УДК 539.3:534.1

© 2006 г. А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ УПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Рассматриваются плоские одномерные волны малой амплитуды, распространяющиеся поперек слоя несжимаемой упругой среды, отражаясь поочередно от его границ. Колебания вызваны малым периодическим (или близким к периодическому) внешним воздействием на одной из границ слоя, когда период внешнего воздействия близок к периоду собственных колебаний слоя. Одна из границ упругого слоя неподвижна, а другая совершает малое заданное двумерное движение в своей плоскости. В такой околорезонансной ситуации проявляются нелинейные эффекты, которые могут накапливаться с течением времени. Получена система уравнений, описывающая медленное изменение функций, которые характеризуют колебания среды, на каждом периоде внешнего воздействия. Считается, что все величины зависят как от реального времени, изменение которого при рассматриваемом подходе ограничивается одним периодом, так и от "медленного" времени, для которого малой величиной служит один период реального времени. Предполагается, что эволюция решения происходит при изменении медленного времени, а роль реального времени аналогична роли пространственной переменной. Упомянутая система уравнений получена методом осреднения за период величин, представляющих в уравнениях нелинейные члены и влияние граничных условий. Она содержит производные по реальному и медленному временам, а также осредненные по периоду реального времени значения функций, характеризующих решение. Уравнения имеют гиперболический тип и их решения могут быть как непрерывными, так и содержать слабые и сильные разрывы.

При исследовании слабонелинейных плоских волн в упругих средах было [1, 2] показано, что в несжимаемой среде могут распространяться только поперечные волны, описываемые уравнениями с кубической нелинейностью. В уравнениях учитывались также члены, описывающие малую анизотропию среды [2], причем считалось, что эти члены того же порядка, что и нелинейные. Малость нелинейности и анизотропии приводит к тому, что для проявления эффектов, с ними связанных, требуется большое время. Так, если ε характеризует изменение величин в волне, то, например, время опрокидывания волны Римана конечной длины будет порядка ε^{-2}. Наблюдать проявление этих эффектов в ограниченных объемах среды можно только в случаях, когда волна много раз пробегает по среде, отражаясь от ее границ. Это происходит, например, в задаче об околорезонансных колебаниях упругого слоя, возбуждаемых периодическим воздействием на одной из его границ.

Околорезонансные установившиеся колебания были детально изучены в газе (см., например, [3–8]), находящемся в трубе при различных условиях на ее концах. Получены уравнения, описывающие процесс установления периодических колебаний газа [6]. Поперечные колебания в слое изотропной упругой среды были изучены в случае, когда поперечные колебания совершает одна компонента напряжений и среднее значение напряжений за период равно нулю [9]. Эти колебания, как было упомянуто, описываются уравнениями с кубической нелинейностью в отличие от квадратичной в случае колебаний газа. Были рассмотрены [10] плоские движения при колебаниях слоя плазмы в магнитном поле, ортогональном слою, при частном предположении, что скорость звука совпадает с альфвеновской скоростью. Это приводит к сложному резонансному взаимодействию поперечных альфвеновских возмущений и продольных акустических волн.

При колебаниях слоя слабоанизотропной упругой несжимаемой среды, рассматриваемых ниже, в каждую сторону распространяются два типа волн, скорости которых различаются на величину порядка ε^2, определяемую влиянием нелинейности и анизотропии. Таким образом, условия, близкие к резонансу, осуществляются одновременно для обоих типов волн. Наличие анизотропии среды делает естественным изучение колебаний, в процессе которых среда совершает произвольные движения в плоскостях, ортогональных направлению распространения волн. Для простоты среда предполагается несжимаемой. Если среда сжимаема, но отсутствуют резонансы между продольными и поперечными возмущениями, то продольные возмущения не будут существенно развиваться и можно ожидать, что поперечные колебания будут близки к рассматриваемым далее колебаниям несжимаемой среды.

Ниже получены уравнения, описывающие развитие колебаний при наличии на поверхности слоя внешних воздействий, которые близки к периодическим, т.е. мало меняются от периода к периоду, причем длительность самого периода также может медленно изменяться. Допускается также медленное изменение свойств упругой среды со временем. Полученные уравнения можно использовать как для изучения колебаний, возникающих и изменяющихся в присутствии заданных внешних воздействий, так и для определения внешних воздействий, необходимых для поддержания заранее заданной формы колебаний или их изменений по определенной программе. Рассмотрен пример, в котором вычислены воздействия, необходимые для поддержания колебаний заданной формы.

1. Постановка задачи. Пусть слой несжимаемой упругой среды ширины L находится между двумя параллельными плоскостями, ортогональными некоторому направлению, принятому за ось $x_3 = x$ декартовой лагранжевой системы начального состояния. Рассматриваются плоские одномерные поперечные волны, распространяющиеся в направлении оси x. Оси x_1, x_2 лежат в плоскости, параллельной фронту волны.

Упругая среда является слабонелинейной, обладает малой анизотропией и может быть задана своим упругим потенциалом Φ в виде разложения в ряд по малым компонентам тензора градиентов перемещения $\partial w_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где w_i – компоненты вектора перемещения. В плоских волнах меняются только компоненты: $\partial w_i/\partial x = u_i(x, t)$. При этом в несжимаемой среде $u_3 = \partial w_3/\partial x = \mathrm{const} = 0$, поэтому $\Phi = \Phi(u_1, u_2)$. Если в разложении упругого потенциала Φ в ряд по переменным компонентам деформации u_i, считающимися малыми, ограничиться главными членами, выявляющими нелинейность и анизотропию среды, то в общем случае функцию Φ можно представить в виде [1, 2]

$$\Phi = f\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + g\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \kappa\frac{(u_1^2 + u_2^2)^2}{4} \tag{1.1}$$

Коэффициент f в первом слагаемом мало отличается от модуля сдвига μ и пропорционален квадрату скорости малых возмущений в линейной изотропной среде $c_0^2 = \rho_0 f$. Последнее слагаемое представляет нелинейные свойства среды, его коэффициент κ конечен и может иметь любой знак. Множитель g при анизотропном члене считается малым и положительным. Чтобы действие эффектов нелинейности и анизотропии имело одинаковый порядок, в разложении (1.1) следует принять, что $g \sim \varepsilon^2$, где ε – порядок величин u_i. Среда предполагается однородной, ее плотность $\rho_0 = \mathrm{const}$. В дальнейшем принимается $\rho_0 = 1$, так что $c_0^2 = f$, чего всегда можно добиться выбором системы единиц измерения.

Дифференциальные уравнения одномерных движений несжимаемой упругой среды в лагранжевых переменных представляются гиперболической системой

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

Здесь $v_i = \partial w_i/\partial t$ – компоненты вектора скорости.

Полезно заметить, что для волн небольшой амплитуды, распространяющихся только в одну сторону (например, в положительном направлении оси x), эта система четырех уравнений может быть приближенно, но без потери точности преобразована в систему двух уравнений [2, 11] с потенциалом Φ_1 того же строения, что и (1.1), но несколько измененными коэффициентами $f \to f_1$, $g \to g_1$, $\kappa \to \kappa_1$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i}\right), \quad i = 1, 2$$
$$f_1 = \sqrt{f}, \quad g_1 = g/(2\sqrt{f}), \quad \kappa_1 = \kappa/(2\sqrt{f}) \tag{1.3}$$

В линейном приближении в слое изотропной упругой среды между плоскостями $x = -L$ и $x = 0$, свободными от внешних воздействий, могут существовать периодические собственные возмущения, распространяющиеся вдоль оси x со скоростью c_0 и периодом собственных колебаний $T_0 = 2L/c_0$. Влияние анизотропии сказывается в том, что скорости линейных колебаний отличаются от c_0 на величины порядка ε^2.

Пусть теперь одна из границ ($x = -L$) подвергается малому внешнему периодическому воздействию в виде малого периодического движения границы слоя в своей плоскости. В слое возбуждаются вынужденные плоские поперечные волны, бегущие вдоль направления оси x, попеременно отражаясь то от одной, то от другой из границ слоя. Будем сначала считать, что период внешнего воздействия постоянен ($T = \text{const}$) и свойства среды не меняются с течением времени.

На границах выполняются следующие условия: $v_i = 0$ при $x = 0$ и $v_i = \psi_i(t)$ при $x = -L$, причем функции $\psi_i(t)$ – периодические с периодом $T \neq T_0$ и имеют малую амплитуду не менее чем на порядок меньше, чем u_i. Далее будет видно, что если эта амплитуда порядка ε^3, то влияние внешних воздействий может скомпенсировать действие нелинейных членов и возможны стационарные периодические колебания среды.

Будем теперь считать, что период внешних воздействий T постоянен и близок к периоду собственных колебаний T_0, так что величина $a = 2L/T = \text{const}$ мало отличается от скорости собственных колебаний c_0, причем $a^2 - c_0^2 \sim \varepsilon^2$. При сделанных предположениях в уравнениях (1.2) необходимо учитывать нелинейные члены, а решение на одном периоде можно строить как сумму линейных волн, распространяющихся со скоростью a, и малых добавок, происходящих от действия нелинейных членов, которые вместе с действием граничных условий приводят к медленному изменению волн от периода к периоду.

2. Преобразование уравнений. Линейное приближение. Вместо упругого потенциала Φ введем другую функцию

$$F(u_1, u_2) = \Phi - a^2\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \tag{2.1}$$

Так как a^2 отличается от коэффициента f на величину порядка ε^2, все члены новой функции F, в том числе и квадратичные по u_i, имеют порядок ε^4. Преобразуем первую группу уравнений (1.2) так, чтобы все слагаемые порядка ε находились в левых частях уравнений, а все члены более высокого порядка малости (они имеют порядок ε^3) перенесем в правые части. Правые части можно записать через новую функцию F в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - a^2\frac{\partial u_i}{\partial x} = b_i, \quad b_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0; \quad i = 1, 2$$

Левые части этой системы четырех уравнений можно привести к характеристическому виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial t} - a\frac{\partial v_i}{\partial x} + a\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - a\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = b_i(u_k) \\ &\frac{\partial v_i}{\partial t} + a\frac{\partial v_i}{\partial x} - a\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + a\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = b_i(u_k); \quad i, k = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для левых частей этой системы функции

$$w_i^+ = v_i - au_i, \quad w_i^- = v_i + au_i \tag{2.3}$$

являются инвариантами Римана, которые позволяют систему (2.2) записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dw_i^+}{dt} = b_i \text{ вдоль характеристики } \frac{dx}{dt} = a \\ &\frac{dw_i^-}{dt} = b_i \text{ вдоль характеристики } \frac{dx}{dt} = -a \end{aligned} \tag{2.4}$$

причем в правых частях уравнений u_k должны быть выражены через $w_k^{\pm}$:

$$u_k = \frac{1}{2a}(w_k^- - w_k^+)$$

Для исследования задачи используется метод последовательных приближений. За нулевое решение принимается решение линейной системы, когда правыми частями (порядка ε^3) пренебрегается. Это бегущие волны в положительном и отрицательном направлениях оси x, в которых сохраняются соответствующие нулевые приближения инвариантов Римана:

$$w_i^{+0} = \varphi_i(at - x), \quad w_i^{-0} = \vartheta_i(at + x)$$

и соответственно для компонент деформации и скорости справедливы равенства

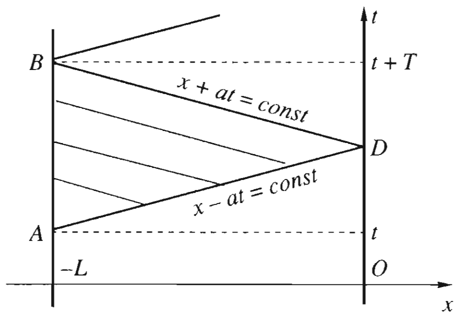
$$u_i^0 = \frac{1}{2a}[\vartheta_i(at + x) - \varphi_i(at - x)], \quad v_i^0 = \frac{1}{2}[\vartheta_i(at + x) + \varphi_i(at - x)] \tag{2.5}$$

Так как, по условию, внешнее воздействие $\psi_i(t)$ имеет амплитуду, много меньшую, чем величины u_i, в рассматриваемом линейном приближении на обеих границах следует принять нулевые граничные условия: $v_i^0 = 0$ при $x = 0$ и при $x = -L$.

Условие на правой границе при $x = 0$ дает

$$\vartheta_k = -\varphi_k \tag{2.6}$$

Однако пока удобно сохранить обе функции $\varphi_i(at - x)$ и $\vartheta_i(at + x)$, чтобы их обозначения указывали на строение их аргументов. Второе граничное условие при $x = -L$ указывает на то, что решение в нулевом приближении является периодическим с периодом $2L/a = T$.



3. Нахождение следующего (нелинейного) приближения. Для упругого потенциала вида (1.1) правые части $b_i(u_k)$ уравнений (2.4) имеют вид

$$b_i = g_i\frac{\partial u_i}{\partial x} - \kappa\left[(3u_i^2 + u_{3-i}^2)\frac{\partial u_i}{\partial x} + 2u_1u_2\frac{\partial u_{3-i}}{\partial x}\right]$$

Коэффициенты

$$g_1 = f - g - a^2, \quad g_2 = f + g - a^2$$

имеют порядок ε^2, а полученные функции $b_i \sim \varepsilon^3$. Для интегрирования уравнений (2.4) пользуемся методом последовательных приближений. Ввиду указанной малости функций b_i в правых частях уравнений (2.4) используем для u_i найденное нулевое приближение (2.5).

В выражениях для $b_i(\varphi_k, \vartheta_k)$ при учете вида аргументов функций φ_k и ϑ_k дифференцирование по x можно заменить дифференцированием по t. Тогда b_i примут вид

$$b_i = \frac{1}{2a^2}\left\{g_i - \frac{\kappa}{4a^2}[3(\varphi_i - \vartheta_i)^2 + (\varphi_{3-i} - \vartheta_{3-i})^2]\right\}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta_i}{\partial t}\right) +$$

$$+ (-1)^{3-i}\frac{\kappa}{4a^4}(\varphi_1 - \vartheta_1)(\varphi_2 - \vartheta_2)\left(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta_{3-i}}{\partial t}\right) \qquad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнения (2.4) с найденными правыми частями (3.1) вдоль своих характеристик.

На фигуре на характеристической плоскости (x, t) изображены границы упругого слоя $x = -L$ и $x = 0$ и характеристика $x - at = \text{const}$ (AD), идущая с ростом времени направо, и характеристика $x + at = \text{const}$ (DB), идущая налево. Функции $\varphi_i(at - x)$ и их производные постоянны на характеристиках (AD), идущих направо, а функции $\vartheta_i(at + x)$ и их производные постоянны на характеристиках (DB), идущих налево.

Выясним, как меняется состояние среды, т.е. u_i, υ_i, а следовательно, $w_i^{\pm}$, в фиксированной точке пространства за время периода T. В качестве точки наблюдения выберем левую границу слоя $x = -L$. Примем состояние $w_i^{\pm}(-L, t)$ в точке A на левой границе за начальное и, интегрируя уравнения (2.4), найдем эти функции в точке B на той же границе через период T, соблюдая при этом выполнение граничных условий на правой границе слоя. Интегрирование первого из уравнений вдоль своей характеристики дает в точке $D(0, t + T/2)$ на правой границе

$$w_i^+(D) \equiv w_i^+(0, t + T/2) = w_i^+(-L, t) + \int_t^{t+T/2} b_i dt$$

При вычислении интегралов от b_i (почленно от каждого слагаемого) учитываем, что функции $\varphi_i(at - x)$ и их производные постоянны вдоль характеристики AD, а функции $\vartheta_i(at + x)$ меняются вдоль AD, но их значения можно считать принесенными вдоль своих характеристик ($at + x = \mathrm{const}$) с отрезка AB границы $x = -L$. Таким образом, при интегрировании уравнения для w_i^+ вдоль AD функции ϑ_i надо интегрировать вдоль всего отрезка AB, т.е. по времени от t до $t + T$. При этом учитываем, что функции $\vartheta_i(-L, t)$ периодические, так что

$$\vartheta_i(-L, t) = \vartheta_i(-L, t+T)$$

В результате получим

$$w_i^+(0, t+T/2) = w_i^+(-L, t) + F_i^+ T \tag{3.2}$$

Величины F_i^+, полученные в результате интегрирования правых частей уравнений (2.4), вычисляются с учетом того,что на правой границе (при $x = 0$) должно быть выполнено граничное условие линейной задачи (2.6). Имеем

$$F_i^+ = \frac{1}{4a^2}\left\{g_i - \frac{\kappa}{4a^2}[3(\varphi_i + \bar{\varphi}_i)^2 + (\varphi_{3-i} + \bar{\varphi}_{3-i})^2 + 3h_{ii} + h_{(3-i)(3-i)}]\right\}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} -$$

$$-\frac{\kappa}{8a^4}(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2) + h_{12})\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t} \tag{3.3}$$

где

$$\bar{\varphi}_i = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi_i dt, \quad h_{ij} = \bar{\varphi}_{ij} - \bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j, \quad \bar{\varphi}_{ij} = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi_i\varphi_j dt; \quad i, j = 1, 2 \tag{3.4}$$

Величины, определенные равенствами (3.4), могут медленно изменяться от периода к периоду, так как для каждого шага прохождения волн от границы до другой границы в качестве функций φ_i выступают функции u_i, получившиеся в результате прохождения предыдущего цикла.

Для вычисления функций $w_i^\pm$ на левой границе слоя можно использовать результат интегрирования второй группы уравнений (2.4) по характеристике второго семейства DB от $t + T/2$ до $t + T$. Начальной точкой служит точка $D(0, t + T/2)$ на правой границе слоя. Интегрируются те же функции $b_i(\varphi_k, \vartheta_k)$, заданные равенствами (3.1). Только на характеристике DB постоянными будут функции $\vartheta_i(at + x)$ и их производные, а значения φ_i приносятся вдоль своих характеристик ($x - at = \mathrm{const}$) с отрезка AB левой границы. В результате интегрирования получаем

$$w_i^-(-L, t+T) = w_i^-(0, /, t+T/2) + F_i^- T \tag{3.5}$$

Учитывая, что

$$(w_i^- + w_i^+)/2 = \upsilon_i \tag{3.6}$$

из граничного условия при $x = 0$ получим

$$w_i^-(0, t+T/2) = -w_i^+(0, t+T/2)$$

а из граничного условия (2.6) для линейного приближения следует, что

$$F_i^- = -F_i^+ = F_i, \quad \text{т.е.} \quad F_i^- - F_i^+ = 2F_i$$

В результате равенство (3.5) с использованием соотношения (3.2) дает

$$w_i^-(-L, t+T) = -w_i^+(-L, t) + 2F_iT$$

4. Уравнения медленной эволюции волн. Добавляя и вычитая из левой части последнего равенства $w_i^-(-L, t)$ и учитывая, как и выше, равенство (3.6), можно вычислить суммарное за полный период T (от точки A до точки B на фигуре) изменение функции w_i^- на левой границе

$$w_i^-(-L, t+T) - w_i^-(-L, t) = 2F_iT - 2\upsilon_i(-L, t) \tag{4.1}$$

Аналогично подсчитывается изменение за период функций w_i^+:

$$w_i^+(-L, t+T) - w_i^+(-L, t) = -2F_iT + 2\upsilon_i(-L, t) \tag{4.2}$$

Последние слагаемые в правых частях уравнений (4.1), (4.2) определяются граничным условием на левой границе, где задано $\upsilon_i(-L, t) = \psi_i(t)$.

Уравнения (4.1), (4.2) описывают малое изменение функций $w_i^\pm$ за период вследствие присутствия в уравнениях (2.4) правых частей, связанных с учетом нелинейных эффектов и внешнего воздействия при $x = -L$. Можно наряду с реальным временем t ввести в рассмотрение “медленное” время τ, для которого период T будет малой величиной. Тогда, поделив каждое из уравнений (4.1), (4.2) на T, можно представить их в виде системы уравнений в частных производных, где одна из переменных – медленное время τ, другая – реальное время t и уравнения описывают изменение функций w_i на левой границе слоя. Имеем

$$\frac{\partial w_i^-}{\partial \tau} = 2\left(F_i - \frac{\psi_i}{T}\right), \quad \frac{\partial w_i^+}{\partial \tau} = -2\left(F_i - \frac{\psi_i}{T}\right) \tag{4.3}$$

Теперь можно вернуться к исходным функциям u_i, υ_i, входящим в постановку задачи. Согласно соотношениям (2.3), $w_i^- = \upsilon_i + au_i$, и на левой границе при $x = -L$

$$w_i^-(-L, t) = \psi_i(t) + au_i(-L, t) \tag{4.4}$$

Здесь предполагается,что ψ_i – периодические функции, т.е. по медленному времени они не меняются: $\partial\psi_i/\partial\tau = 0$. Поэтому первое уравнение (4.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \frac{2}{a}\left(F_i - \frac{\psi_i}{T}\right) \tag{4.5}$$

В постановке задачи предполагалось, что компоненты деформации среды u_i невелики: порядка ε, и следовательно, величины функций φ_i имеют тот же порядок. Как видно из выражений (3.3), функции F_i имеют порядок ε^3, поэтому величина погрешности будет меньше, чем ε^3, если в выражениях для F_i функции φ_k заменить через u_i^0 по формулам (2.5) или приближенно функциями

$$\varphi_i(at) = au_i(-L, t)$$

Кроме того, для получения системы в более привычном виде заменим переменную t на $\xi = at$. Переменная ξ имеет размерность длины и за период времени T меняется от 0 до $2L$. В результате система (4.5) примет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + A_{ij}(u_k)\frac{\partial u_j}{\partial \xi} = -\frac{\psi_i(\xi)}{L}, \quad L = \frac{aT}{2}, \quad i, j, k = 1, 2 \tag{4.6}$$

Здесь

$$A_{ii} = \frac{1}{2a}\left\{g_i - \frac{\kappa}{4}[3(u_i + \bar{u}_i)^2 + (u_{3-i} + \bar{u}_{3-i})^2 + 3h_{ii} + h_{(3-i)(3-i)}]\right\}$$

$$A_{12} = A_{21} = -\frac{\kappa}{4a}[(u_1 + \bar{u}_1)(u_2 + \bar{u}_2) + h_{12}] \tag{4.7}$$

$$\bar{u}_i = \frac{2}{T}\int_0^T u_i dt, \quad h_{ij} = \bar{u}_{ij} - \bar{u}_i\bar{u}_j, \quad \bar{u}_{ij} = \frac{2}{T}\int_0^T u_i u_j dt$$

Таким образом, для описания околорезонансных колебаний в упругом слое получена система двух неоднородных дифференциальных уравнений в переменных τ, t с симметричной матрицей $\|A_{ij}\|$. В этой системе изменение τ не ограничено, а t меняется в пределах одного периода, причем конец одного цикла является началом следующего. Пренебрегая изменением величин за один цикл, можно считать, что все величины – функции t и τ, причем t меняется по замкнутой линии длины T, а зависимость от τ описывает медленное изменение этих функций. Решения уравнений (4.6), (4.7) определяют u_i при $x = -L$ и произвольных значениях времени. Величина τ определяет номер рассматриваемого периода, а t указывает время внутри периода. Зная $u_i(t)$ при $x = -L$, нетрудно найти значения u_i и v_i в любой точке x, t рассматриваемого слоя.

Если считать заданными значения $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, h_{ij}, то система уравнений (4.6), (4.7) гиперболическая, что следует из симметрии матрицы $\|A_{ij}\|$. Элементы матрицы $\|A_{ij}\|$ могут быть представлены в виде вторых производных от некоторой функции $\mathcal{F}(u_1, u_2)$, которая играет роль потенциала.

Уравнения (4.6) примут вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_i}\right) = -\frac{\psi_i(\xi)}{L} \tag{4.8}$$

Здесь

$$\mathcal{F} = \bar{f}\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \bar{g}\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{\bar{\kappa}}{4}[(u_1 + \bar{u}_1)^2 + (u_2 + \bar{u}_2)^2]^2 - \bar{m}u_1u_2$$

$$\bar{f} = \frac{f - a^2}{a} - 2\bar{\kappa}(h_{11} + h_{22}), \quad \bar{g} = \frac{g}{a} - \bar{\kappa}(h_{22} - h_{11}), \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{4a}, \quad \bar{m} = \frac{\kappa}{2a}h_{12} \tag{4.9}$$

Очевидно, $\bar{f}$ и $\bar{g}$ имеют порядок ε^2, так что вся функция $\mathcal{F}$ имеет порядок ε^4. Коэффициенты матрицы $\|A_{ij}\|$ (4.7) выражаются через функцию $\mathcal{F}$ равенствами

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u_i \partial u_j}$$

Заметим, что в выражениях для $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{\kappa}$, $\bar{m}$ с соблюдением принятой точности величину a в знаменателях всех выражений можно заменить на скорость линейных изотропных волн $c_0 = \sqrt{f}$.

Выражения (4.7) для коэффициентов A_{ij} и потенциала $\mathcal{F}$ сильно упрощаются, когда функции u_i при их осреднении за период имеют нулевое среднее $\bar{u}_i = 0$. Легко указать требования, которым должны удовлетворять функции внешнего воздействия ψ_i, чтобы обеспечить желаемое свойство решения. Для этого достаточно проинтегрировать за период уравнения (4.6), положив в них $\bar{u}_i = 0$.

В любом случае полученные уравнения (4.8), описывающие медленное изменение движения от периода к периоду, имеют такой же вид, как хорошо исследованные уравнения (1.3) для поперечных волн, распространяющихся в одном направлении в безграничной упругой среде, а потенциал $\mathcal{F}$ имеет такое же строение, как исходный упругий потенциал Φ_1 в этих уравнениях. Отсутствие слагаемого с произведением $u_1 u_2$ у функции Φ (1.1) было обусловлено специальным выбором осей x_1, x_2 в плоскости фронта волны.

Существенное отличие системы (4.8) от (1.3) состоит в том, что осредненные величины $\bar{u}_i$, h_{ij} зависят от τ, а следовательно, коэффициенты $\bar{f}$, $\bar{g}$ и $\bar{\kappa}$, входящие в выражение (4.9) для функции $\mathcal{F}$, могут медленно меняться с ростом τ. Тем не менее можно ожидать, что решение задачи об эволюции волн будет иметь схожие свойства с решением хорошо исследованной задачи о волнах в безграничной среде. В частности, эволюция решений может привести к образованию разрывов.

5. Медленное изменение периода. Рассмотрим теперь случай, когда происходит медленное изменение от периода к периоду граничных условий, задающих внешнее воздействие. Будем также считать медленно меняющимися со временем также длительность периода $T = T(\tau)$ и упругие коэффициенты среды f, g и κ. Ранее отмечено, что, поскольку внешнее воздействие имеет порядок ε^3, а сами возмущения имеют порядок ε, характерное время, в течение которого может произойти существенное изменение колебаний, имеет порядок ε^{-2}. Если какие-то изменения в граничных условиях происходят за существенно меньшее время, то можно считать, что по прошествии этого времени функции, определяющие колебания, не успевают измениться, если период внешнего воздействия T не меняется, а в случае изменения T изменения всех функций легко могут быть подсчитаны по линейному приближению. Если же характерное время изменения граничных условий по порядку величины больше ε^{-2}, то колебания можно, очевидно, считать квазистационарными. С учетом того что отличие периода внешнего воздействия T от времени, которое требуется характеристикам на прохождение отрезка L в обе стороны, имеет порядок величины не более ε^2, величину $\partial T/\partial t$ следует считать порядка ε^4.

Величина $a = 2L/T$ оказывается при этом переменной, поскольку T может медленно изменяться со временем. Кроме того, будем также считать медленно меняющимися функциями времени f, g и κ в выражении (1.1) для Φ. Введя вместо t переменную $t_1 = \int a(t)dt$, получим для инвариантов (2.3) вместо системы (2.4) новые уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dw_i^+}{dt_1} &= \frac{1}{a(t_1)} b_i + u_i \frac{\partial a}{\partial t_1} \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt_1} = 1 \\ \frac{dw_i^-}{dt_1} &= \frac{1}{a(t_1)} b_i - u_i \frac{\partial a}{\partial t_1} \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt_1} = -1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Согласно сделанной выше оценке величины $\partial T/\partial t$, члены с $\partial a/\partial t_1$ в представляющих интерес случаях имеют в уравнениях (5.1) порядок ε^5 и могут быть отброшены. Если считать, что изменение коэффициентов f, g и κ связано с изменением энтропии, возникающим при прохождении ударных волн, амплитуда которых порядка ε, то за один период изменение коэффициентов не будет превосходить по порядку величины ε^4 [2]. Если ограничиться этим случаем, то при подсчете изменения $\overset{+}{w}_i$ и $\overset{-}{w}_i$ за период можно не учитывать изменения величин a, f, g, и κ в течение одного периода, а учитывать только усредненные изменения этих величин за много периодов, т.е. считать, что a, f, g, и κ – медленно меняющиеся функции времени, т.е. функции τ. Дальнейшие вычисления повторяют случай, когда $T = \text{const}$, с той разницей, что функции нулевого приближения φ_i и ϑ_i будут теперь зависеть от $t_1 - x$ и $t_1 + x$ соответственно. При этом сохраняются выражения (3.1) для b_1 и b_2 с заменой $\partial/\partial t$ на $a(\tau)\partial/\partial t_1$, а также окончательные уравнения (4.6), (4.7) с учетом того, что коэффициенты, входящие в выражения (22), и функции ψ_i зависят как от реального времени t, так и от медленного времени τ.

6. Поддержание стационарного периодического режима колебаний в слое. Полученные уравнения (4.6) позволяют рассмотреть задачу, когда требуется поддерживать или определенным образом изменять колебания упругого слоя. Рассмотрим задачу о поддержании периодических колебаний в случае, когда колебания стационарны. Итак, будем считать, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = 0, \quad u_i(t) = u_i(t+T), \quad T, \bar{u}_i, h_{ij} \text{ – постоянные величины}$$

Тогда при заданном желаемом виде решения $u_i(t)$ оставшиеся члены позволяют найти функции внешнего воздействия $\psi_i(t)$, которые на каждом цикле будут компенсировать возникающие нелинейные проявления. Имеем

$$\psi_i(t) = -A_{ij}\frac{L}{a}\frac{du_j(t)}{dt}$$

Из этих равенств и выражений (4.7) для A_{ij} видно, что функции $\psi_i(t)$, определяющие внешние воздействия, имеют порядок ε^3, если основное решение u_i имеет порядок ε.

Для иллюстрации этой задачи предлагается простой пример. Пусть периодическое решение, которое нужно поддерживать в слое, на границе имеет вид

$$u_1 = A\sin\omega t, \quad u_2 = B\cos\omega t$$

При этом $\omega = 2\pi/T$, а период T близок к резонансному $T_0 = 2L/c_0$, определяемому скоростями поперечных волн в рассматриваемом упругом материале. Тогда

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = h_{12} = 0, \quad h_1 = A^2, \quad h_2 = B^2$$

и для функций ψ_i получаются выражения

$$\psi_1 = -\frac{A\pi}{2a^2}\left[g_1 - \frac{\kappa}{8}(9A^2 + B^2)\right]\cos\omega t - \frac{3A\pi\kappa}{32a^2}(A^2 - B^2)\left(\cos\frac{\omega t}{2} + \cos\frac{3\omega t}{2}\right)$$

$$\psi_2 = \frac{B\pi}{2a^2}\left[g_2 - \frac{\kappa}{8}(A^2 + 9B^2)\right]\sin\omega t - \frac{3B\pi\kappa}{32a^2}(A^2 - B^2)\left(\sin\frac{\omega t}{2} - \sin\frac{3\omega t}{2}\right)$$

состоящие из суммы нескольких гармоник с периодами кратными заданному. Первые члены в этих выражениях напоминают результат исследования линейной задачи. При определенных значениях a (определяемых периодом T) один из этих членов может обратиться в нуль. Вторые слагаемые в выражениях для ψ_i исчезают при $A = B$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00219, 05-01-00375) и Программы поддержки ведущих научных школ НШ-4710.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bland D.R.* Nonlinear Dinamic Elasticity. Toronto etc.: Waltham, 1969 = *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. *Chester W.* Resonant oscilations in closed tubes // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt. 1. P. 44–64.
4. *Крайко А.Н., Ни А.Л.* О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 77–88.
5. *Ни А.Л.* Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 607–618.
6. *Гусев В.Э.* Установление вынужденных колебаний в акустических резонаторах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. Вып. 2. С. 204–212.
7. *Егорушкин С.А.* Околорезонансные колебания газа, движущегося в канале переменного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 107–115.
8. *Enflo B.O., Hedberg C.M., Rudenko O.* Nonlinear standing waves in a layer excited by the periodic motion of its boundary // Proc.16th Intern. Symp. Nonlinear Acoustics. Nonlinear Acoustics at Beginning of the 21st Century. Moscow: Faculty of Physics Moscow State Univ., 2002. V. 1. P. 49–52.
9. *Сибгатуллин Н.Р.* О нелинейных поперечных колебаниях при резонансе в упругом слое и слое идеально проводящей жидкости // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 79–87.
10. *Сибгатуллин Н.Р.* О нелинейном механизме возбуждения ударных волн в ограниченных системах при резонансе поперечных колебаний // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 2. С. 131–139.
11. *Куликовский А.Г.* Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.

Москва
e-mail: kulik@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
11.IV.2006