

УДК 539.3

© 2006 г. И.Г. Горячева, А.П. Горячев

ИЗНОСОКОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С НЕПОЛНЫМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

Предложен метод аналитического исследования изменения напряженного состояния и формы изнашиваемых тел, подвергнутых действию осциллирующей тангенциальной нагрузки при неполном проскальзывании поверхностей в области контактного взаимодействия. Метод базируется на введении двух масштабов времени: времени одного цикла изменения тангенциальной нагрузки и времени, которое соответствует заданному числу циклов. Для оценки формоизменения поверхности при изнашивании используется линейная зависимость скорости износа от контактных давлений и скорости относительного проскальзывания. Рассмотрены случаи полного или неполного удаления продуктов износа из зоны трения. В качестве примера приведено исследование кинетики изменения напряженного состояния в контакте упругого индентора, имеющего плоское основание и закругленные кромки, с упругим полупространством из того же материала. Получены аналитические выражения для расчета асимптотических значений напряжений и формы изношенной поверхности.

Неполное проскальзывание характеризуется наличием зон сцепления и проскальзывания в области контактного взаимодействия. Такой режим трения реализуется, если тангенциальная сила, приложенная к взаимодействующим телам, по модулю не превышает предельной силы трения. Повторяющееся проскальзывание, возникающее при осциллирующей тангенциальной силе, вызывает износ взаимодействующих поверхностей (фреттинг) [1]. Формоизменение поверхности в результате ее изнашивания приводит к перераспределению контактных напряжений, что, в свою очередь, влияет на скорость ее износа.

Численный анализ эволюции контактных давлений в сопряжении цилиндрического штампа и упругой полуплоскости при фреттинге в предположении, что все продукты износа удаляются из зоны трения [2], свидетельствует о значительном отличии контактных давлений от начальной эпюры Герца после некоторого числа циклов изменения тангенциальной нагрузки. Был предложен [3] аналитический метод исследования эволюции напряжений при фреттинге с сохранением основных предположений, заложенных в исходной постановке задачи [2]; доказано существование асимптотического решения задачи и получено его аналитическое выражение.

Настоящая работа посвящена построению решения износоконтактной задачи с частичным проскальзыванием в более общей постановке, допускающей возможность неполного удаления продуктов износа из зоны трения и формирования из оставшихся частиц поверхностного слоя, обладающего отличными от основного материала механическими характеристиками. Такая постановка задачи подтверждается реальными условиями контактного взаимодействия при фреттинге, наблюдаемыми в экспериментах [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская контактная задача о взаимодействии двух упругих тел из одинаковых материалов, форма поверхности которых в недеформированном состоянии в системе координат Oxz описывается монотонно неубывающими функциями $z = f_1(x)$ и $z = -f_2(x)$, где $f_i(x) = f_i(-x)$, $i = 1, 2$.

Тела находятся под действием нормальной нагрузки P и осциллирующей тангенциальной силы $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$-Q^* \leq Q(t) \leq Q^*, \quad Q^* < \mu P \quad (1.1)$$

Предполагается, что силы приложены таким образом, что момент относительно начала координат равен нулю и штамп не поворачивается относительно оси симметрии, а на площадке контакта в произвольный момент времени t в силу условия (1.1) возникает центральная зона сцепления, окруженная двумя зонами проскальзывания. Справедливость такого предположения была доказана для тел цилиндрической формы из одинаковых материалов [4, 5] и для индентора с плоским основанием и закругленными кромками [6].

В зонах проскальзывания поверхностей происходит их изнашивание, приводящее к формоизменению контактирующих поверхностей, а также к формированию на их поверхности тонкого слоя из продуктов износа (третьего тела). Будем считать, что толщина этого слоя $h(x, t)$ пропорциональна глубине разрушенного (изношенного) слоя $w(x, t)$ в рассматриваемой точке x в данный момент времени t , т.е. $h(x, t) = \gamma w(x, t)$ ($0 \leq \gamma < 1$), а его смещение u_{x3} в направлении оси Ox под действием касательного напряжения $q(x, t)$ определяется выражением

$$u_{x3} = \frac{h(x, t)}{k_t} q(x, t) = \frac{\gamma}{k_t} w(x, t) q(x, t) \quad (1.2)$$

Постоянная k_t характеризует податливость слоя в тангенциальном направлении. Случай $\gamma = 0$ соответствует полному удалению продуктов износа из зоны трения.

Для разных механизмов изнашивания имеет место следующая зависимость линейной скорости износа от контактного давления $p(x, t)$ и скорости скольжения $V(x, t)$ (закон Арчарда [7]):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = K_w p(x, t) V(x, t) \quad (1.3)$$

где K_w – коэффициент износа, зависящий от свойств взаимодействующих тел, температуры и т.д.

В рассматриваемой задаче скорость скольжения определяется скоростью относительного проскальзывания, т.е. $V(x, t) = |\partial s(x, t)/\partial t|$, где величина относительного проскальзывания $s(x, t)$ в точке x в момент времени t определяется соотношением

$$s(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| < c(t) \\ (u_{x1} - u_{x2} - u_{x3}) - \delta_x, & c(t) \leq |x| \leq a(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь u_{x1} и u_{x2} – тангенциальные перемещения контактирующих поверхностей в точке x в момент времени t , δ_x – относительное смещение контактирующих тел в тангенциальном направлении, $a(t)$ – полуширина области контакта, $c(t)$ – полуширина зоны сцепления на ней.

Таким образом, толщина разрушенного (изношенного) слоя зависит от скорости относительных перемещений поверхностей в зонах проскальзывания и определяется соотношением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = K_w p(x, t) \left| \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} \right| \quad (1.5)$$

Формоизменение поверхности при изнашивании приводит к перераспределению контактных напряжений. Заметим, что в течение одного цикла изменения тангенциальной силы $Q(t)$ значительно меняются тангенциальные напряжения, относительное проскальзывание поверхностей и размер зоны сцепления; в то же время контактные давления и размер области контакта меняются незначительно. В случае контактирующих тел из одинаковых материалов, как известно, распределение тангенциальных напряжений

вообще не оказывает влияния на контактные давления и размер контактной зоны [8]. Значительные изменения последних величин связаны с увеличением числа циклов осцилляции тангенциальной силы, которое приводит к существенному формоизменению поверхности, поэтому анализ контактных характеристик в работе проводится на двух масштабных уровнях, связанных со временем одного цикла и с количеством циклов осцилляции тангенциальной силы.

2. Приращения износа за один цикл. Обозначим $p(x, N)$ – контактное давление и $a(N)$ – полуширина участка контакта на N -м цикле. Размер зон скольжения $(c(t), a(N))$, где имеет место износ поверхностей, меняется в течение одного цикла, поскольку граница $c(t)$ зоны сцепления изменяется в пределах $c^*(N) \leq c(t) \leq a(N)$ [4, 5], где $c^*(N)$ – полуширина зоны сцепления на N -м цикле, соответствующая предельной тангенциальной нагрузке $Q = Q^*$. Значение $c(t)$ определяется величиной приложенной в данный момент тангенциальной силы $Q(t) < Q^*$, а распределение касательных напряжений q_N на площадке контакта зависит от полуширины области сцепления в данный момент времени, т.е. $q_N = q_N(x, c(t))$ [4]. При этом выполняется условие равновесия

$$Q(t) = \int_{-a(N)}^{a(N)} q_N(x, c(t)) dx \quad (2.1)$$

Величина относительного проскальзывания s_N на N -м цикле в некоторой точке x , где $c(t) \leq |x| \leq a(N)$ в момент времени t также зависит от функции $c(t)$, т.е. $s_N = s_N(x, c(t))$. Тогда из соотношения (1.5) следует

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = K_w p(x, t) \left| \frac{\partial s(x, c)}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right| \quad (2.2)$$

Интегрируя соотношение (2.2) по временному интервалу Δt , соответствующему одному циклу изменения тангенциальной нагрузки, и используя теорему о среднем, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \Delta w(x, N) &= K_w \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} p(x, t) \left| \frac{\partial s(x, c)}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right| dt \approx \\ &\approx 2K_w \tilde{p}(x, N) \left| \int_{c^*(N)}^x \frac{\partial \tilde{s}_N(x, c)}{\partial c} dc \right| = 2K_w \tilde{p}(x, N) |\tilde{s}_N(x, c^*(N))| \approx \\ &\approx K_w [p(x, N-1) |s_{N-1}(x, c^*(N))| + p(x, N) |s_N(x, c^*(N))|], \quad |x| > c^*(N) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\tilde{p}(x, N)$ и $\tilde{s}_N(x, c^*(N))$ – величины давления и проскальзывания в некоторой промежуточной точке N -го цикла. Последнее соотношение получено с использованием условия $\tilde{s}_N(x, x) = 0$ и предположения, что при разностороннем действии силы $Q(t)$ износ за цикл равен удвоенному его значению за полуцикл. Функция $w(x, N)$, определенная соотношением (2.3), удовлетворяет условию

$$\Delta w(c^*(N), N) = \Delta w(a(N), N) = 0 \quad (2.4)$$

Условия (2.4) выписаны только для положительных значений x , поскольку $w(x, N)$, $p(x, N)$, $q(x, c)$ – четные функции переменной x .

Таким образом, чтобы определить приращение износа за N -й цикл, необходимо вычислить относительное проскальзывание $s_N(x, c^*(N))$, соответствующее максимальному значению тангенциальной силы Q^* .

3. Расчет функции $s_N(x, c^*(N))$. Функция $s_N(x, c^*(N))$ определяется из соотношения (4) при $c(t) = c^*(N)$. Для определения касательных перемещений u_{xi} граничных точек индентора ($i = 1$) и основания ($i = 2$) воспользуемся известными соотношениями между контактными напряжениями и перемещениями границы упругой полуплоскости [9]

$$\frac{du_{xi}}{dx} = -\frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} p(x) - \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \int_{-a}^b \frac{q(x')}{x-x'} dx' \quad (3.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – нормальное и тангенциальное напряжения на границе полуплоскости.

Из соотношений (1.2), (1.4) и (3.1) с учетом того, что контактирующие тела имеют одинаковые упругие постоянные ($E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$), получим

$$\begin{aligned} s(x, N) &\equiv -s_N(x, c^*(N)) = s_N(c^*(N), c^*(N)) - s_N(x, c^*(N)) = \\ &= \frac{\gamma}{k_t} w(x, N) q_N(x, c^*(N)) + \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a(N)}^{a(N)} q_N(x', c^*(N)) \ln \left| \frac{x-x'}{c^*(N)-x'} \right| dx' \quad (3.2) \\ c^*(N) &\leq |x| \leq a(N), \quad E^* = E/(2(1-\nu^2)) \end{aligned}$$

Касательные контактные напряжения $q_N(x, c^*(N)) \equiv q(x, N)$ на N -м цикле, входящие в выражение (11), соответствуют $\dot{Q}(t) = Q^*$. Функция $q(x, N)$ может быть представлена в виде

$$q(x, N) = \begin{cases} \mu p(x, N) - q^*(x, N), & |x| < c^*(N) \\ \mu p(x, N), & c^*(N) \leq |x| \leq a(N) \end{cases} \quad (3.3)$$

Если контактирующие тела имеют одинаковые упругие постоянные, то функция $q^*(x, N)$ определяется из уравнения [6]

$$\int_{-c^*(N)}^{c^*(N)} \frac{q^*(t, N) dt}{x-t} = \frac{\pi \mu E^*}{2} H(x, N), \quad |x| < c^*(N) \quad (3.4)$$

и условий

$$\int_{-c^*(N)}^{c^*(N)} q^*(x, N) dt = \mu P - Q^*, \quad q^*(c^*(N), N) = 0 \quad (3.5)$$

Здесь $H(x, N)$ – зазор между поверхностями в ненагруженном состоянии на N -м цикле, а $H'(x, N)$ – производная функции $H(x, N)$ по x .

Поскольку внутри зоны сцепления $|x| \leq c^*(N)$ не происходит изнашивания и соответственно формоизменения поверхностей, функция $H'(x, N)$ не меняется с увеличением числа циклов N , т.е. $H'(x, N) = f'(x)$ (здесь $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$).

Задача (3.4), (3.5) имеет единственное решение, откуда следует вывод, что функция $q^*(x, N)$ и полуширина зоны сцепления $c^*(N)$ не меняются с увеличением числа циклов, т.е.

$$q^*(x, N) = q^*(x, 0) = q^*(x), \quad c^*(N) = c^*$$

Решение этой системы уравнений может быть записано в следующей форме [8]:

$$q^*(x) = \frac{\mu E^* \sqrt{c^{*2} - x^2}}{2\pi} \int_{-c^*}^{c^*} \frac{f'(t) dt}{(t-x)\sqrt{c^{*2} - t^2}}, \quad |x| \leq c^* \quad (3.6)$$

Полуширина зоны сцепления c^* определяется из уравнения

$$-\frac{\mu E^*}{2} \int_{-c^*}^{c^*} \sqrt{\frac{c^* - t}{t + c^*}} f(t) dt = \mu P - Q^* \quad (3.7)$$

4. Решение контактной задачи на N -м цикле. Величина $\Delta w(x, N)$ определяет приращение линейного износа обоих тел на N -м цикле, поэтому полный линейный износ после N циклов рассчитывается по формуле

$$w(x, N) = \sum_{n=1}^N \Delta w(x, n) \quad (4.1)$$

Величина $w(x, N)$ характеризует толщину разрушившегося за N циклов слоя, состоящего из отделившихся от основного материала частиц. Предполагая, что некоторое количество этих частиц формирует на поверхности в зонах проскальзывания промежуточный слой толщины $h(x, N) = \gamma w(x, N)$ ($0 \leq \gamma < 1$), определим зазор между поверхностями на N -м цикле в ненагруженном состоянии как

$$H(x, N) = f(x) + (1 - \gamma)w(x, N) \quad (4.2)$$

Условие контакта на N -м цикле принимает форму

$$u_{z1}(x, N) + u_{z2}(x, N) + u_{z3}(x, N) = D(N) - H(x, N) \quad (4.3)$$

где $u_{z1}(x, N)$, $u_{z2}(x, N)$ и $u_{z3}(x, N)$ – перемещения в точке x по нормали к границе контактирующих тел ($i = 1, 2$) и третьего тела ($i = 3$) за счет их деформации, $D(N)$ – сближение тел.

В предположении, что толщина разрушившегося слоя $w(x, N)$ мала и соизмерима с упругими перемещениями u_{zi} ($i = 1, 2$), граничные условия рассматриваются на недеформированной поверхности. При этом соотношение между контактными давлениями $p(x, N)$ и упругими перемещениями $u_{zi}(x, N)$ имеет вид [9]

$$u_{zi}(x, N) = -\frac{2(1 - v_i^2)}{\pi E_i} \int_{-a(N)}^{a(N)} \ln|x - x'| p(x', N) dx' + \text{const} \quad (4.4)$$

Для определения смещений в третьем теле используется модель Винклера [4]

$$u_{z3}(x, N) = \frac{\gamma}{\kappa} w(x, N) p(x, N) \quad (4.5)$$

Постоянная κ характеризует упругий модуль третьего тела.

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – гладкие функции, то неизвестная полуширина $a(N)$ области контакта находится из условия

$$p(a(N), N) = 0 \quad (4.6)$$

Контактное давление $p(x, N)$ также удовлетворяет уравнению равновесия

$$\int_{-a(N)}^{a(N)} p(x, N) dx = P \quad (4.7)$$

Подставляя выражения (4.2), (4.4) и (4.5) в условие контакта (4.3), записанное для произвольной точки $|x| \leq a(N)$ и при $x = a(N)$, и принимая во внимание соотношение (4.6), получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a(N)}^{a(N)} \ln \left| \frac{a(N) - x'}{x - x'} \right| p(x', N) dx' + \frac{\gamma w(x, N)}{\kappa} p(x, N) + \\ & + (1 - \gamma) w(x, N) = f(a(N)) - f(x), \quad |x| \leq a(N) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Уравнения (4.6), (4.7) и (4.8) совместно с равенством

$$w(x, N) = w(x, N - 1) + K_w [p(x, N - 1)s(x, N - 1) + p(x, N)s(x, N)] \quad (4.9)$$

полученным из соотношений (2.3) и (4.1), используются для определения контактных давлений $p(x, N)$ и полуширины области контакта $a(N)$ на N -м цикле. Значения $p(x, N - 1)$, $w(x, N - 1)$ и $s(x, N - 1)$ известны из решения контактной задачи на предыдущем шаге.

Компоненту напряжений $\sigma_{xx}(x, N)$ при $z = 0$ можно затем определить, используя решение Мусхелишвили [8]. Имеем

$$\sigma_{xx}(x, N) = -p(x, N) + \frac{2}{\pi} \int_{-a(N)}^{a(N)} \frac{q(x', N) dx'}{x' - x}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.10)$$

5. Асимптотический анализ. Поскольку функция износа поверхности в области относительного проскальзывания является монотонно возрастающей, давление в этой области стремится к нулю. На краю области сцепления функции $\Delta w'(x, N)$ и $H'(x, N)$ теряют разрыв, поэтому контактное давление стремится при $N \rightarrow \infty$ к следующему распределению [8]:

$$p_\infty(x) = \begin{cases} \frac{E^*}{2\pi\sqrt{c^*{}^2 - x^2}} \int_{-c^*}^{c^*} \frac{\sqrt{c^*{}^2 - t^2} f'(t) dt}{t - x} + \frac{P}{\pi\sqrt{c^*{}^2 - x^2}}, & |x| < c^* \\ 0, & c^* < |x| \leq a_\infty \end{cases} \quad (5.1)$$

Это решение удовлетворяет уравнениям (4.6)–(4.8) при $0 \leq \gamma < 1$.

Асимптотическое выражение для тангенциальных контактных напряжений $q_\infty(x)$ следует из условий $s'(x) = 0$ при $|x| \leq c^*$ и $q_\infty(x) = \mu p_\infty(x) = 0$ при $c^* < |x| < a_\infty$, которые в случае одинаковых материалов взаимодействующих тел приводят к интегральному уравнению

$$\int_{-c^*}^{c^*} \frac{q_\infty(t) dt}{x - t} = 0, \quad |x| < c^* \quad (5.2)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию равновесия

$$\int_{-c^*}^{c^*} q_\infty(t) dt = Q^* \quad (5.3)$$

имеет вид

$$q_\infty(x) = \begin{cases} \frac{Q^*}{\pi\sqrt{c^*{}^2 - x^2}}, & |x| < c^*, \\ 0, & c^* < |x| \leq a_\infty \end{cases} \quad (5.4)$$

Полуширина c^* зоны сцепления в соотношениях (5.1) и (5.4) определяется из решения уравнения (3.7).

Заметим, что асимптотическое значение вспомогательной функции $q_\infty^*(x)$ определяется как

$$q_\infty^*(x) = \mu p_\infty(x) - q_\infty(x) = \frac{\mu E^*}{2\pi\sqrt{c^{*2} - x^2}} \int_{-c^*}^{c^*} \frac{\sqrt{c^{*2} - t^2} f'(t)}{t - x} dt + \frac{\mu P - Q^*}{\pi\sqrt{c^{*2} - x^2}}, \quad |x| < c^* \quad (5.5)$$

Это выражение совпадает с функцией $q^*(x)$ (см. (3.6)) и удовлетворяет условиям

$$q_\infty^*(x) = q^*(x) > 0, \quad |x| < c^*; \quad q_\infty^*(-c^*) = q_\infty^*(c^*) = 0$$

Из соотношений (4.10), (5.1) и (5.4) получим

$$\sigma_{xx}^\infty(x) = \begin{cases} -p_\infty(x), & |x| < c^* \\ \frac{-2Q^* \operatorname{sign} x}{\pi\sqrt{x^2 - c^{*2}}}, & |x| > c^* \end{cases} \quad (5.6)$$

Анализ выражений (5.1), (5.4) и (5.6) показывает, что контактные напряжения стремятся к бесконечности на концах области сцепления при $N \rightarrow \infty$, напряжения $\sigma_{xx}^\infty(x)$ при $z = 0$ имеют разрыв при $x = \pm c^*$.

Пределочный переход при $N \rightarrow \infty$ в уравнении (4.8) дает асимптотическое выражение для износа поверхности при $0 \leq \gamma < 1$

$$w_\infty(x) = \begin{cases} 0, & |x| < c^* \\ \frac{1}{1-\gamma} \left[f(a_\infty) - f(x) - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-c^*}^{c^*} p_\infty(x') \ln \left| \frac{a_\infty - x'}{x - x'} \right| dx' \right], & c^* < |x| \leq a_\infty \end{cases} \quad (5.7)$$

Асимптотическое значение полуширины площадки контакта определяется из соотношения $w_\infty(c^*) = 0$, т.е. из условия равенства нулю выражения в скобках в равенстве (5.7) при $x = c^*$. Из асимптотического анализа следует, что асимптотические значения напряжений, а также количество вынесенных из зоны трения продуктов износа не зависят от свойств третьего тела. Свойства последнего влияют только на скорость процесса изнашивания и на общее количество продуктов износа, т.е. на величину

$$W_\infty = 2 \int_{c^*}^{a_\infty} w_\infty(x) dx$$

Функция $w_\infty(x)$ определена соотношением (5.7).

6. Алгоритм численного решения задачи. Введем следующие безразмерные параметры и функции:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}, N) &= \frac{2}{\pi E^*} p(\bar{x}R, N), \quad \bar{q}^*(\bar{x}) = \frac{2}{\pi \mu E^*} q^*(\bar{x}R), \quad \bar{K}_w = \frac{\pi \mu E^*}{2} K_w, \quad \bar{P} = \frac{2P}{\pi R E^*} \\ \bar{Q} &= \frac{2}{\pi \mu R E^*} (\mu P - Q^*), \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{a} = \frac{a}{R}, \quad \bar{c} = \frac{c}{R}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\pi E^*}{2\kappa}, \quad \bar{k}_t = \frac{\pi \mu E^*}{2k_t} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\bar{H}(\bar{x}, N) = \frac{H(\bar{x}R, N)}{R}, \quad \bar{s}(\bar{x}, N) = \frac{s(\bar{x}R, N)}{R}, \quad \bar{f}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}R)}{R}, \quad \bar{w}(\bar{x}, N) = \frac{w(\bar{x}R, N)}{R}$$

где R – некоторый характерный размер, определенный геометрией соприкасающихся поверхностей.

Поскольку $p(x, N)$ – четная функция, справедливо соотношение

$$\int_{-\bar{a}(N)}^{\bar{a}(N)} \ln \left| \frac{x - x'}{\bar{a}(N) - x} \right| p(x', N) dx' = \int_0^{\bar{a}(N)} \ln \left| \frac{x^2 - x'^2}{\bar{a}^2(N) - x'^2} \right| p(x', N) dx'$$

с использованием которого система, состоящая из уравнений (4.6), (4.7) и (4.8), преобразуется к следующей системе уравнений, записанной в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{a}(N)} \ln \left| \frac{\bar{a}^2(N) - x'^2}{\bar{x}^2 - x'^2} \right| \bar{p}(x', N) dx' + \bar{k}\gamma \bar{w}(\bar{x}, N) \bar{p}(\bar{x}, N) + \\ & + (1 - \gamma) \bar{w}(\bar{x}, N) = \bar{f}(\bar{a}(N)) - \bar{f}(\bar{x}), \quad |\bar{x}| \leq \bar{a}(N) \\ & \int_0^{\bar{a}(N)} \bar{p}(\bar{x}, N) d\bar{x} = \frac{\bar{P}}{2}, \quad \bar{p}(\bar{a}(N), N) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{x}, N) &= \bar{K}_w [|\bar{s}(\bar{x}, N)| \bar{p}(\bar{x}, N) + |\bar{s}(\bar{x}, N-1)| \bar{p}(\bar{x}, N-1)] + \bar{w}(\bar{x}, N-1) \\ \bar{w}(\bar{x}, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\bar{s}(\bar{x}, N) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \bar{x} < \bar{c}^* \\ \int_0^{\bar{a}(N)} \ln \left| \frac{\bar{x}^2 - x'^2}{\bar{c}^{*2} - x'^2} \right| \bar{q}(x', N) dx' + \gamma \bar{k}_t \bar{p}(\bar{x}, N) \bar{w}(\bar{x}, N), & \bar{c}^* \leq \bar{x} \leq \bar{a}(N) \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\bar{q}(\bar{x}, N) = \begin{cases} \bar{p}(\bar{x}, N) - \bar{q}^*(\bar{x}), & 0 \leq \bar{x} < \bar{c}^* \\ \bar{p}(\bar{x}, N), & \bar{c}^* \leq \bar{x} \leq \bar{a}(N) \end{cases} \quad (6.5)$$

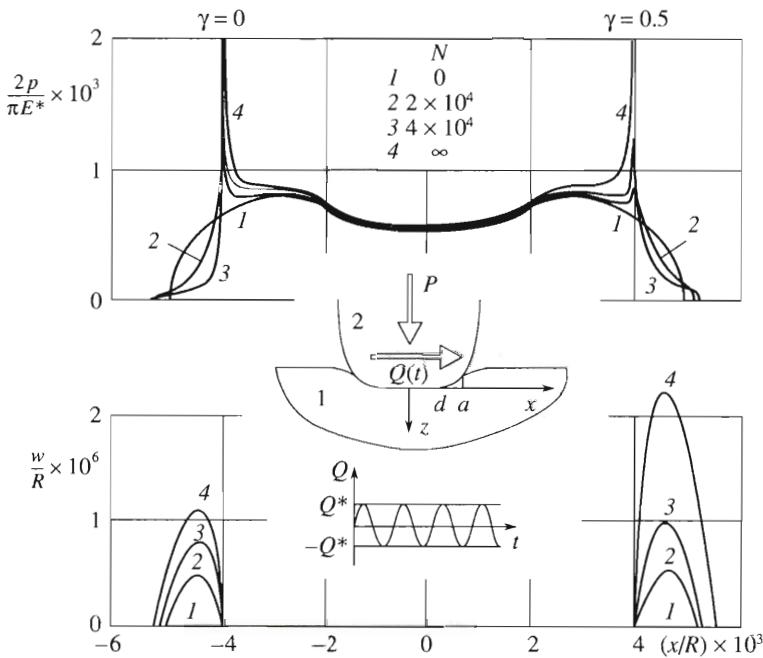
Функция $\bar{q}^*(\bar{x})$ и параметр \bar{c}^* определяются из соотношений (3.6) и (3.7). Параметры \bar{K}_w , \bar{P} , \bar{Q} , \bar{k} и γ задаются.

Для вычисления эволюции контактных характеристик при изнашивании была использована пошаговая процедура. На каждом шаге полуширина площадки контакта делилась на n отрезков $\{[t_j, t_{j+1}]\}_{j=1}^n$ (не обязательно равных) и функция $\bar{p}(\bar{x}, N)$ аппроксимировалась полигональной (с узлами в точках $\{t_j\}_{j=1}^{n+1}$) функцией $p(t)$ вида

$$p(t) = p_j + \frac{p_{j+1} - p_j}{t_{j+1} - t_j} (t - t_j), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.6)$$

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = a, \quad p_j = p(t_j), \quad p_{n+1} = p(a) = 0$$

В результате подстановки выражения (6.6) в систему (6.2) и интегрирования линейной функции на каждом отрезке система (6.2) была сведена к системе линейных уравнений. Полуширина области контакта на N -м цикле определялась из системы (6.2) последовательными приближениями. Функции $\bar{s}(\bar{x}, N-1)$, $\bar{w}(\bar{x}, N-1)$ и $\bar{p}(\bar{x}, N-1)$ считались известными с $(N-1)$ -го шага. Решение системы (6.2) позволяет на каждом N -м цикле определить в безразмерном виде контактное давление $\bar{p}(\bar{x}, N)$ и касательные напряжения $\bar{q}(\bar{x}, N)$, износ $\bar{w}(\bar{x}, N)$, функцию проскальзывания $\bar{s}(\bar{x}, N)$ и полуширину области контакта $\bar{a}(N)$.



Фиг. 1

7. Пример расчета эволюции контактных характеристик при изнашивании. Изложенный алгоритм был использован для расчета формоизменения тел и перераспределения напряжений при взаимодействии упругого полупространства с индентором, представляющим собой штамп с плоским основанием и закругленными кромками (фиг. 1). В этом случае

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+d)^2}{2R}, & -a(N) \leq x < -d \\ 0, & -d \leq x < d \\ \frac{(x-d)^2}{2R}, & d \leq x < a(N) \end{cases} \quad (7.1)$$

Для численных расчетов были взяты следующие значения безразмерных параметров:

$$\bar{K}_w = 0.0495, \quad \bar{P} = 0.631 \cdot 10^{-5}, \quad \bar{Q} = 0.788 \cdot 10^{-6} \quad \text{или} \quad \bar{Q} = 0.310 \cdot 10^{-5}$$

$$\bar{d} = \frac{d}{R} = 0.002, \quad \bar{\kappa} = 1.1, \quad \bar{k}_t = 0.57$$

Как следует из соотношений (6.1), для выбранных значений безразмерных параметров величина \$Q^*/(\mu P)\$ равна соответственно 0.875 или 0.509.

Начальная функция распределения давления имеет вид [6]

$$p(x) = \pi(x, a) \triangleq \frac{E^*}{2\pi R} \left[2\sqrt{a^2 - x^2} \arccos \frac{d}{a} + (x+d) \ln \left| \frac{y_1 + y}{yy_1 + 1} \right| - (x-d) \ln \left| \frac{y_1 - y}{yy_1 - 1} \right| \right]$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right), \quad y_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{d}{a}\right)$$

Полуширина области контакта a в начальный момент времени определяется из решения уравнения

$$a^2 \arccos \frac{d}{a} - d \sqrt{a^2 - d^2} = \frac{2PR}{E^*}$$

Из соотношений (3.6), (3.7) можно определить функцию $q^*(x)$ и полуширину c^* зоны сцепления

$$q^*(x) = \mu\pi(x, c^*), \quad c^{*2} \arccos \frac{d}{c^*} - d \sqrt{c^{*2} - d^2} = \frac{2R(\mu p - Q^*)}{\mu E^*} \quad (7.2)$$

Как было показано в [6], границы зоны сцепления $x = \pm c^*$ всегда расположены вне плоского участка основания $|x| \leq d$, т.е. $c^* > d$.

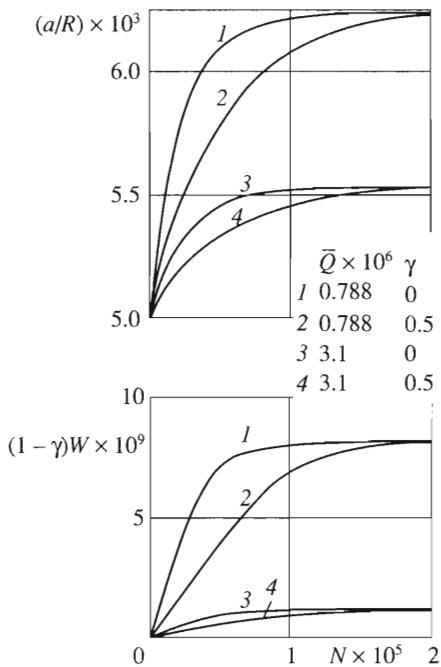
В процессе изнашивания контактные давления при $N \rightarrow \infty$ стремятся к асимптотической функции $p_\infty(x)$, которая на основании соотношений (5.1) и (7.1) имеет вид

$$\begin{aligned} p_\infty(x) = & \frac{E^* c^*}{2\pi R} \frac{1 + \eta^2}{1 - \eta^2} \left\{ \delta \sqrt{1 - \delta^2} + \frac{2PR}{E^* c^*} + \left[1 - \frac{8\eta^2}{(1 + \eta^2)^2} \right] \arccos \delta + \right. \\ & \left. + 2\eta \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} \ln \left| \frac{(\eta_1 + \eta)(1 - \eta\eta_1)}{(\eta_1 - \eta)(1 + \eta\eta_1)} \right| + \delta \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \ln \left| \frac{\eta_1^2 - \eta^2}{1 - \eta^2 \eta_1^2} \right| \right\}, \quad |x| < c^* \end{aligned} \quad (7.3)$$

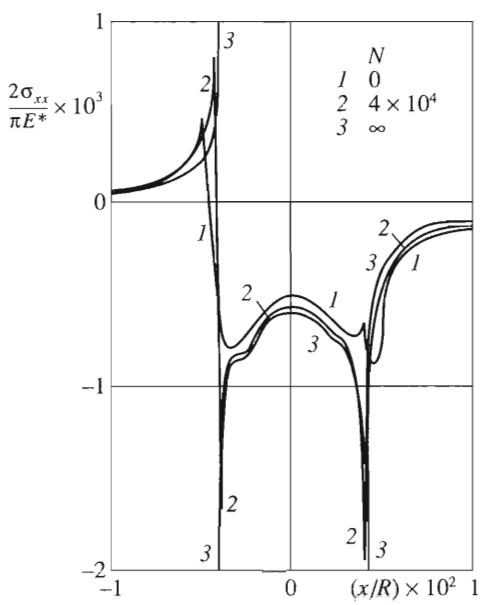
$$\eta = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{c^*}\right), \quad \eta_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{d}{c^*}\right), \quad \delta = \frac{d}{c^*}$$

На фиг. 1 представлены результаты расчета эволюции контактных давлений $\bar{p}(\bar{x}, N)$ и функции $\bar{w}(\bar{x}, N)$ для разного числа циклов N при $\gamma = 0$ (слева) и $\gamma = 0.5$ (справа) для числа циклов от $N = 0$ до $N \rightarrow \infty$ при $\bar{Q} = 0.31 \cdot 10^{-5}$. Распределение давлений претерпевает существенные изменения при фреттинге. Значения давлений возрастают внутри зоны сцепления и убывают в зонах проскальзывания, где имеет место изнашивание поверхностей. При неограниченном возрастании числа циклов (т.е. при $N \rightarrow \infty$) давление на границе зон проскальзывания и сцепления (при $x = c^*$) неограниченно растет.

Распределение продуктов износа в зонах проскальзывания для тех же значений числа циклов N показано в нижней части фиг. 1. Максимальный износ – в средних частях зон проскальзывания. Абсолютное значение правой производной $\bar{w}'(\bar{x}, N)$ в точке c^* (и аналогично левой производной $\bar{w}'(\bar{x}, N)$ в точке $-c^*$) возрастает с ростом количества циклов N . Сравнительный анализ эволюции контактных давлений и функции износа при полном удалении продуктов износа из зоны трения ($\gamma = 0$) и частичном с образованием третьего тела ($\gamma = 0.5$) показал, что процесс изнашивания в обоих случаях можно разделить на две стадии: приработка и установившийся режим. Последний характеризуется распределениями контактного давления и износа, представленными аналитически выражениями (5.1) и (5.7). Процесс приработки идет быстрее в случае полного удаления продуктов износа из зоны контакта ($\gamma = 0$). В случае, когда часть продуктов износа накапливается в области трения, растет объем материала, подверженного разрушению, т.е. функция $\bar{w}(\bar{x}, N)$ возрастает.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 иллюстрируются эволюция полуширины области контакта $\bar{a}(N)$ в процессе изнашивания и зависимость $(1 - \gamma)W(N)$, где

$$W(N) = \int_{c^*}^{\bar{a}(N)} \bar{w}(\bar{x}, N) d\bar{x}$$

характеризующая объем продуктов износа, унесенных из зоны трения, от числа циклов N для разных значений тангенциальных сил, приложенных к индентору, в случае полного ($\gamma = 0$) и неполного ($\gamma = 0.5$) удаления продуктов износа из зоны трения. Размер области контакта и величина $W(N)$ возрастают и стремятся к некоторым постоянным значениям, которые рассчитываются аналитически и зависят от величины \bar{Q} (см. формулу (5.7)). Чем меньше величина \bar{Q} и соответственно больше Q^* , тем больше размер площадки контакта и больше объем удаленных из зоны трения продуктов износа для одинакового значения числа циклов N и их асимптотические значения. Значение γ влияет на процесс приработки: чем больше γ , тем больше циклов требуется для выхода на установившийся процесс изнашивания.

На время приработки влияет также значение коэффициента износа K_w : его увеличение сокращает время приработки. Решение системы уравнений, полученной выше, позволяет также рассчитать эволюцию зазора между поверхностями, а также напряженного состояния в подповерхностных слоях материала, что существенно для анализа характера разрушения поверхностей при фреттинге. На фиг. 3 приведены распределения напряжений σ_{xx} при $\bar{Q} = 0.31 \cdot 10^{-5}$ для разного числа циклов N . В начале процесса величина растягивающих напряжений для выбранного направления действия силы Q^* мак-

симальна на левом конце площадки контакта ($x = -a(0)$). С увеличением числа циклов место концентрации максимальных растягивающих напряжений смещается на границу зоны сцепления и проскальзывания, т.е. в точку $x = -c^*$. При действии осциллирующей тангенциальной силы $Q(t)$ наличие высоких амплитудных значений напряжений на концах зоны сцепления приводит к накоплению в этих точках поврежденности и к зарождению трещин, что обнаружено в ряде экспериментов [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00766), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 03-51-6046) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1245.2006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уотерхауз Р.Б. Фреттинг-коррозия. Л.: Машиностроение, 1976. 271 с.
2. Johansson L. Numerical simulation of contact pressure evolution in fretting // Trans. ASME. J. Tribology, 1994. V. 116. P. 247–254.
3. Goryacheva I.G., Rajeev P.T., Farris T.N. Wear in partial slip contact // Trans. ASME. J. Tribology. 2001. V. 123. № 4. P. 848–856.
4. Johnson K.L. Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985 = Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
5. Hills D.A., Nowell D. Mechanics of Fretting Fatigue. Dordrecht etc. : Kluwer, 1994. 248 p.
6. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
7. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces // J. Appl. Phys. 1953. V 24. № 8. P. 981–988.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
10. Szolwinski M.P., Farris T. Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminium alloy // Wear. 1998. V. 221. № 1. P. 24–36.

Москва
e-mail: goryache@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
10.II.2006