

УДК 533.6.011; 697.4

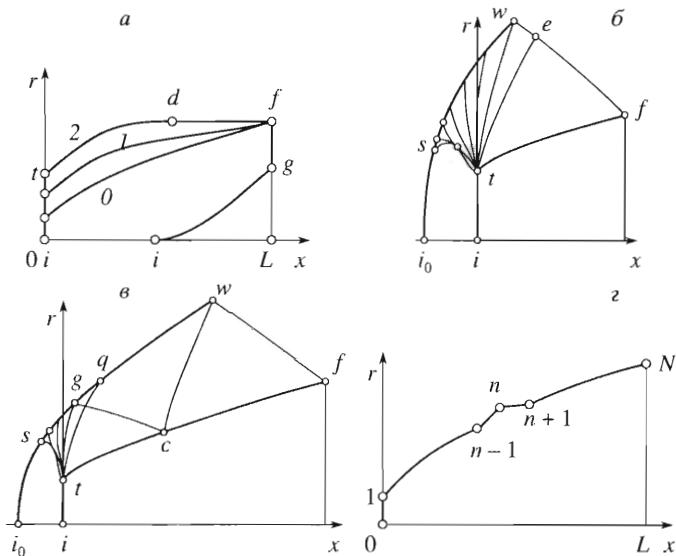
© 2006 г. Н. Л. Ефремов, А. Н. Крайко, К. С. Пьянков, С. А. Таковицкий

**ПОСТРОЕНИЕ В РАМКАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА
ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПРИ ЗАДАННЫХ ГАБАРИТАХ И ОБЪЕМЕ**

Прямым методом в рамках уравнений Эйлера решена задача построения осесимметричной головной части (ГЧ), реализующей минимум волнового сопротивления при заданных объеме и габаритах. Как и в приближении формулы Ньютона, оптимальные контуры наряду с передним торцом – участком краевого экстремума по продольной координате и пологим участком двустороннего экстремума – могут содержать концевую цилиндрическую часть с горизонтальным участком краевого экстремума по максимально допустимой радиальной координате. В прямом методе искомыми параметрами (“управлениями”), определяющими форму оптимального контура, служат радиусы точек участка двустороннего экстремума, включая радиус торца, при фиксированных абсциссах. Для каждого удлинения (отношения длины к радиусу основания) при превышении некоторого значения коэффициента объема (отношения объема к объему цилиндра максимальных габаритов) оптимальная ГЧ заканчивается концевым цилиндрическим участком. Построение оптимальной ГЧ, которое начинается от некоторого начального, удовлетворяющего ограничениям задачи контура, осуществляется за конечное число циклов. На каждом цикле корректируются все управление, причем наряду с направлениями изменения находятся их приращения, а необходимая для этого информация при любом числе управлений получается за три прямых расчета. Еще одно достоинство метода – быстрая, близкая к квадратичной сходимость. Проведено сравнение построенных ГЧ с ГЧ, оптимальными в приближении формулы Ньютона.

1. Введение. В разных постановках интерес к задачам построения головной части (ГЧ) минимального волнового сопротивления, начиная с Ньютона [1, 2], проявляли многие математики и механики. Задача об оптимальной осесимметричной ГЧ заданного удлинения (“задача Ньютона – ЗН”), решенная Ньютоном в рамках предложенной им приближенной формулы (“формулы Ньютона – ФН”) для определения давления на поверхности обтекаемого тела, была первой задачей вариационного исчисления. Важнейший элемент ее решения – передний торец – участок краевого экстремума, появляющийся из-за ограничения, налагаемого на максимально допустимую длину, а в приближении ФН – одновременно из-за наличия границ ее применимости [3–5]. При решении задач оптимального профилирования в рамках ФН второе столь же важно, как и первое. Если, как показано на фиг. 1, *a*, ось x цилиндрических координат x, r направить по вектору скорости набегающего потока V_∞ , а уравнение искомого контура записать в форме $x = X(r)$ с $X(0) = 0$ и $X(R) = L$, где L и R – длина и радиус основания ГЧ, то в ЗН указанные ограничения примут вид

$$0 \leq X(r) \leq L, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{ctg} \vartheta = X' \equiv \frac{dX}{dr} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

В силу этих ограничений на торце допустимы лишь односторонние вариации: $\delta X \geq 0$, $\delta \vartheta \leq 0$. По указанной причине здесь не обязаны выполняться необходимые условия оптимальности, которые составляют основное содержание классических курсов вариационного исчисления (в рамках ФН на торце при выполнении необходимого условия экстремума в форме уравнения Эйлера нарушается условие Лежандра – необходимое условие минимума). Последнее, однако, вопреки широко распространенному мнению (см. [6], с. 78) отнюдь не означает, что “задача Ньютона получает естественное и стандартное разрешение лишь в рамках современной теории оптимального управления, а в рамках вариационного исчисления такого естественного и стандартного решения этой задачи не получалось”.

Приведенное выше утверждение неверно по двум причинам. Во-первых, рассмотрение участков краевого экстремума столь же естественно и просто, как определение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на конечном интервале, когда в дополнение к экстремумам (точкам нулевой производной – аналогам классических экстремалей вариационного исчисления) нужно всего лишь вычислить ее значения на концах интервала. Во-вторых, в [1–5] решение ЗН получено именно в рамках вариационного исчисления без применения таких инструментов современной теории оптимального управления, как принципы максимума Понтрягина и Беллмана, линейное и динамическое программирование. Наконец, в классическом курсе вариационного исчисления ([7], с. 238–243) торец в ЗН рассматривается как участок, на котором допустимы лишь односторонние вариации X , причем подчеркивается, что $X(r)$ – неубывающая функция. Последнее эквивалентно ограничениям, налагаемым на ϑ согласно (1.1).

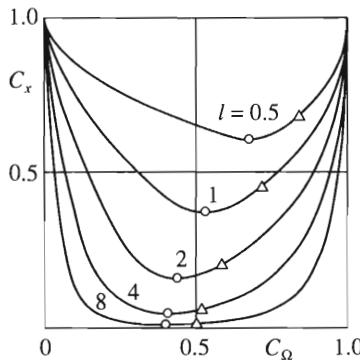
Другое дело, что у Ньютона к обсуждаемой задаче имеют отношение лишь несколько кратких, приведенных без доказательств утверждений, составивших одно “поучение” ([2], с. 428–430, в основном занятые примечаниями А.Н. Крылова). “Поучение” затрагивает три темы: 1) о построении оптимального по сопротивлению усеченного конуса при заданных длине и радиусе основания (11 строк и фигура); 2) об уменьшении сопротивления тела вращения при замене прилегающего к носику овального участка пересекающимися отрезками касательных с углами наклона к оси вращения в 90° и 135° (один

предложение и фигура) и 3) о форме примыкающего к переднему торцу полого участка оптимального контура (10 строк и фигура). При этом закон, определяющий форму указанного участка, записан в виде отношения длин четырех связанных с ним прямолинейных отрезков. Приведенные в [1, 2] в примечаниях переводчиков XVIII века способы получения этого отношения даже отдаленно не напоминают привычный аппарат вариационного исчисления. В рамках такого аппарата соответствующий вывод дан в [2] А.Н. Крыловым. Однако ни у Ньютона, ни в примечаниях А.Н. Крылова не приведены причины появления переднего торца, а именно этот момент для аэродинамиков, занявшихся в середине XX века решением ЗН и ее обобщений, был особенно важен. На самом деле, если учесть ограничения (1.1), то обоснованием введения торца могут служить “первое и второе” утверждения Ньютона. Из них же, как показал А.Н. Крылов [2], следует необходимое условие минимума: $X' \geq 1$, более сильное, чем условие Лежандра $X' \geq 1/\sqrt{3}$.

ЗН была решена [8] в рамках уравнений Эйлера, описывающих осесимметричное течение идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Как и ранее [1–5], построенные контуры включают передний торец – участок краевого экстремума, причина появления которого теперь связана только с ограничением длины ГЧ, и примыкающий к нему с изломом гладкий пологий участок. При малых удлинениях $l = L/R$ пологий участок получается как точное решение вариационной задачи. При удлинениях, превышающих некоторую зависящую от числа Маха набегающего потока M_∞ величину, аналогичное точное решение требует введения сначала одного, а затем (по мере увеличения удлинения) большего числа внутренних изломов, из которых даже самый большой мал и слабо влияет на величину сопротивления. Для больших l строились контуры [8], не удовлетворяющие тому из условий оптимальности, которое определяет главный излом. В этом смысле они названы “близкими к оптимальным”. То, что торец – участок краевого экстремума, было показано [8] сравнением сопротивлений тел, получающихся разными допустимыми варьированиями торца.

До последнего времени ГЧ минимального волнового сопротивления при ограничениях, отличных от габаритных, строились только в приближении ФН. Попытки построения оптимальной ГЧ при заданных радиусе основания R и объеме Ω [9, 10] оказались неудачными, поскольку авторы этих работ, не поняв причин появления торца в ЗН, пытались при свободной длине, как и в ЗН, строить решение с передним торцом. В их решении при малых безразмерных объемах: $0 \leq \omega \equiv \Omega/(\pi R^3) \leq 313\sqrt{3}/3645 \approx 0.149$ оптимальна ГЧ с передним торцом, при $0.346 \approx \sqrt{3}/5 \leq \omega \leq \infty$ – заостренная ГЧ, а при $0.149 \leq \omega \leq 0.346$, утверждалось, что “решение, если и существует, не может быть получено в рассматриваемой постановке” [10]. Решение данной задачи в той же постановке было построено [11] (см. также [5]) для всех ω : заостренные ГЧ оптимальны в меньшем диапазоне ($0.433 \approx 13/30 \leq \omega \leq \infty$), а при $0 \leq \omega \leq 13/30$ оптимальна принципиально новая конфигурация – острие *ig*, выступающее из заднего торца *gf* (фиг. 1, *a*). Задний торец, как и передний в ЗН, это участок краевого экстремума в силу прежних ограничений (1.1) с той разницей, что теперь из ограничений, налагаемых на X , существенно не первое, а второе.

В приближении ФН для тонких тел была рассмотрена [12] задача об оптимальной ГЧ при заданных габаритах и объеме, точнее, l и ω или коэффициенте объема $C_\Omega = \Omega/(\pi R^2 L)$. Решение оказалось неполным, ибо полученные там уравнения и условия [12] позволяют строить оптимальные ГЧ лишь при $0.25 \leq C_\Omega \leq 0.5$, т.е. лишь в четверти полного интервала значений коэффициента объема ($0 \leq C_\Omega \leq 1$). В рамках ФН было получено [13] полное решение данной задачи. Контуры оптимальных ГЧ, построенных без предположения об их тонкости, наряду с участком двустороннего экстремума и переднего и (или) заднего торцов могут содержать цилиндрический отрезок – еще



Фиг. 2

один участок краевого экстремума, появляющийся из-за ограничения максимально допустимого радиуса.

Если p – давление, ρ – плотность, $V = |\nabla|$, как и ранее, индекс ∞ метит параметры набегающего потока, r_i – радиус торца и $r = r(x)$ – уравнение пологого участка контура, то коэффициент сопротивления

$$C_x = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2 R^2} \int_0^R (p - p_\infty) dr^2 = \frac{2}{\rho_\infty V_\infty^2 R^2} \left[\int_0^{r_i} (p - p_\infty) r dr + \int_0^L (p - p_\infty) rr' dx \right] \quad (1.2)$$

Полученные в [13] зависимости C_x оптимальных ГЧ от $0 \leq C_\Omega \leq 1$ для разных l представлены на упрощенной по сравнению с приведенной в [13] фиг. 2. Крайние точки кривых $C_x = C_x(C_\Omega, l)$ отвечают минимально и максимально возможным объемам ($C_\Omega = 0$ и 1). Для них, согласно ФН, $C_x = 1$. Для каждого l кружок дает величину C_x ГЧ ЗН, которая для этого l минимальна. Между кружками и треугольниками оптимальные контуры имеют передний торец и пологий участок двустороннего экстремума. Треугольники отвечают предельно толстым ГЧ такого типа с горизонтальной касательной в точке f . Справа от них оптимальны контуры, состоящие из переднего торца, пологого участка и концевого цилиндра $r \equiv R$.

В прямых методах искомый контур задается N параметрами, играющими роль управлений. В качестве управлений можно взять радиусы $N - 1$ точки пологого участка при фиксированных x и абсциссе начальной точки цилиндрического участка. Пологий участок можно аппроксимировать сплайнами или другими функциями. В таком случае управлений (параметров этих функций) будет меньше. Вне зависимости от выбора управлений классические прямые методы обладают двумя недостатками. Во-первых, при их применении каждая коррекция требует равного числу управлений прямых расчетов обтекания оптимизируемой конфигурации. Во-вторых, использование только первых производных (градиента) в многомерном пространстве управлений обеспечивает весьма медленную (линейную) сходимость к оптимуму. В результате такие методы чрезвычайно затратны по потребным вычислительным ресурсам и временем счета.

Принципиальную возможность получения информации, необходимой для очередной коррекции оптимизируемого профиля, за один прямой расчет дает объединение прямого метода с “общим методом множителей Лагранжа” (ММЛ). В рамках ММЛ [4, 8] при произвольных изопериметрических ограничениях, в частности при фиксированном объеме Ω или коэффициенте объема C_Ω , приращение коэффициента волнового сопро-

тивления ΔC_x при допустимых варьированиях “короткой” ГЧ (фиг. 1, б, тонкие кривые – C^+ - и C^- -характеристики и звуковая линия ts) дается формулой

$$\Delta C_x = A\Delta r_t + B\Delta x_t + \left(\int_i^{t_-} + \int_{t_+}^f \right) D\delta x dr \quad (1.3)$$

Здесь $\Delta r_t, \Delta x_t \geq 0$ и δx – приращения координат точки t и вариация x на участках краевого ($i\bar{r}$) и двустороннего (\bar{r}^f) экстремума, а коэффициенты A, B и D – известные функции r , параметров течения и множителей Лагранжа μ_1, μ_2 и μ_3 на контуре $i\bar{r}^f$.

Для построенной на предыдущей итерации ГЧ рассматриваемого типа параметры течения определяются из решения прямой, а множители Лагранжа – сопряженной задачи (С3). Линейные относительно μ_i уравнения С3 имеют те же характеристики, что и уравнения течения, и решаются в “обратном” направлении – от C^- -характеристики wf , где μ_i известны. Полное решение С3 чрезвычайно сложно. Однако для определения μ_i , а вместе с ними и коэффициента D на участке \bar{r}^f нужно решить С3 только в треугольнике tef при известных значениях μ_i на участке ef и одном условии на обтекаемом сверхзвуковым потоком участке \bar{r}^f . При этом изопериметрические ограничения проявляются только через условие на \bar{r}^f . По сравнению с прямым расчетом обтекания затупленной ГЧ с отошедшей ударной волной i_0w численное решение С3 в треугольнике tef не составляет труда.

Знание коэффициентов B в точке t и D на торце $i\bar{r}$ нужно не для построения оптимального контура, а для доказательства того, что торец – участок краевого экстремума. В противоположность этому значения D на участке \bar{r}^f , найденные после решения С3 в треугольнике tef практически в результате одного прямого расчета обтекания ГЧ, определяют направление требуемых изменений x на всем пологом участке, кроме точки t . В отличие от D на \bar{r}^f коэффициент A можно найти только после решения всей С3, а это, как уже отмечалось, очень сложно. Поэтому для определения направления изменения r_t нужен еще один прямой расчет со слегка измененным r_t .

Аналогичное положение сохраняется и для “длинных” ГЧ (фиг. 1, в) с той разницей, что теперь С3 нужно решить в четырехугольнике $tqwf$. Это не на много сложнее, чем для короткой ГЧ (фиг. 1, б). Правда, теперь характеристики cw, cg и gt в общем случае будут линиями разрыва множителей μ_i , из-за чего в формуле (1.3) для ΔC_x появятся дополнительные внеинтегральные слагаемые, связанные с приращениями координат точки s . При построении близких к оптимальным ГЧ с гладким участком tf этими слагаемыми можно пренебречь. Однако в принципе допущение излома и обусловленное им небольшое усложнение С3 позволяют в рамках данного подхода строить конфигурации с внутренним изломом. Итак, вне зависимости от числа параметров, задающих форму ГЧ с передним торцом, привлечение ММЛ сокращает до двух количество прямых расчетов, необходимых для очередной коррекции. В то же время второй недостаток – линейная сходимость к оптимуму при таком подходе сохраняется.

С 1960–70-х годов широкое распространение (см. обзор [14]) получили подходы, основанные на “анализе чувствительности”, причем не только в связи с задачами оптимизации. В прямых методах построения оптимальных аэродинамических форм такие подходы стали использоваться несколько позже. Однако к настоящему времени по применению анализа чувствительности к оптимальному профилированию в аэrodинамике имеется обширная литература. Достаточно полное представление о его возможностях при построении конфигураций, обтекаемых идеальным газом, дают работы [15–21]. Как и множители Лагранжа и выражющийся через них множитель D в формуле (1.3), ключевые для прямых методов с анализом чувствительности “коэффициенты чувствительности” находятся в процессе одного прямого расчета обтекания. Другое, сближающее эти подходы обстоятельство состоит в том, что один из способов определения коэффициентов чувствительности состоит в решении С3, которая при строгой реализации эквивалентна С3 ММЛ. Наконец, судя по потребному числу итераций в [20], до недавнего времени прямые методы

с анализом чувствительности, как и подход с ММЛ, имели линейную сходимость. Более быстрая (квадратичная) сходимость возможна при использовании коэффициентов чувствительности и первого, и второго порядков (вторых функциональных производных по управлению). Метод их одновременного определения развит в [21].

В последние годы весьма популярными стали прямые методы, опирающиеся на “генетические алгоритмы” [22–24]. Однако даже в сравнительно простых задачах их реализация предполагает параллельные вычисления на многопроцессорных системах. При этом, несмотря на уменьшение числа управлений за счет использования сплайнов Безье или иных аппроксимирующих функций и простоту распараллеливания, применение генетических алгоритмов оправдано, в первую очередь, в многокритериальных задачах (при оптимизации по Парето).

2. Постановка задачи и прямой метод построения оптимальных головных частей. Рассчитанные в [13] интегрированием уравнений течения идеального газа C_x построенные там в рамках ФН ГЧ подтвердили преимущества выпуклых конфигураций. В противоположность этому C_x ГЧ с вогнутыми участками, а тем более с задними торцами, как правило, превосходили C_x эквивалентных конусов. В тех же примерах, где преимущество таких ГЧ сохранялось, оно было заметно меньше получавшегося по ФН. Одно из следствий этих результатов – изменение постановки вариационной задачи. На практике задание объема ГЧ обусловлено размещением в ней полезного груза фиксированного объема Ω_f . Для этого объем ГЧ должен удовлетворять неравенству $\Omega \geq \Omega_f$. Если Ω^0 отвечает решению ЗН со свободным объемом и $\Omega^0 \geq \Omega_f$, то именно оно с $C_x = C_x^0$, минимальным для заданного l , дает решение поставленной задачи. Согласно фиг. 2, при этом возможно значительное (при $l \geq 1$ – в несколько раз) уменьшение сопротивления. С математической точки зрения, такую ГЧ можно рассматривать как пустотелый обтекатель со стенками нулевой толщины и располагающимся внутри него полезным объемом Ω_f . Следовательно, оптимальные в рамках ФН ГЧ с $C_\Omega < C_\Omega^0$, отвечающие на фиг. 2 участкам кривых слева от кружков, включая igf на фиг. 1, *a*, не представляют интереса.

С учетом сказанного далее координаты контуров оптимальных ГЧ и их коэффициенты объема удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq r \leq R, \quad C_\Omega^0 \leq C_\Omega = \frac{1}{LR^2} \int_0^L r^2 dx \leq 1 \quad (2.1)$$

Коэффициенты C_Ω^0 и C_x^0 при заданных l , M_∞ и показателе адиабаты κ отвечают решению ЗН в рамках описывающих течение идеального газа уравнений Эйлера.

Как уже отмечалось, в приближении этих уравнений пологие участки (участки двустороннего экстремума) оптимальных контуров ЗН могут содержать внутренние изломы, хотя их введение практически не влияет на величину сопротивления. Пологие участки, которые в решаемой далее задаче строятся прямым методом, получаются гладкими. Необходимость введения (в точной постановке) на них внутренних изломов легко установить предложенным [25] варьированием в характеристических “ ϵ -полосках” (см. также [4, 5, 8]). Сего помощью можно показать, что внутренние изломы могут иметь только ГЧ с ненулевым наклоном касательной ϑ_f в концевых точках (типа 0 и 1 на фиг. 1, *a*). Однако и для таких ГЧ с уменьшением ϑ_f величина и влияние излома уменьшаются, а для контуров с $\vartheta_f = 0$, а тем более с цилиндрическим концевым участком пологий участок гладкий. Пренебрежение такими изломами в рассматриваемой задаче еще более оправдано, чем в ЗН.

Используемый далее прямой метод применялся ранее [26–32] при построении оптимальных ГЧ без ограничений по объему, симметричных профилей, изолированных крыльев и крыльев в условиях аэродинамической интерференции с другими элемента-

ми летательного аппарата. Учитывая заслуживающие внимания особенности метода и конспективность его изложения [26–32], дадим более полное его описание.

В основе метода лежит представление приращения сопротивления квадратичной формой. При ее построении используется локальная линеаризация, дающая связь приращений давления с изменением ориентации малых элементов обтекаемого контура или поверхности. Условия минимума квадратичной формы приводят к уравнениям, обеспечивающим близкую к квадратичной скорость сходимости к оптимуму. Уже после первой коррекции получаются аэродинамические формы, которые по величине сопротивления близки к оптимальным. Для ряда задач данный метод позволяет найти аналитическое решение в рамках уравнений Эйлера. Так, для ЗН получены усеченные ГЧ, имеющие степенную образующую с показателем 2/3 [31]. При $M_\infty = 2$ и $M_\infty = 4$ их C_x превышают C_x оптимальных ГЧ не более чем на 3 и 1%. С ростом удлинения диаметр переднего торца стремится к нулю, а степенной контур с показателем 2/3, как и в приближении ФН, не зависит от M_∞ . Показатель степени, получающийся при $l \rightarrow \infty$ в рамках ФН, равен 3/4.

Описание используемого метода начнем с примера ГЧ без цилиндрического участка. В качестве управлений возьмем значения r_n радиусов концов $N - 1$ отрезков пологого участка ГЧ с фиксированными x_n ($n = 1, \dots, N$). Из координат торца r_1 и $x_1 = 0$ и основания $r_N = R$ и $x_N = L$ управлением является только r_1 . Средним параметрам на отрезках будем приписывать полуцелые индексы, например (фиг. 1, 2) $h_{n-1/2} = x_n - x_{n-1}$. В соответствии с этим формулы для χ – интеграла сил давления, действующих на ГЧ, и ее объема $\Omega \geq \Omega^0$ с точностью до несущественных для дальнейшего положительных множителей примут вид

$$\begin{aligned} \chi &= \int_0^{r_t} prdr + \int_0^L prr'dx = \int_0^{r_t} (p - p_\infty)rdr + p_\infty \frac{r_t^2}{2} + \int_0^L prr'dx = \frac{Kr_t^2}{2} + \int_0^L prr'dx \approx \\ &\approx \frac{Kr_1^2}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} (prr'h)_{n+1/2}, \quad \Omega = \int_0^L r^2 dx \approx \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N-1} (r_n^2 + r_n r_{n+1} + r_{n+1}^2) h_{n+1/2} \\ K &= \rho_\infty V_\infty^2 \left(c_{x0} + \frac{1}{\kappa M_\infty^2} \right), \quad c_{x0} = c_{x0}(M_\infty, \kappa) = \frac{1}{r_t^2} \int_0^{r_t} \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} dr^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $r_1 = r_t$ – радиус торца, а c_{x0} – коэффициент волнового сопротивления торца. Уже при сравнительно малых изломах в точке t величина c_{x0} не зависит от формы пологого участка t^f . Везде далее это условие выполнялось.

Изменение радиусов r_n изменяет углы наклона отрезков ϑ и давление p , действующее на них. Вслед за введенными ранее предположениями [26–32] примем, что связь приращений Δp и $\Delta\vartheta$ такая же, как при локальной линеаризации уравнений течения относительно параметров исходного (но отличного от набегающего) сверхзвукового потока на тех же отрезках. В таком приближении она сводится к формуле для простой волны (μ – угол Маха)

$$\Delta p \approx \rho V^2 \operatorname{tg} \mu \Delta \vartheta \approx A \Delta \operatorname{tg} \vartheta, \quad A = \rho V^2 \operatorname{tg} \mu \cos^2 \vartheta$$

В соответствии с этим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_{n-1/2} &= \frac{r_n - r_{n-1}}{h_{n-1/2}}, \quad \Delta(\operatorname{tg} \vartheta_{n-1/2}) = \frac{\Delta r_n - \Delta r_{n-1}}{h_{n-1/2}} \\ \Delta p_{n-1/2} &\approx A_{n-1/2} \frac{\Delta r_n - \Delta r_{n-1}}{h_{n-1/2}}, \quad \Delta p_{n+1/2} \approx A_{n+1/2} \frac{\Delta r_{n+1} - \Delta r_n}{h_{n+1/2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Согласно соотношениям (2.2) и (2.3), приращения $\Delta\chi$ и $\Delta\Omega$ с точностью до квадратов Δr_n даются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta\chi = & \left[Kr_1 - \left(Arr' + rp - pr' \frac{h}{2} \right)_{3/2} \right] \Delta r_1 + \left[\frac{K}{2} - \left(\frac{Ar' + p}{2} - \frac{A}{h} r \right)_{3/2} \right] (\Delta r_1)^2 - \\ & - 2 \left(\frac{A}{h} r \right)_{3/2} \Delta r_1 \Delta r_2 + \sum_{n=2}^{N-1} \left\{ \left[\left(Arr' + rp + pr' \frac{h}{2} \right)_{n-1/2} - \left(Arr' + rp - pr' \frac{h}{2} \right)_{n+1/2} \right] \Delta r_n + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{Ar' + p}{2} + \frac{A}{h} r \right)_{n-1/2} - \left(\frac{Ar' + p}{2} - \frac{A}{h} r \right)_{n+1/2} \right] (\Delta r_n)^2 - 2 \left(\frac{A}{h} r \right)_{n+1/2} \Delta r_n \Delta r_{n+1} \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\Delta\Omega = & (2r_1 + r_2)h_{3/2}\Delta r_1 + h_{3/2}(\Delta r_1)^2 + h_{3/2}\Delta r_1\Delta r_2 + \sum_{n=2}^{N-1} \{ [(r_{n-1} + 2r_n)h_{n-1/2} + \\ & + (2r_n + r_{n+1})h_{n+1/2}] \Delta r_n + (h_{n-1/2} + h_{n+1/2})(\Delta r_n)^2 + h_{n+1/2}\Delta r_n\Delta r_{n+1} \}, \quad \Delta r_N = 0 \end{aligned}$$

Для получения необходимых условий минимума χ при фиксированном Ω , составив функционал Лагранжа $I = \chi + 3\lambda\Omega$ с неопределенным постоянным множителем λ , приравняем нуль производные от ΔI по Δr_n с $n = 1, 2, \dots, N-1$. Вместе с условием фиксированного объема $\Delta\Omega = 0$ это даст систему N уравнений для определения всех Δr_n и λ

$$\begin{aligned} (2r_1 + r_2 + \Delta r_1 + \Delta r_2)h_{3/2}\Delta r_1 + \sum_{n=2}^{N-1} \{ [(r_{n-1} + 2r_n + \Delta r_n)h_{n-1/2} + \\ + (2r_n + r_{n+1} + \Delta r_n + \Delta r_{n+1})h_{n+1/2}] \Delta r_n = 0 \\ Kr_1 - B_{3/2}^- + \lambda(2r_1 + r_2 + 2\Delta r_1 + \Delta r_2)h_{3/2} + (K - C_{3/2}^-)\Delta r_1 - D_{3/2}\Delta r_2 = 0 \\ B_{3/2}^+ - B_{5/2}^- + \lambda[(r_1 + 2r_2 + \Delta r_1 + 2\Delta r_2)h_{3/2} + (2r_2 + r_3 + 2\Delta r_2 + \Delta r_3)h_{5/2}] - \\ - D_{3/2}\Delta r_1 + (C_{3/2}^+ - C_{5/2}^-)\Delta r_2 - D_{5/2}\Delta r_3 = 0 \quad (2.5) \\ B_{n-1/2}^+ - B_{n+1/2}^- + \lambda[(r_{n-1} + 2r_n + \Delta r_{n-1} + 2\Delta r_n)h_{n-1/2} + (2r_n + r_{n+1} + 2\Delta r_n + \\ + \Delta r_{n+1})h_{n+1/2}] - D_{n-1/2}\Delta r_{n-1} + (C_{n-1/2}^+ - C_{n+1/2}^-)\Delta r_n - D_{n+1/2}\Delta r_{n+1} = 0 \\ n = 3, \dots, N-1 \\ B^\pm = Arr' + rp \pm pr' \frac{h}{2}, \quad C^\pm = Ar' + p \pm \frac{2A}{h}r, \quad D = \frac{2A}{h}r, \quad \Delta r_N = 0 \end{aligned}$$

Выписанные уравнения позволяют определить все приращения Δr_n и множитель Лагранжа λ и провести очередную коррекцию контура ГЧ. В коэффициенты при Δr_n в первом уравнении и во все коэффициенты при λ наряду с главными частями порядка h входят добавки порядка $h\Delta r$. С точностью до них система (2.5) линейная, с матрицей коэффициентов, только первой строкой отличающейся от четырехдиагональной. В ЗН с фиксированным удлинением l при свободном объеме из системы (2.5) выпадает первое уравнение, а в остальных $\lambda = 0$. Получающаяся при этом система $N-1$ уравнений линейная, с трехдиагональной матрицей коэффициентов, что облегчает процесс построения оптимальной ГЧ тем же методом (см. [32]). Ее объем $\Omega^0 = \Omega^0(l, M_\infty, \kappa)$.

В начале процесса коррекции исходный контур выбирается таким, чтобы при фиксированных l и объеме $\Omega > \Omega^0$ ГЧ удовлетворялись ограничения (2.1). Этим же ограничениям удовлетворяют контуры, получающиеся после очередной коррекции. Прямой расчет обтекания любой такой ГЧ дает коэффициент волнового сопротивления торца c_{x0} , интеграл сил давления χ и параметры потока на участке t^+f , а следовательно, свободные члены и линейные части коэффициентов системы (2.5). Итерационная процедура ее решения определяет все приращения Δr_n . Если в выражении для $\Delta\Omega$ (предпоследнее соотношение (2.4)) и в первом уравнении системы (2.5) отбросить квадратичные слагаемые, то решение получившейся в результате линейной системы не требует итераций. При этом, однако, возникает необходимость в уточнении объема скорректированной ГЧ.

Каждый цикл коррекции включает “однопараметрический спуск”, состоящий в следующем. Наряду с прямым расчетом обтекания исходной ГЧ рассчитывается обтекание двух скорректированных ГЧ. Радиусы их торцов и пологих участков заменяются на $r_n + s\Delta r_n$ с Δr_n , найденными описанным выше способом, и двумя значениями параметра s , например 0.5 и 1. В плоскости s , χ через три точки, отвечающие этим s и исходной ГЧ ($s = 0$), проводится парабола: $\chi(s) = \chi(0) + a_1s + a_2s^2$, определяется дающее минимум χ значение $s_m = -a_1/(2a_2)$ и по нему находятся радиусы $r_n + s_m\Delta r_n$ новой ГЧ. Эта ГЧ служит исходной для следующего цикла. С каждой коррекцией приращения Δr_n уменьшаются, а множитель Лагранжа λ стремится к постоянной величине.

В процессе расчетов выявлена плохая обусловленность задачи, проявляющаяся в большом разбросе собственных значений матрицы коэффициентов при Δr_n (матрицы Гессе) $N - 1$ уравнений (без первого) системы (2.5). Максимальное и минимальное собственные значения могут различаться по величине на несколько порядков. Поэтому на последних циклах оптимизационного процесса выполнялся дополнительный спуск по направлениям, которые задают собственные векторы, отвечающие наименьшим собственным значениям.

С ростом Ω неизбежны ситуации, при которых для $n = k_1, \dots, N - 1$ нарушается верхнее ограничение для r из условий (2.1), т.е. при $r_{ki} < R$ сумма $r_{ki} + \Delta r_{ki} > R$. Это означает, что при выбранном объеме оптимальный контур ГЧ содержит цилиндрический участок. В подобных случаях найденные Δr_{ki} следует заменить на $\Delta r_{ki} = R - r_{ki}$, а прочие Δr_n определить из системы (2.5) без уравнений с указанными номерами.

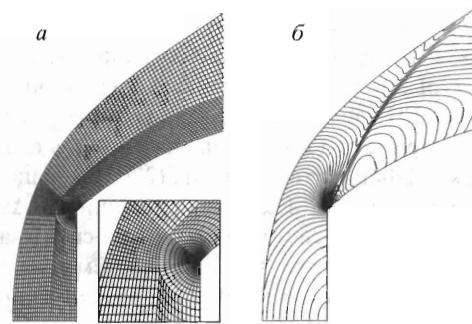
3. Результаты расчета. При расчете течения около ГЧ выделялись две области. Общая граница областей лежала в сечении $x = 2r_r$. В окрестности торца расчетная сетка строилась, как показано на фиг. 3, *a*, а решение уравнений Эйлера получалось установлением по времени с помощью схемы Годунова повышенного порядка и алгоритма, использованного ранее [8, 13]. В этой области на поверхности тела размещалось 207 узлов. Возможности алгоритма демонстрирует фиг. 3, *б*, на которой для $M_\infty = 4$ через $\Delta M = 0.05$ нарисованы изомахи между начальным участком ГЧ и отошедшей ударной волной. Во второй области (при $2r_r < x \leq L$) расчет x -сверхзвукового потока велся в цилиндрической системе координат маршевым методом по схеме Мак-Кормака с помощью алгоритма [33]. Число узлов сетки от поверхности ГЧ до скачка равнялось 84. В обеих областях головной скачок выделялся явно.

В зависимости от удлинения и объема ГЧ число точек N на участке t^+f искомого контура изменялось от 60 до 275. Вблизи торца координаты x_n задавались формулой

$$x_n = 2r_1(k_1^{n-1} - 1)/(k_1^{25} - 1), \quad n = 1, \dots, 26; \quad k_1 = 1.1$$

в силу которой разности $x_{n+1} - x_n = h_{n+1/2}$ увеличиваются с удалением от торца, а для $27 \leq n \leq N$

$$x_n = x_{26} + (x_N - x_{26})(k_2^{n-26} - 1)/(k_2^{N-26} - 1), \quad n = 27, \dots, N; \quad k_2 = 1.015$$



Фиг. 3

Прямой метод оптимизации продемонстрировал высокую скорость сходимости: при заданных удлинении и объеме для построения оптимальной ГЧ требовалось рассчитать обтекание от 25 до 50 конфигураций.

Относительные размеры торцов $\eta = r_1/R$ и коэффициенты волнового сопротивления (C_x) ГЧ, построенных описанным выше методом для $k = 1.4$, $M_\infty = 2$ и $M_\infty = 4$, разных коэффициентов объема $C_\Omega^0 \leq C_\Omega \leq 1$ и двух удлинений $l = 4$ и $l = 8$ собраны в таблице под номерами № = 0, 1, ..., 6. При фиксированных M_∞ и l строки с № = 0 отвечают решенным в рамках уравнений Эйлера ЗН (со свободным объемом). Получившиеся при этом $C_\Omega = C_\Omega^0$, а коэффициенты $C_x = C_x^0$ минимальны. Значения η^{MC} и C_x^{MC} , найденные в

Метод построения или №	l	$C_\Omega \cdot 10^2$	$\eta^N \cdot 10^2$	$M_\infty = 2$			$M_\infty = 4$		
				$\eta \cdot 10^2$	$C_x \cdot 10^2$	ΔC_x	$\eta \cdot 10^2$	$C_x \cdot 10^2$	ΔC_x
ФН		40.86	2.26			6.0			2.4
0		45.36 ($M_\infty = 2$) 42.95 ($M_\infty = 4$)	3.54 2.85	9.76	6.81	3.2	6.70	5.59	1.6
1	4	52	5.55	15.5	7.22	8.4	10.9	6.48	3.4
2		60	8.37	20.8	8.77	13.6	14.3	8.33	3.7
3		72	16.4	28.3	12.90	15.0	21.5	12.98	3.3
4		80	26.0	37.9	16.98	14.5	30.1	18.09	2.6
5		93	54.8	56.7	30.54	3.6	54.1	35.23	0.1
6		100	100	75.18	0.0	100	82.76	-0.1	
MC				10.9	6.80		7.10	5.58	
ФН		40.18	0.26			6.1			1.6
0		45.06 ($M_\infty = 2$) 42.67 ($M_\infty = 4$)	0.54 0.43	2.10	2.22	0.9	1.56	1.81	0.6
1	8	60	1.47	7.3	3.28	7.6	3.77	2.92	2.7
2		70	3.19	10.8	5.15	9.3	5.67	4.66	2.6
3		80	8.37	19.7	8.76	13.7	12.1	8.41	2.7
4		90	26.0	37.7	16.99	14.8	31.2	18.05	3.0
5		95	46.1	52.5	25.85	8.2	48.1	29.54	0.5
6		100	100	75.18	0.0	100	82.76	-0.1	
MC				2.42	2.23		1.57	1.82	

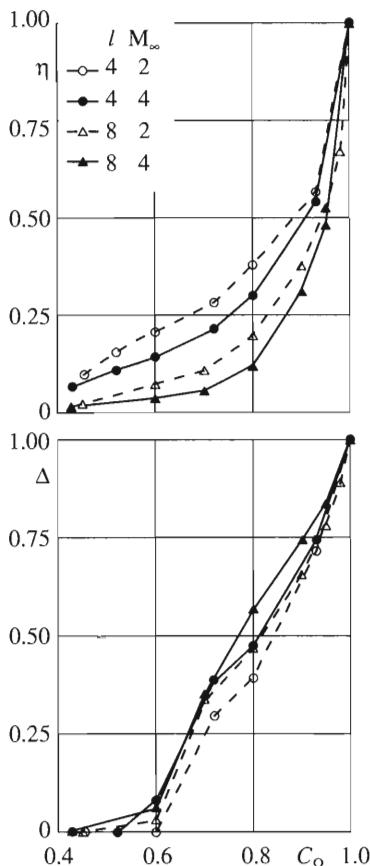
том же приближении при решении ЗН ранее [8] с использованием контрольного контура и метода характеристик, приведены в строках, обозначенных в первом столбце как МС. Коэффициенты волнового сопротивления, полученные для ЗН в настоящей работе и в [8] различаются максимум на единицу последней значащей цифры. Поскольку метод работы [8] пригоден для решения лишь узкого класса задач, практическое совпадение C_x и C_x^{MC} – дополнительное подтверждение эффективности использованного прямого метода оптимизации. Отличия η от η^{MC} могут достигать 10–14%, что не только не влияет на величину C_x , но и при весьма малых размерах торцов несущественно для приложений.

В строках таблицы, отмеченных как ФН, приведены значения C_Ω и размеры торцов η^N ГЧ, построенных для ЗН в рамках формулы Ньютона, и C_x^N – определенные интегрированием уравнений Эйлера их коэффициенты волнового сопротивления. Для этих ГЧ C_Ω меньше C_x^0 при $M_\infty = 2$ на 10–11%, а при $M_\infty = 4$ на 5–6%. Следствие этого – большая величина $\Delta C_x = (C_x^N / C_x - 1) \times 100$. При ее вычислении значение C_x бралось из строки с № = 0. В строках с № = 1, 2, ..., 6 величины ΔC_x определены по C_x^N ГЧ с теми же значениями C_Ω , что и C_x . Интересно отметить, что для фиксированных M_∞ и l величины ΔC_x в строках с № = 0 заметно меньше, чем в строках ФН: в 1.5–2 раза при $l = 4$ и в 2.5–7 раз при $l = 8$. Таким образом, при известном $C_\Omega = C_\Omega^0$ формула Ньютона дает ГЧ, которые в рамках уравнений Эйлера еще ближе к оптимальным, чем получающиеся по той же формуле в ЗН.

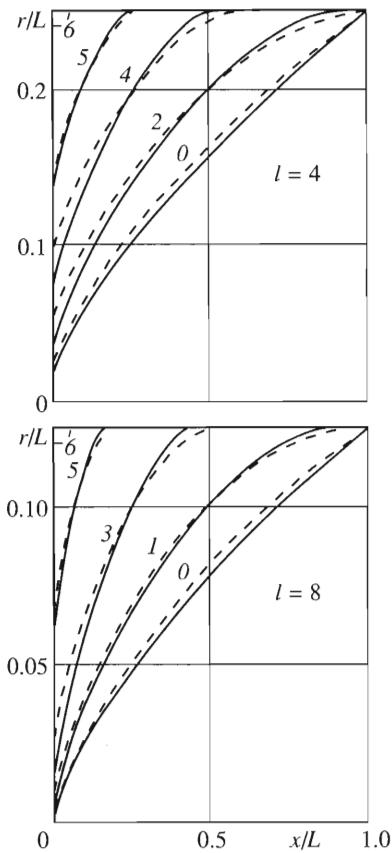
Для ЗН значения η^N в несколько раз меньше, чем размеры торцов ГЧ, оптимальных в приближении уравнений Эйлера. С ростом C_Ω это различие уменьшается и, естественно, исчезает при $C_\Omega = 1$, когда независимо от модели “оптимальная” ГЧ – затупленный цилиндр. Коэффициенты C_x^N рассчитывались интегрированием нестационарных уравнений Эйлера с помощью того же алгоритма, что использован для расчета смешанного течения в “первой” области (при $x \leq 2r_i$) прямого метода. Отличие состояло в том, что проводился повторный расчет на сетке, получаемой делением сторон ячеек исходной сетки пополам, а коэффициенты C_x^N находились линейной экстраполяцией результатов двух расчетов на нулевой размер ячейки. Представление о погрешностях вычислений дает величина $\Delta C_x = -0.1\%$ для цилиндра ($C_\Omega = 1$) при $M_\infty = 4$.

Полученные для построенных оптимальных ГЧ зависимости относительных размеров торцов $\eta = r_i/R$ и цилиндрических участков $\Delta = 1 - x_d/L$ от C_Ω для рассмотренных значений M_∞ и l представлены на фиг. 4. Разные маркеры отвечают указанным в левом верхнем углу значениям удлинений и чисел Маха набегающего потока. Контуры оптимальных ГЧ показаны на фиг. 5 и пронумерованы согласно первому столбцу таблицы. Штриховые кривые построены для $M_\infty = 2$, а сплошные кривые (включая участки оси ординат и верхней горизонтали) – для $M_\infty = 4$. Для рассмотренных удлинений согласно правилу гиперзвуковой стабилизации и полученным ранее результатам [8], оптимальные контуры, показанные сплошными линиями, практически не изменяются при $M_\infty > 4$.

4. Заключение. Ограничность области применимости описанного прямого метода (контуры и поверхности, обтекаемые сверхзвуковым потоком идеального газа) не исключает наличия у оптимизируемой конфигурации участков, обтекаемых дозвуковым потоком, как передний торец в решенной задаче, или с донными областями практически



Фиг. 4



Фиг. 5

покоящегося газа. Последние образуются за задними торцами, которые могут появляться при построении не ГЧ, а полного тела фиксированного объема и габаритов [5] или расширяющейся части сопла [4]. Наряду с чисто сверхзвуковыми объектами (включая пространственные) это открывает достаточно широкие перспективы применения данного прямого метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00846) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9902.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Newton I. Mathematical Principles Natural Philosophy (*Philosophiae naturalis principia mathematica*). Пер. с лат. Э. Мотта. 1793; пересмотренное издание Ф. Кэджори (Cajori F.). Berkeley, California: Univ. California Press, 1947. 680 р.
2. Ньютона И. Математические начала натуральной философии: Пер. с лат. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
3. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.

4. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
5. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: ЯНУС-К, 2001. 132 с.
6. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986. 190 с.
7. Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т. 1. Ч. II. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1935. 400 с.
8. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
9. Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic speeds // Rep. NACA. 1957. № 1306. 12 р.
10. Eggers A.J. Nonslender bodies of revolution having minimum pressure drag // Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. A. Miele. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. P. 251–264 = Эггерс А. Нетонкие тела вращения минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 260–274.
11. Крайко А.Н. Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388.
12. Миеле А. Тонкие тела минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэrodинамических форм / Под ред. Миеле А. М.: Мир, 1969. С. 203–215.
13. Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С. Осесимметричная головная часть минимального волнового сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 723–741.
14. Adelman H.M., Haftka R.T. Sensitivity analysis of discrete structural systems // AIAA Journal. 1986. V. 24. № 5. P. 823–832.
15. Baysal O., Eleshaky M.E. Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible Euler equations // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 1991. V. 113. № 4. P. 681–688.
16. Korivi V.M., Newman P.A., Taylor A.C. III. Aerodynamic optimization studies using a 3-D supersonic Euler code with efficient calculation of sensitivity derivatives // AIAA Paper. 1994. № 94–4270.
17. Burgreen G.W., Baysal O. Three-dimensional aerodynamic shape optimization of supersonic delta wings // AIAA Paper. 1994. № 94–4271.
18. Burgreen G.W., Baysal O. Three-dimensional aerodynamic shape optimization using discrete sensitivity analysis // AIAA Journal. 1996. V. 34. № 9. P. 1761–1770.
19. Sung C., Know J.H. Accurate aerodynamic sensitivity analysis using adjoint equations // AIAA Journal. 2000. V. 38. № 2. P. 243–250.
20. Cliff S.E., Reuther J.J., Saunders D.A., Hicks R.M. Single-point and multipoint aerodynamic shape optimization of high-speed civil transport // J. Aircraft. 2001. V. 38. № 6. P. 997–1005.
21. Taylor A.C. III, Green L.L., Newman P.A., Putko M.M. Some advanced concepts in discrete aerodynamic sensitivity analysis // AIAA Journal. 2003. V. 41. № 7. P. 1224–1229.
22. Oyama A., Obayashi S., Nakahashi K., Nakamura T. Euler / Navier-Stokes optimization of supersonic wings based on multi-objective genetic algorithms // AIAA Journal. 1999. V. 37. № 10. P. 1327–1328.
23. Benini E., Tofollo A. Development of high-performance airfoils for axial flow compressors using evolutionary computation // J. Propuls. and Pow. 2002. V. 18. № 3. P. 544–554.
24. Sasaki D., Obayashi S., Nakahashi K. Navier-Stokes optimization of supersonic wings with four objectives using evolutionary algorithm // J. Aircraft. 2002. V. 39. № 4. P. 621–629.
25. Черный Г.Г. Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова. 1950. № 197. 11 с. = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 443–462.
26. Таковицкий С.А. О сходимости в задаче оптимизации крыла сложной формы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 5. С. 690–697.
27. Takovitskii S.A. Numerical optimization of the wing of a supersonic airplane // Proc. 23rd Intern. Congr. Aeronaut. Sci. (ICAS). Toronto, Canada, 2002. P. 232.1–232.7.

28. *Таковицкий С.А.* Оптимизация крыла сверхзвукового самолета // Техника воздушного флота. 2003. № 1. С. 20–23.
29. *Таковицкий С.А.* Остроконечные двухпараметрические степенные головные части минимального волнового сопротивления // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 829–835.
30. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения профиля минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 122–131.
31. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 155–162.
32. *Таковицкий С.А.* К построению осесимметричных головных частей минимального волнового сопротивления // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 412–416.
33. *Таковицкий С.А.* Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Тр. ЦАГИ. 1997. Вып. 2590. С. 24–32.

Москва
e-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию
30.V.2006