виде  $Y \geq Y^*(c)$ , величина  $Y^*(c)$  определена соотношением (6.35). Принимая во внимание еще равенства (6.9) и (6.10), получим

$$y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = c^2 \frac{1 + Y}{Y - 2c - c^2}, \quad F = \left[ \frac{Y}{Y + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad Y \geq \max(1, Y^*(c)) \quad (6.42)$$





Фиг. 8

При  $Y < 1$  из соотношений (6.40), (6.41) получим

$$y_1 = y_2 = Y, \quad Y^2 - 2Yc - 3c^2 = (Y + c)(Y - 3c) \geq 0$$

Используя еще формулы (6.9) и (6.10), найдем для данного случая

$$y_1 = y_2 = Y, \quad y_3 = \frac{2c^2 Y}{Y^2 - 2cY - c^2}, \quad F = \left(\frac{Y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad 3c \leq Y < 1 \quad (6.43)$$

Закончив анализ всех возможностей, можно свести воедино полученные результаты для случая 6.2. Эти результаты и области их существования даны формулами (6.33) для случая 6.2.1, (6.38) для случая 6.2.2 и (6.42), (6.43) для случая 6.2.3. Решения получены в области  $Y > c$  плоскости параметров  $(c, Y)$ .

Однако, как можно заметить из представленных решений, области их существования в плоскости  $(c, Y)$  не вполне смыкаются друг с другом. Существуют две зоны области  $Y > c$ , которые требуют дополнительного рассмотрения.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости неравенств

$$Y^*(c) < 3c \quad \text{при} \quad c \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \quad Y^*(c) < Y_0(c) \quad \text{при} \quad c \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad (6.44)$$

Функции  $Y^*(c)$  и  $Y_0(c)$  заданы формулами (6.35) и (6.32) соответственно.

Из первого неравенства (6.44) следует, что в плоскости  $(c, Y)$  имеется непустая область  $S_1$ , определяемая условиями

$$Y^*(c) < Y < 3c, \quad c \in (0, 1/3) \quad (6.45)$$

В области (6.45) решение не определено. Соседние с областью  $S_1$  решения (6.38) и (6.43) имеют место в областях  $Y \leq Y^*(c)$  и  $Y \geq 3c$  соответственно.

Таким образом, в области  $S_1$  режим  $\bar{b}$  невозможен.

Второе неравенство (6.44) определяет область  $S_2$  условиями

$$Y^*(c) < Y < Y_0(c), \quad c \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad (6.46)$$

В области (6.46) имеют место как решение (6.33), так и решение (6.42). Сравнивая соответствующие максимальные значения функции  $F$ , даваемые формулами (6.33) и (6.42), заключаем, что в области (6.46) значение  $F$  из (6.42) больше, чем из (6.33), поэтому в области  $S_2$  следует выбрать решение (6.42), и границей областей, в которых  $F$  определяется формулами (6.33) и (6.42), будет кривая  $Y = Y^*(c)$ , на которой функция  $F$  имеет скачок.

На основании формул (6.33), (6.38), (6.42), (6.43) и анализа областей (6.45) и (6.46) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 &1) y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = 1, \quad F = \frac{2(Y-c)}{(1+c)Y^{\frac{1}{2}}(Y+1)^{\frac{1}{2}}} \\
 &\text{при } c \geq 1, \quad Y > c \quad \text{и при } \frac{1}{3} < c < 1, \quad 1 < Y < Y^*(c) \\
 &2) y_1 = y_2 = y_3 = Y, \quad F = (2Y)^{\frac{1}{2}} \frac{Y-c}{Y+c} \\
 &\text{при } c \leq \frac{1}{3}, \quad c < Y \leq Y^*(c) \quad \text{и при } c > \frac{1}{3}, \quad c < Y < 1 \\
 &3) y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = c^2 \frac{Y+1}{Y-2c-c^2}, \quad F = \left[ \frac{Y}{Y+1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } Y \geq 1, \quad Y \geq Y^*(c) \\
 &4) y_1 = Y, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = \frac{2c^2 Y}{Y^2 - 2cY - c^2}, \quad F = \left( \frac{Y}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } 3c \leq Y < 1
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

На фиг. 9 и 10 в разных масштабах в плоскости  $(c, Y)$  показаны прямые  $c = 1$ ,  $Y = 1$ ,  $Y = c$ , отрезки прямых  $c = \frac{1}{3}$  и  $Y = 3c$  при  $Y \leq 1$ , кривая  $Y = Y^*(c)$  и отрезок кривой  $Y = Y_0(c)$  при  $c \geq \frac{1}{3}$ , изображенный штрихами. Цифры на фиг. 9, 10 отвечают номеру случая в формулах (6.47).

В случае изотропного сухого трения ( $c = 1$ ) соотношения (6.47) принимают вид

$$y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = 1, \quad F = \frac{(Y-1)}{Y^{\frac{1}{2}}(Y+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } 1 < Y \leq 2 + \sqrt{5} \tag{6.48}$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = Y, \quad y_3 = \frac{Y+1}{Y-3}, \quad F = \left( \frac{Y}{Y+1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } Y > 2 + \sqrt{5}$$

Переход к исходным размерным переменным в решениях (6.47), (6.48) можно осуществить при помощи формул (5.26), (6.16) и (2.20), (2.21).

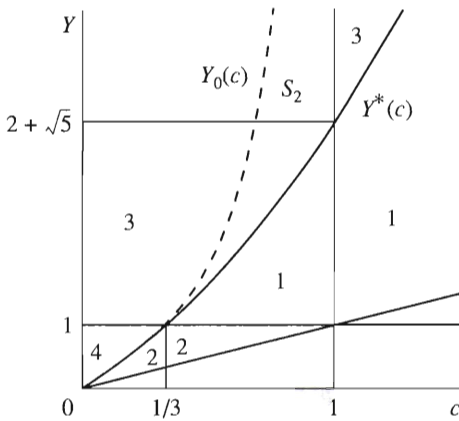
**7. Обсуждение результатов.** Итак, оптимальные двух- и трехфазные движения при наличии анизотропного сухого трения полностью построены как в отсутствие ограничений для относительной скорости (2.10) и для относительного ускорения (2.22) массы  $m$ , так и при наличии этих ограничений.

Отметим некоторые характерные особенности полученных оптимальных движений. В отсутствие ограничений (2.10) средняя скорость двухфазного движения лежит в пределах (4.11), т.е.

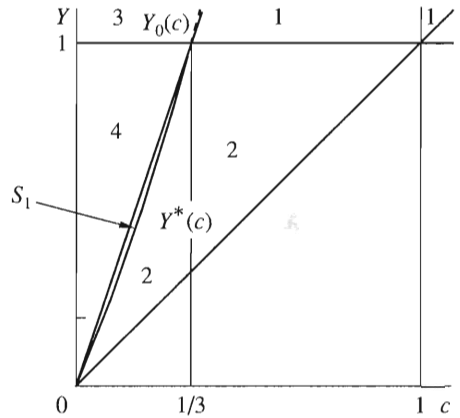
$$V \sim \frac{(\mu La_-)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Средняя скорость трехфазного движения при отсутствии ограничений (2.22) определяется четвертым соотношением (6.12)

$$V = \left( \frac{\mu La_-}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$



Фиг. 9



Фиг. 10

В обоих случаях средние скорости тела  $M$  ограничены при любых допустимых (в том числе и сколь угодно больших) скоростях и ускорениях относительного движения массы  $m$ . Величины максимальной скорости для случаев двухфазного и трехфазного движений различаются лишь коэффициентами: для трехфазного движения скорость больше.

Отметим еще, что, несмотря на существенные различия по исходным предположениям для двух- и трехфазного режимов, между соответствующими оптимальными режимами есть значительное сходство. Сравнивая фиг. 4, в и 7, в, видим, что трехфазный оптимальный режим вырождается в двухфазный, в котором относительная скорость движения массы  $m$  испытывает скачок между фазами и непостоянна внутри фаз.

При наличии ограничения (2.10), налагаемого на скорость массы  $m$ , двухфазное движение возможно лишь при ограничении снизу (4.15) для безразмерной величины  $X$ . Аналогично при наличии ограничения (2.22), налагаемого на ускорение, трехфазное движение возможно лишь при ограничении снизу (6.17) для безразмерной величины  $Y$ .

При стремлении к бесконечности безразмерных скорости  $X$  и ускорения  $Y$  полученные с учетом ограничений оптимальные решения переходят, как и следовало ожидать, в оптимальные решения в отсутствие ограничений, а именно: решения (4.13) и (4.14) переходят при  $X \rightarrow \infty$  в соответствующие решения (4.5) и (4.6), а решение (6.47) – при  $Y \rightarrow \infty$  в решение (6.12).

Исследованный в работе принцип перемещения представляет интерес в связи с разработкой некоторых типов мобильных роботов и реализован, в частности, для роботов, движущихся внутри труб.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00647 и 04-01-04002) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9831.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 3–9.