

УДК 539.375

© 2006 г. М. А. Греков, Н. Ф. Морозов

## О РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ В КОМПОЗИТАХ, АРМИРОВАННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Дискретно-континуальный подход, предложенный В.В. Новожиловым для анализа равновесных состояний хрупкой трещины в изотропном теле, применяется к дисковой трещине, расположенной в волокнистом материале перпендикулярно волокнам. Структурная неоднородность материала учитывается наличием неразорванных волокон в узкой части трещины, примыкающей к краю, и различным влиянием прочностных свойств волокна и матрицы на предельное состояние трещины. В рамках рассмотренной модели установлен интервал размеров равновесных трещин и дана оценка критического размера связанной части трещины, соответствующего началу катастрофического разрушения. Показано, что этот размер имеет одно и то же значение для дисковой трещины и трещины при плоской деформации, не зависит от вида нагрузки и при условии малости является характеристикой волокнистого материала при хрупком разрушении. На основе экспериментальных данных проанализирована возможность применения рассмотренной модели разрушения для двух типов керамики.

Одним из способов повышения трещиностойкости хрупких материалов, таких как керамика, является армирование их волокнами, которые соединяют поверхности трещины и, таким образом, тормозят ее распространение [1]. Исследованию поведения трещины отрыва, расположенной в волокнистом композиционном материале перпендикулярно волокнам, посвящено значительное число работ (см., например [1–15]). Эксперименты показывают, что такая трещина распространяется в своей плоскости при наличии участков неразорванных волокон (зон сцепления), примыкающих к краям трещины [3]. Размер зоны сцепления растущей трещины зависит от механических свойств волокна и матрицы, а также адгезионной прочности их соединения [2–4].

Важнейшей проблемой, решение которой предшествует анализу поведения трещины в волокнистом материале, является установление закона деформирования волокна в зоне сцепления с учетом вытягивания его из матрицы. Как показывают исследования, закон вытягивания волокна из матрицы для таких хрупких материалов, как керамика, имеет вид упрочнения [5–8]. Однако учитывая тот факт, что предельному состоянию трещины в керамике отвечает малая зона неразорванных волокон, этот закон для волокон, находящихся в зоне сцепления, с достаточной степенью точности можно принять в виде ступенчатой функции. Кроме того, малость зоны сцепления позволяет заменить неизвестные силы взаимодействия поверхностей трещины постоянными усилиями (см., например [4] и цитируемую там литературу).

В такой постановке модель трещины в композите с малой зоной неразорванных волокон сродни известным моделям [16, 17], однако отличается от них сингулярностью напряжений у края трещины. Сочетание двух критериев (условия разрыва волокна и условия распространения трещины в рамках линейной механики разрушения) позволяет в этой модели дать оценку размера зоны сцепления и размера трещины в предельном состоянии [5, 11].

С позиций дискретно-континуальной теории В.В. Новожилова [19, 20] был установлен [18] возможный интервал диаметров равновесных дисковых трещин в однородном изотропном материале. Исследование В.В. Новожилова коррелирует с известной теорией Томсона о решетчатом захвате и интервале внешних сил, обеспечивающих равновесное состояние трещины [21–23], и позволяет продвинуться в решении ряда прикладных задач [13, 24].

В основе подхода Новожилова–Томпсона лежит учет сил межатомного взаимодействия у края микротрещины. Распространение этого подхода на макротрещину в однородном теле требует рассмотрения сил сцепления, природа которых не имеет достаточно четкого физического смысла, может иметь различную интерпретацию и поэтому ранее [18] не конкретизировалась. В то же время подход Новожилова–Томпсона как нельзя лучше применим к композитам с хрупкой матрицей типа керамики, армированной однонаправленными волокнами. Силы сцепления в этом случае представляют собой естественные силы сопротивления волокон, связывающих поверхности так называемой мостиковой трещины у ее края [13].

В отличие от предыдущей работы авторов [18] ниже рассматривается дисковая трещина в композите, армированном параллельными волокнами, и при усреднении, имеющем свойства упругого трансверсально изотропного тела. Неоднородность материала, т.е. дискретность его структуры, учитывается путем применения гибридного метода Новожилова–Томпсона. Рост трещины определяется двумя факторами: разрывом крайних волокон в связанной части трещины и разрушением хрупкой матрицы в некоторой зоне перед трещиной. При этом предполагается, что деформационные и прочностные свойства волокна и матрицы, а также размер трещины согласуются с требованием малости зоны сцепления. Тем самым подразумевается, что большая часть волокон, перекрывающих трещину, должна быть разорвана, прежде чем трещина начнет распространяться. Это требование сужает класс рассматриваемых материалов и ограничивает снизу размеры равновесных мостиковых трещин, однако, как показывают приведенные ниже примеры, оправдано для трещин в керамике.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругий композит с хрупкой матрицей (например, керамику) с дисковой, круговой в плане, трещиной

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0, \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq a^2\}$$

расположенной в плоскости, перпендикулярной волокнам (фиг. 1). Считаем, что в общем случае трещина раскрывается бесконечно удаленными усилиями  $\sigma_{33}^\infty = p$  и двумя точечными противоположно направленными нормальными силами  $P$ , приложенными в центре, и находится в одной из последних стадий развития, когда неразорванные волокна сохраняются только в узкой кольцевой области

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0, b \leq \rho \leq a\}$$

шириной  $\Delta = a - b$  (фиг. 2).

При определении напряженно-деформированного состояния композита с трещиной будем полагать, что композит ведет себя так же, как некоторый однородный трансверсально изотропный материал. Упругие постоянные этого материала определим в дальнейшем, исходя из упругих свойств изотропных компонентов композита, т.е. волокна и матрицы и плотности распределения волокон. Проскальзыванием между волокном и матрицей в сплошной части композита пренебрегаем.

Реакцию волокон в зоне сцепления  $\Gamma_0$  при раскрытии трещины моделируем действием нормального постоянного усилия  $\sigma_0$  (фиг. 2). При этом крайние волокна (при  $\rho = b$ ) находятся в предельном состоянии, которое определяется равенством

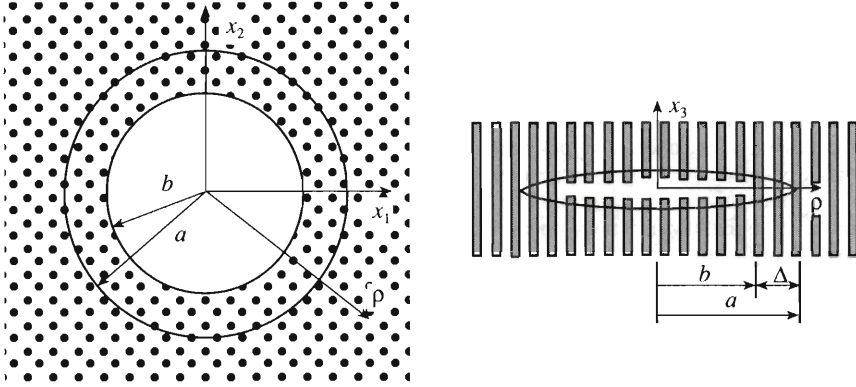
$$w(b) = w_0 \tag{1.1}$$

где  $2w$  – раскрытие трещины в направлении оси  $x_3$ ,  $w_0$  – некоторая постоянная.

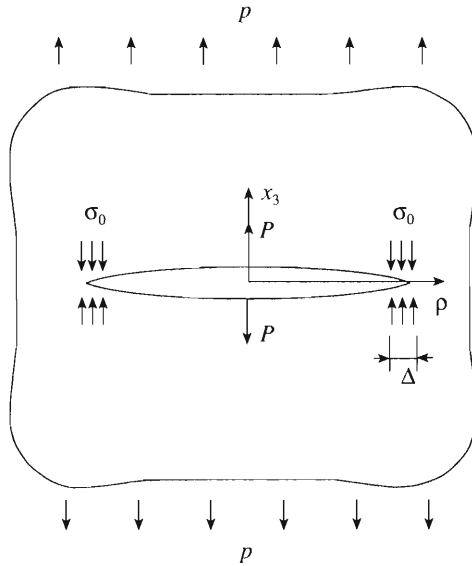
Неравенство  $w(\rho) > w_0$  означает, что на окружности радиусом  $\rho$  волокна разорваны. Таким образом,  $w(\rho) > w_0$  при  $\rho < b$  и  $w(\rho) < w_0$  при  $b < \rho \leq a$ .

Величину  $\sigma_0$  определим из закона деформирования волокна  $\sigma = \sigma(w)$  при вытягивании его из матрицы (фиг. 3), а именно

$$\sigma_0 = \frac{c}{w_0 - w_B} \int_{w_B}^{w_0} \sigma(t) dt \tag{1.2}$$



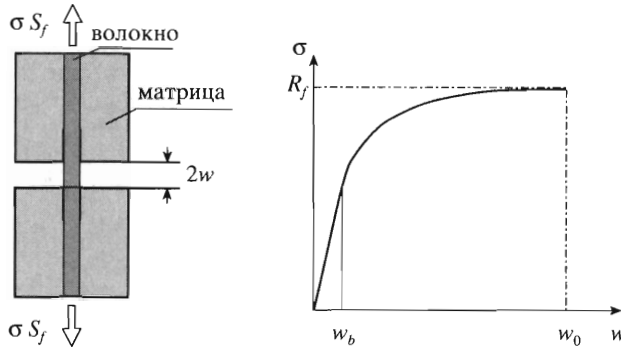
Фиг. 1



Фиг. 2

где  $\sigma(w)$  – усилие в волокне;  $w_B$  – точка перехода к нелинейному участку деформирования;  $c$  – объемная доля волокон в композите. Постоянные  $w_B, w_0$  зависят от свойств адгезии волокна к матрице, в частности, прочности при отслоении сдвигом, а также упругих модулей каждого компонента.

Смысл равенства (1.2) состоит в том, что работа усилия  $\sigma_0$  при раскрытии трещины на нелинейном участке деформирования крайнего волокна совпадает с работой усилия натяжения волокна  $\sigma$  на том же участке деформирования при учете концентрации волокон в композите. Такая замена истинной зависимости  $\sigma(w)$  постоянной величиной  $\sigma_0$  из (1.2) аналогична произведенной В.В. Новожиловым замене нисходящей ветви закона взаимодействия атомов ступенчатой функцией [19, 20]. В действительности усилие  $\sigma_0$ , препятствующее раскрытию трещины, изменяется на участке  $b \leq \rho \leq a$  от максимального значения  $R_f$  (предела прочности волокна на разрыв) при  $\rho = b$  до некоторого мини-



Фиг. 3

мального значения при  $\rho = a$ , однако, как показывают вычисления ([2], фиг. 2), на большей части зоны сцепления этим изменением можно пренебречь.

Следуя идее В.В. Новожилова, полагаем, что трещина находится в равновесии, если

$$\int_a^{a+D} \sigma_{33}^m(\rho) d\rho \leq DR_m \tag{1.3}$$

где  $\sigma_{33}^m$  – напряжение в матрице;  $R_m$  – прочность матрицы на разрыв;  $D$  – размер зоны разрушения матрицы. Нарушение условия (1.3) означает, что трещина растет. При выполнении равенства в условии (1.3) трещина находится в критическом состоянии.

При отсутствии проскальзывания между волокном и матрицей в сплошной части композита среднее напряжение  $\sigma_{33}$  связано с соответствующими напряжениями в волокне и матрице ( $\sigma_{33}^f$  и  $\sigma_{33}^m$ ) соотношениями [2]

$$\sigma_{33}/E_3 = \sigma_{33}^f/E_f = \sigma_{33}^m/E_m; \quad E_3 = cE_f + (1 - c)E_m \tag{1.4}$$

где  $E_f, E_m$  – модули Юнга волокна и матрицы соответственно.

При учете соотношений (1.4) условие роста трещины (1.3) запишем в виде

$$\int_a^{a+D} \sigma_{33}(\rho) d\rho \leq DR; \quad R = R_m E_3/E_m, \quad D = kD_m, \quad D_m \equiv \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{1c}^m}{R_m} \right)^2 \tag{1.5}$$

Выражение для величины  $D$  записано для случая хрупкого разрушения матрицы. Здесь  $K_{1c}^m$  – вязкость разрушения материала матрицы,  $k$  – коэффициент влияния неоднородности напряженно-деформированного состояния в окрестности волокна, а также влияния других эффектов, связанных со свойствами соединения волокна и матрицы, на разрушение матрицы.

Равенство  $D = D_m$  вытекает из эквивалентности критерия хрупкого разрушения В.В. Новожилова и силового критерия Ирвина [25], примененных к однородному изотропному материалу, обладающему свойствами матрицы. Если для композита также выполняется равенство  $D = D_m$ , то это значит, что наличие волокон не влияет на процесс разрушения матрицы. Анализ зависимости основных характеристик разрушения композита с трещиной от размера зоны разрушения  $D$  будет приведен в конце статьи.

**2. Основные соотношения.** Как и ранее [18], опираясь на известные решения [26, 27] и считая, что трещина находится в равновесном состоянии в однородном трансверсально изотропном материале под действием указанных выше сил (фиг. 2), приходим к следующим зависимостям для раскрытия трещины  $2w$  и напряжения  $\sigma_{33}$  в плоскости  $x_3 = 0$ :

$$w(\rho) = 2H \left\{ 2\rho\sqrt{a^2 - \rho^2} - 2\sigma_0 F(\rho) + \frac{P}{\pi\rho} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} \right\}, \quad \rho \leq a \quad (2.1)$$

$$\sigma_{33}(\rho) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{ap - \sigma_0\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} + \frac{\pi\rho}{2} - \rho \arcsin \frac{a}{\rho} + \sigma_0 \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}} \right] + \frac{Pa}{\pi^2 \rho^2 \sqrt{\rho^2 - a^2}}, \quad \rho > a \quad (2.2)$$

Здесь

$$F(\rho) = \int_r^a \frac{\sqrt{t^2 - b^2}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt, \quad r = \begin{cases} b, & 0 \leq \rho \leq b \\ \rho, & b \leq \rho \leq a \end{cases}$$

Коэффициент  $H$ , характеризующий жесткость анизотропного материала, определяется по формуле [27]

$$H = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)A_{11}}{2\pi(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)}, \quad \gamma_k^2 = \frac{m_k A_{33}}{m_k A_{44} + A_{13} + A_{44}} = \frac{A_{44} + m_k(A_{13} + A_{44})}{A_{11}}, \quad k = 1, 2 \quad (2.3)$$

$A_{jj}$  – компоненты тензора упругих податливостей материала в главных осях анизотропии. Для материалов, армированных параллельными цилиндрическими волокнами, постоянные  $A_{jj}$  могут быть выражены через упругие модули и объемные доли компонентов [28].

У композитов на основе керамики модули Юнга  $E_f$  и  $E_m$  обычно различаются менее чем в три раза, а коэффициенты Пуассона (соответственно  $\nu_f$  и  $\nu_m$ ) равны. Вследствие этого такой композит обладает слабой анизотропией упругих свойств, и для него обычно используется более простая, чем (2.3), формула (см., например [2, 5])

$$H = \frac{1 - \nu_f^2}{\pi E_3} \quad (2.4)$$

Погрешность вычисления  $H$  по последней формуле для керамических материалов сравнима с погрешностью применения указанной выше методики. Согласно второй формуле (1.4) при  $E_f = E_m$  равенство (2.4) совпадает с аналогичным соотношением для изотропного материала [18]. Ниже все результаты получены при использовании формулы (2.4).

Чтобы найти условия, обеспечивающие равновесное состояние дисковой (диаметром  $d$ ) трещины в композите, подставим выражение (2.1) в равенство (1.1) и выражение (2.2) в условие (1.5), полагая  $\Delta/a \ll 1$  и  $D/a \ll 1$ . Тогда получим соответственно

$$\zeta\left(\frac{d}{D}\right) = g_1^a(\alpha), \quad g_1^a(\alpha) = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{\alpha} \quad (2.5)$$

$$\zeta\left(\frac{d}{D}\right) \leq g_2^a(\alpha), \quad g_2^a(\alpha) = \pi\left(\frac{R}{\sigma_0} - 1\right) + 2\sqrt{\alpha} + 2(1 + \alpha)\operatorname{arcctg} \sqrt{\alpha} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\zeta\left(\frac{d}{D}\right) = \frac{4P}{\pi\sigma_0 D^2} \left(\frac{D}{d}\right)^{3/2} + \frac{2P}{\sigma_0} \left(\frac{d}{D}\right)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{\Delta}{D}, \quad \beta = \frac{w_0}{HD\sigma_0} \quad (2.7)$$

$\alpha$  – приведенная ширина зоны сцепления,  $\beta$  – постоянная композиционного материала.

Минимальное значение функции  $g_1^a(\alpha)$  равно  $2\sqrt{\beta}$  и достигается при  $\alpha = \alpha_0 = \beta/4$ . Отсюда и из условия (2.5) приходим к неравенству, которое в рамках принятой модели определяет одну из границ диапазона равновесных трещин,

$$\zeta\left(\frac{d}{D}\right) \geq 2\sqrt{\beta} \quad (2.8)$$

Вторую границу находим из критерия (1.3) или эквивалентного ему условия (2.6). Предположим, что критическому состоянию трещины отвечает некоторое значение  $\alpha = \alpha_c$ . В этом случае в условии (2.6) имеет место знак равенства. Тогда из условий (2.5), (2.6) следует, что величина  $\alpha_c$  – корень уравнения

$$g_1^a(\alpha) = g_2^a(\alpha) \quad (2.9)$$

При учете (2.8) приходим к двойному неравенству, определяющему диапазон равновесных состояний трещины,

$$2\sqrt{\beta} \leq \zeta\left(\frac{d}{D}\right) \leq g_1^a(\alpha_c) \quad (2.10)$$

Приведенный размер зоны сцепления  $\alpha_c$ , при котором трещина начинает расти, лежит в промежутке  $d_f/D \leq \alpha_c \leq \alpha_0$ , где  $d_f$  – диаметр волокна. Если  $\alpha_c < d_f/D$ , то трещина начнет распространяться только после разрыва всех связей. С другой стороны, неравенство  $\alpha_c > \alpha_0$  означает, что нижняя граница диапазона равновесных трещин не описывается в рамках принятой модели.

Обозначим нижнюю и верхнюю границы диаметров равновесных трещин соответственно через  $d_l$  и  $d_u$ . Тогда неравенство (2.9) можно свести к следующему:

$$d_l \leq d \leq d_u \quad (2.11)$$

В двух частных случаях величины  $d_l$  и  $d_u$  находятся наиболее просто. Для трещины, раскрываемой только бесконечно удаленными усилиями  $\sigma_{33}^\infty = p$ , из формул (2.7), (2.10) следует

$$d_l = D \frac{\beta\sigma_0^2}{p^2}, \quad d_u = D \left( \frac{\sigma_0 g_1^a(\alpha_c)}{2p} \right)^2 \quad (2.12)$$

При действии только сосредоточенных сил  $P$  в центре трещины из формул (2.7), (2.10) получим

$$d_l = D \left( \frac{4P}{\pi\sigma_0 D^2 g_1^a(\alpha_c)} \right)^{2/3}, \quad d_u = D \left( \frac{2P}{\pi\sigma_0 D^2 \sqrt{\beta}} \right)^{2/3} \quad (2.13)$$

Заметим, что формулы (2.11)–(2.13) выведены при фиксированных значениях параметров нагрузки  $p$  и  $P$ . Альтернативные выкладки при фиксированном значении диаметра трещины дают интервалы нагрузок, обеспечивающих равновесное состояние

трещины. Нижние границы  $p_l(P_l)$  и верхние границы  $p_u(P_u)$  этих интервалов находятся из формул (2.12), (2.13) при замене  $d_l$  или  $d_u$  на  $d$ , а  $p(P)$  соответственно на  $p_l(P_l)$  или  $p_u(P_u)$ .

Из полученных результатов вытекает следующий возможный сценарий роста трещины в рассматриваемом композите. Если при фиксированной удаленной нагрузке  $p$  диаметр трещины  $d$  достиг значения  $d_u$ , а размер связанной части  $\Delta$  – значения  $\Delta_c = \alpha_c D$ , то процесс разрушения переходит в завершающую стадию катастрофического разрушения. До этого момента может происходить устойчивый рост трещины с частично разорванными волокнами, если нарушено условие (1.3) и не выполняется равенство (1.1). При выполнении равенства (1.1) начинается происходить разрыв крайних волокон в зоне сцепления. Если размер зоны сцепления попадает в интервал  $\Delta_c \leq \Delta \leq \Delta_0$  ( $\Delta_0 = \alpha_0 D$ ) и выполняется неравенство (2.11), то при фиксированном значении усилий  $p$  трещина находится в равновесном состоянии.

В случае действия сосредоточенных сил  $P$  в центре трещины характер распространения мостиковой трещины такой же, как и трещины без связей при аналогичной нагрузке [29], а именно рост трещины всегда устойчив. Как следует из второго равенства (2.13), для поддержания процесса разрушения необходимо непрерывно увеличивать значение  $P$ .

**3. Сравнение с плоской деформацией.** Из предыдущих рассуждений вытекает, что размер связанной части мостиковой трещины в предельном состоянии  $\Delta_c = \alpha_c D$  один и тот же при действии усилий на бесконечности  $p$ , сосредоточенных сил  $P$  на трещине, а также их комбинации. Было показано [2], что в общем случае величина  $\Delta_c$  зависит от размера трещины, однако при выполнении условия  $\Delta \ll a$ , ее можно считать постоянной. Таким образом, для данного типа задачи  $\Delta_c$  – постоянная материала, определяющая начало распространения трещины.

На основании полученных ранее результатов [13] к такому же выводу приходим и в отношении мостиковой трещины, находящейся в условиях плоской деформации. В этом случае величина  $\alpha_c$  имеет то же значение, что и в осесимметричной задаче. Действительно, при плоской деформации  $\alpha_c$  удовлетворяет следующему уравнению, эквивалентному уравнению (2.9):

$$g_1^p(\alpha) = g_2^p(\alpha); \quad g_j^p(\alpha) = \frac{2}{\pi} g_j^a(\alpha), \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

При этом соотношения (2.5)–(2.13) справедливы также и в случае плоской деформации для трещины длиной  $L = 2l$ , если в них, за исключением вторых формул (2.5) и (2.6), формально заменить  $g_j^a$  на  $g_j^p$  и  $d$  на  $L$ , а в формулах (2.8), (2.10), (2.12) и (2.13) величину  $\beta$  заменить на  $4\beta/\pi^2$ . Очевидно также, что  $d_l/d_u = L_l/L_u$ . Здесь  $L_l$  – нижняя, а  $L_u$  – верхняя границы интервала длин равновесных трещин при плоской деформации. Под величиной  $P$  в плоской задаче подразумевается сумма равномерно распределенных нормальных сил, действующих вдоль срединной линии поверхности трещины на участке длиной  $L$ . Отметим также, что величины с верхним индексом  $a$  относятся к осесимметричной задаче, а с верхним индексом  $p$  – к плоской деформации.

**4. Вязкость разрушения.** Установим связь между вязкостью разрушения композита, т.е. предельными значениями коэффициентов интенсивности напряжений без учета зоны сцепления, и критическим размером этой зоны  $\Delta_c$  в осесимметричной задаче и при плоской деформации. Соответствующие асимптотические представления решений для мостиковых трещин на линиях  $\rho$  при  $\rho \rightarrow a$  и  $x_1$  при  $x_1 \rightarrow l$  запишем в виде

$$\sigma_{33} = \frac{K^a}{\sqrt{2\pi(\rho - a)}} + O(1), \quad \sigma_{22} = \frac{K^p}{\sqrt{2\pi(x_1 - l)}} + O(1) \quad (4.1)$$

где  $l$  – полудлина трещины в плоской задаче, а коэффициенты  $K^a$ ,  $K^p$  находятся из решений краевых задач по формулам

$$K^a = \lim_{\rho \rightarrow a} \sigma_{33}(\rho, \theta) \sqrt{2\pi(\rho - a)}, \quad K^p = \lim_{x_1 \rightarrow l} \sigma_{22}(x_1, 0) \sqrt{2\pi(x_1 - l)}$$

Подставив правую часть равенства (2.2) в первое из последних соотношений, а решение плоской задачи [13] (при учете сосредоточенных сил, действующих в центре мостиковой трещины) – во второе, получим

$$K^a = K_1^a - 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\pi a}}, \quad K^p = K_1^p - \frac{2\sigma_0 \sqrt{l}}{\sqrt{\pi}} \arccos\left(1 - \frac{\Delta}{l}\right) \quad (4.2)$$

$$K_1^a = \frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} + \frac{P}{\pi a \sqrt{\pi a}}, \quad K_1^p = p\sqrt{\pi l} + \frac{P}{\sqrt{\pi l}}$$

где  $K_1^a$ ,  $K_1^p$  – коэффициенты интенсивности напряжений, определяющие асимптотику напряженно-деформированного состояния у края соответствующей трещины при отсутствии концевых связей.

Чтобы найти предельные значения коэффициентов  $K_{1c}^a$  и  $K_{1c}^p$  для трещин в композите, подставим первое выражение из (4.1) в критерий (1.5), а второе – в аналогичное условие (16) работы [13]. Тогда при учете (4.2) и условий  $\Delta \ll a$ ,  $\Delta \ll l$  приходим к равенствам

$$K_{1c}^a = K_{1c}^p \equiv K_{1c} = K_0 + K_c; \quad K_0 = \frac{\pi E_3 R_m}{E_m} \sqrt{\frac{D}{2\pi}}, \quad K_c = 4\sigma_0 \sqrt{\frac{\Delta_c}{2\pi}} \quad (4.3)$$

Итак, вязкость разрушения волокнистого композита представляет собой сумму двух слагаемых: величины  $K_0$ , определяемой размером зоны разрушения  $D$  у края трещины, и величины  $K_c$ , определяемой критическим размером связанной части трещины  $\Delta_c$ . Следует отметить, что аналогичная формула, полученная ранее [2] для вязкости разрушения композита, имеет более сложную структуру и не содержит в явном виде зависимость от параметра  $\Delta_c$ ; в ней также отсутствует величина  $D$ , поскольку вместо критерия В.В. Новожилова был принят силовой критерий разрушения.

Помимо наличия зоны сцепления влияние волокон на поведение трещины в композите проявляется также в неравенствах  $E_3 \neq E_m$ ,  $D \neq D_m$ . Согласно соотношениям (2.12), (2.13) и (4.3) даже при  $\Delta_c = 0$  присутствие волокон влияет и на границы интервала равновесных трещин  $d_l$ ,  $d_m$ , и на вязкость разрушения  $K_{1c}$ .

Из всех параметров, входящих в предыдущие соотношения, остается неизвестным размер зоны разрушения  $D$ . Для его вычисления можно воспользоваться формулой (4.3), поскольку критический размер зоны сцепления  $\Delta_c$  может быть измерен [2], а вязкость разрушения  $K_{1c}$  находится стандартным путем. Вместе с тем, как следует из анализа, приведенного в конце статьи, для рассмотренных ниже керамик в первом приближении можно положить  $D = D_m$ . При этом величина  $D_m$  находится по последней формуле (1.5).

**5. Пример.** Применим рассмотренную выше модель разрушения к материалам SiC/SiC и SiC/CAS, которые являются слабо анизотропными керамическими композитами с волокнами из карбида кремния (SiC) и либо такой же матрицей, либо матрицей из кальций-алюмосиликатной керамики (CAS). Характеристики материалов, полученные на основе данных работы [6], приведены в табл. 1.



Таблица 1

Материал	SiC/SiC	SiC/CAS
Модуль Юнга матрицы, $E_m$ (ГПа)	300	100
Модуль Юнга волокна, $E_f$ (ГПа)	200	200
Модуль Юнга композита в направлении волокон, $E_3$ (ГПа)	260	140
Коэффициент Пуассона матрицы, $\nu_m$	0.2	0.2
Коэффициент Пуассона волокна, $\nu_f$	0.2	0.2
Прочность матрицы на разрыв, $R_m$ (ГПа)	2.83	0.96
Прочность волокна на разрыв, $R_f$ (ГПа)	2	2
Вязкость разрушения матрицы, $K_{Ic}^m$ (МПа · м <sup>1/2</sup> )	1.77	1.64
Усилие в зоне сцепления, $\sigma_0$ (ГПа)	0.53	0.53
Объемная доля волокон, $c$	0.4	0.4
Раскрытие трещины на границе зоны сцепления, $2w_0$ (мкм)	2.06	4.08
Диаметр волокна, $d_f$ (мкм)	7	7
Размер зоны разрушения матрицы при отсутствии волокон, $D_m$ (мкм)	0.25	1.8

Таблица 2

Материал	SiC/SiC			SiC/CAS			
	$D/D_m$	0.1	1	10	0.1	1	10
$\Delta_0/d_f$		58.9	58.9	58.9	63.0	63.0	63.0
$\Delta_c/d_f$		56.3	51.2	37.8	60.0	53.9	37.6
$d_f/d_u$		0.999	0.995	0.952	0.999	0.994	0.936
$K_{Ic}$ (МПа · м <sup>1/2</sup> )		17.3	17.6	18.6	18.0	18.7	20.9
$K_0/K_c$		0.029	0.096	0.353	0.041	0.138	0.521

Отношение модуля Юнга в плоскости изотропии к модулю Юнга в перпендикулярном направлении равно  $E_1/E_3 = 0.95$  для обоих материалов. Закон деформирования волокна  $\sigma(w)$  [6] в принятых здесь обозначениях имеет вид

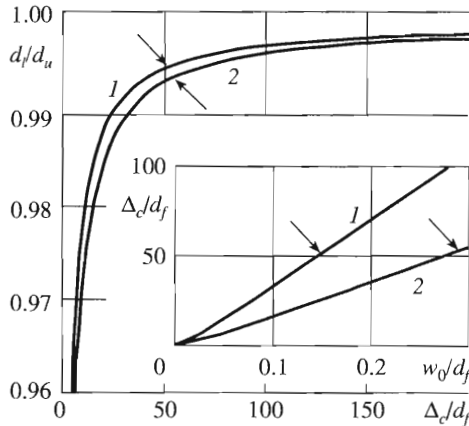
$$\frac{\sigma}{\sigma_A} = \frac{w}{d_f} \quad \text{при} \quad w \leq w_B; \quad \frac{\sigma}{\sigma_A} = \sqrt{\frac{w - w_B}{d_f} + \left(\frac{w_B}{d_f}\right)^2} \quad \text{при} \quad w \geq w_B \quad (5.1)$$

где

$$\sigma_A = \frac{R_f}{d_f \sqrt{(w_0 - w_B)d_f + w_B^2}}$$

В табл. 2 приведены зависимости некоторых характеристик равновесных и предельных состояний круговой трещины от размера зоны разрушения  $D$ , вычисленных с применением формул (5.1) и табл. 1.

Допуская возможность варьирования предельного раскрытия трещины на границе зоны сцепления при сохранении всех остальных характеристик композита, приходим к зависимостям критического размера зоны сцепления  $\Delta_c$  от величины этого раскрытия  $2w_0$  и отношения  $d_f/d_u$  от  $\Delta_c$ . Эти зависимости, вытекающие из соотношений (2.9) и (2.12), изображены на фиг. 4 при  $D = D_m$  для материалов SiC/SiC (кривые 1) и SiC/CAS (кривые 2). Стрелками отмечены точки на кривых, соответствующие реальным значениям величины  $2w_0$  (см. табл. 1).



Фиг. 4

Из фиг. 4 для  $\Delta_c/d_f$  и табл. 1 следует, что для рассматриваемых керамик  $\Delta_c/D_m > \Delta_c/d_f \gg 1$ . Это значит, что корень уравнения (2.9) лежит в области больших значений и для него можно получить следующую приближенную зависимость:

$$\Delta_c = \frac{D}{16}(\sqrt{A^2 + \beta} - A)^2; \quad A = \pi\left(\frac{R}{\sigma_0} - 1\right) \tag{5.2}$$

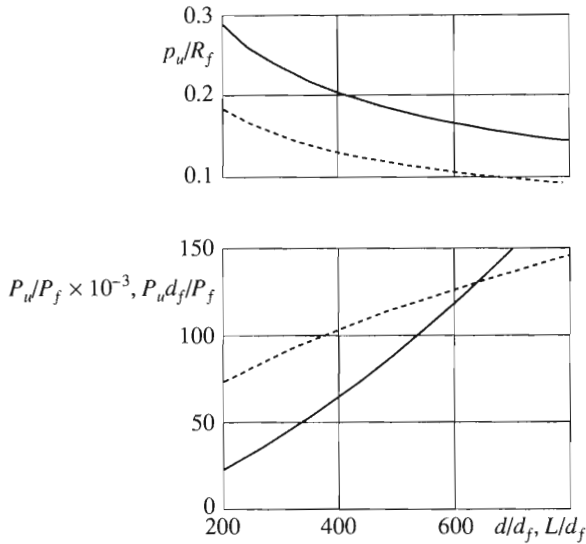
Относительная погрешность этой формулы для значений  $\Delta_c$ , отмеченных стрелками на фиг. 4, не превышает 2%, а для соответствующих значений отношения  $d_l/d_u - 0.1\%$ .

В соответствии с формулами (2.12), (2.13) на фиг. 5 построены графики изменения приведенных предельных нагрузок  $p_u/R_f, P_u/P_f$  в зависимости от диаметра круговой трещины  $d$  (сплошные кривые) и длины трещины  $L$  при плоской деформации (штриховые кривые) для керамики SiC/SiC при  $D = D_m$ . Здесь  $P_f = \pi d_f^2 R_f/4$  – сила натяжения волокна, при которой происходит его разрыв. С этими кривыми практически совпадают аналогичные зависимости для  $p_l/R_f, P_l/P_f$ , поскольку  $d_l/d_u \approx 1$  (см. табл. 2).

Интересно отметить, что хотя некоторые характеристики одного композита существенно отличаются от однотипных характеристик другого (см. табл. 1), предельные нагрузки  $p_u$  и  $P_u$  для трещин в керамике SiC/CAS всего на 3.3% выше, чем для трещин в керамике SiC/SiC. Вследствие этого кривые, изображенные на фиг. 5, можно отнести также и к керамике SiC/CAS с учетом указанной разницы в предельных нагрузках.

**6. Обсуждение результатов численных экспериментов.** Согласно табл. 2 размер зоны сцепления круговой трещины в предельном состоянии при  $D = D_m$  приблизительно равен  $51d_f$  для керамики SiC/SiC и  $54d_f$  для керамики SiC/CAS. Так как в принятой здесь модели  $\Delta/a \ll 1$ , то размер трещины в предельном состоянии должен удовлетворять условию  $d_u \gg 104d_f$  ( $d_u \gg 728$  мкм) для SiC/SiC и  $d_u \gg 108d_f$  ( $d_u \gg 754$  мкм) для SiC/CAS. Таким образом, в данных материалах построенная модель дает возможность оценить предельное состояние трещин диаметром более одного миллиметра, чем и объясняется ограничение графиков слева на фиг. 5.

Это ограничение можно сместить влево, если уменьшить величину  $\beta$ . Действительно, в этом случае уменьшается корень уравнения (2.9), и в силу монотонности функции  $g_2(\alpha)$  уменьшается значение  $g_2(\alpha_c)$ , определяющее  $d_u$ . Величина  $\beta$  прямо пропорциональна параметру  $w_0$  и обратно пропорциональна параметрам  $H, D$  и  $\sigma_0$ . Характер зависимости критического размера зоны сцепления  $\Delta_c$  от величины  $w_0$  показан на фиг. 4.



Фиг. 5

Отсюда очевиден путь уменьшения  $\beta$ . Чтобы уменьшить величину  $w_0$ , можно увеличить, например, жесткость волокон или прочность соединения волокна и матрицы, а также уменьшить прочность волокна.

Особому обсуждению подлежит вопрос определения другой важной характеристики разрушения – размера зоны разрушения перед трещиной  $D$ . Равенство  $D = D_m$  оправдано, строго говоря, для трещины в изотропном теле, материал которого идентичен материалу матрицы данного композита. Для армированного волокнами материала значение  $D$  может быть другим, поскольку накопление повреждений в матрице происходит в окружении волокон, наличие которых влияет на процесс разрушения.

Таким образом, величина  $D$  является одновременно и характеристикой повреждаемости матрицы и характеристикой структурной неоднородности композита, которая проявляется, в частности, в неоднородности напряженно-деформированного состояния вблизи волокна. Простейший вариант учета этой неоднородности – зависимость вида  $D = kD_m$ .

Наибольшее основание для использования равенства  $D = D_m$  будет в случае керамики SiC/SiC. Действительно, поскольку разрушение матрицы происходит между рядами волокон, определяющим фактором для оценки влияния структуры является отношение  $D_m/u$ , где  $u$  – расстояние между соседними рядами волокон. Чем больше это расстояние по сравнению с размером зоны разрушения неармированной матрицы, тем меньше должно быть влияние волокон на разрушение матрицы в композите. При гексагональной упаковке волокон величина  $u$  находится по формуле

$$u^2 = \pi d_f^2 \sqrt{3} / (8c)$$

Отсюда на основании табл. 1 следует, что  $u = 9.13$  мкм для обоих типов керамик, причем  $D_m/u = 0.027$  для SiC/SiC и  $D_m/u = 0.2$  для SiC/CAS. Таким образом, для керамики SiC/SiC имеем  $D_m \ll u$ .

Вместе с тем необходимо отметить, что хотя отношение  $D_m/u$  для керамики SiC/CAS на порядок больше, чем для SiC/SiC, зависимость параметров, приведенных в табл. 2, от размера зоны разрушения  $D$  для обоих композитов идентична. Отношение  $d_f/d_u$  и вяз-

кость разрушения  $K_{Ic}$  слабо реагируют даже на значительное изменение величины  $D$ . Наиболее заметно влияние величины  $D$  на отношение  $K_0/K_c$  и на критический размер зоны сцепления  $\Delta_c$ . С увеличением  $D$  уменьшается величина  $\Delta_c$ , в связи с чем увеличивается разность  $\Delta_0 - \Delta_c$ .

Авторы благодарят рецензентов за замечания, которые были учтены в данном варианте статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00274, 03-01-00271).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marshall D.B., Cox B.N., Evans A.G. The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites // *Acta Metallurg.* 1985. V. 33. № 11. P. 2013–2021.
2. Marshall D.B., Cox B.N. Tensile fracture of brittle matrix composites: influence of fiber strength // *Acta Metallurg.* 1987. V. 35. № 11. P. 2607–2619.
3. Swenson P.L., Fairbanks C.J., Lawn B.R., Mai Y.-W., Hockey B.J. Crack-interface gain bridging as a fracture resistance mechanism in ceramics: I. Experimental study on alumina // *J. Amer. Ceramic Soc.* 1987. V. 70. № 4. P. 279–289.
4. Cox B.N., Marshall D.B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // *Acta Metallurg. Mater.* 1994. V. 42. № 2. P. 341–363.
5. Budiansky B., Hutchinson J.W., Evans A.G. Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics // *J. Mech. Phys. Solids.* 1986. V. 34. № 2. P. 167–189.
6. Budiansky B., Evans A.G., Hutchinson J.W. Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // *Intern. J. Solids and Structures.* 1995. V. 32. № 3/4. P. 315–328.
7. Hutchinson J.W., Jensen H.M. Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction // *Mech. Mater.* 1990. V. 9. № 2. P. 139–163.
8. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs // *J. Mech. Phys. Solids.* 1987. V. 35. № 4. P. 383–405.
9. Nemat-Nasser S., Hori M. Toughening by partial or full bridging of crack in ceramics and fiber reinforced composites // *Mech. Mater.* 1987. V. 6. № 3. P. 245–269.
10. Willis J.R., Nemat-Nasser S. Singular perturbation solution of a class of singular integral equations // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. № 4. P. 741–753.
11. Bao G., Suo Z. Remarks on crack-bridging concepts // *Appl. Mech. Rev.* 1992. V. 45. № 8. P. 355–366.
12. Chen C.H., Chang R.R., Jeng P.H. On the fiber-bridging of cracks in fiber-reinforced composites // *Mech. Mater.* 1995. V. 20. № 2. P. 165–181.
13. Morozov N., Pauksho M., Ponikarov N. On the problem of equilibrium length of bridged crack // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1997. V. 64. № 2. P. 427–430.
14. Movchan N.V., Willis J.R. Penny-shaped crack bridged by fibers // *Quart. Appl. Math.* 1998. V. 56. № 2. P. 327–340.
15. Liu Y.-F., Masuda C., Yuuki R. Effect of microstructural parameters on the fracture behavior of fiber-reinforced ceramics // *Mech. Mater.* 1998. V. 29. № 2. P. 111–121.
16. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // *ПММ.* 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444. Вып. 4. С. 706–721. Вып. 5. С. 893–900.
17. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids.* 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
18. Греков М.А., Морозов Н.Ф. О дисковых равновесных трещинах // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 172–175.
19. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.

20. Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
21. Thomson R., Hsieh C., Rana V. Lattice trapping of fracture cracks // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 8. P. 3154–3160.
22. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. К вопросу о “решетчатом захвате” // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 323–325.
23. Голдштейн Р.В., Шаталов Г.А. О зоне сцепления вблизи края трещины при хрупком разрушении // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 5. С. 608–610.
24. Morozov N.F., Paukshto M.W. On the crack simulation and solutions in the lattice // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58. № 1. P. 290–292.
25. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
26. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
27. Fabrikant V.I. Complete solution to some mixed boundary value problems in elasticity // Advances in Applied Mechanics / Eds. J. Hutchinson and T. Wu. Boston: Acad. Press, 1990. V. 27. P. 153–223.
28. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. N.Y. etc.: Willey, 1979 = Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
29. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

e-mail: mgrekov@mg2307.spb.edu  
morozov@mnf.usr.pu.ru

Поступила в редакцию  
1.III.2005