

УДК 539.374

© 2006 г. Д. В. Георгиевский

**ДИФФУЗИЯ РАЗРЫВА КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ  
НА ГРАНИЦЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

Для задачи о диффузии разрыва касательного напряжения на границе полуплоскости, являющейся частным случаем общей задачи о диффузии вихревого слоя, обсуждаются классы сред и типы задания граничных условий, при которых существуют автомодельные решения. Для вязкопластической среды в полуплоскости проблема сводится к задаче в слое с переменной по времени толщиной, решение которой не обладает свойством аналитичности. Исследуются асимптотики этой задачи на больших временах. В случае, когда на доступной границе одновременно можно измерить и касательное напряжение и горизонтальную скорость, предлагается алгоритм нахождения недоступной для измерения величины – толщины зоны вязкопластического течения.

**1. Диффузия вихревого слоя в среде без предела текучести. Автомодельность.** Автомодельные решения, зависящие от переменной типа  $x/\sqrt{t}$ , являются классическими фундаментальными решениями одномерных линейных и нелинейных уравнений теплопроводности и описывают многочисленные физические явления с разрывом на границе в начальный момент времени. Автомодельность – свойство не только данного уравнения, но всей начально-краевой задачи, поставленной для него.

Хорошо известна следующая начально-краевая задача для одномерного линейного параболического уравнения (см., например, [1])

$$u_t(x, t) = \nu u_{xx}(x, t); \quad \nu > 0, \quad u(x, t) \in C^2(D_0), \quad D_0 = \{t > 0, x > 0\} \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad x > 0; \quad u(0, t) = U_0 h(t), \quad U_0 = \text{const}, \tag{1.2}$$

где  $h(t)$  – функция Хевисайда. Начальное и граничное условия (1.2), очевидно, взаимно не согласованы в угловой точке  $O (t = 0, x = 0)$  области  $D_0$ , поскольку

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0+} u(x, 0) \neq \lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = U_0,$$

что обуславливает отсутствие предела решения при стремлении к точке  $O$ .

Точное аналитическое решение задачи (1.1), (1.2) записывается с помощью дополнительной функции ошибок и имеет автомодельный вид [1]

$$u(x, t) = U_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{1.3}$$

Видно, что это решение удовлетворяет необходимым требованиям гладкости в области  $D_0$ , а его предел при стремлении к точке  $O$ , действительно, зависит от траектории подхода к этой точке.

Начально-краевая задача (1.1), (1.2) вполне адекватно моделирует многие физические явления в одномерных структурах, имеющие разрыв на границе в начальный мо-

мент времени, такие как теплопередача, диффузия, фильтрация и др. Описывает она и одномерный нестационарный сдвиг вязкой несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью  $\nu$  в полуплоскости  $x_2 > 0$ . Вектор скорости и тензор вязких напряжений при таком сдвиге имеют по одной отличной от нуля компоненте:  $v_1(x_2, t) \equiv u(x, t)$  и  $\sigma_{12}(x_2, t) \equiv \sigma(x, t)$ . В зависимости от того, какая величина,  $u$  или  $\sigma$ , выступает в качестве  $u(x, t)$ , решение (1.3) связывается с диффузией разрыва скорости либо касательного напряжения. Также традиционно для таких решений в гидродинамике используется общий термин "диффузия вихревого слоя" [2, 3]. Влияние этого вихревого слоя (или разрыва, вызванного мгновенным приложением на границе покоящейся полуплоскости касательной скорости либо касательного напряжения, согласно начальному условию (1.2)) распространяется вдоль оси  $x$  с бесконечной скоростью, что типично для параболических задач. Кроме того, вихревой слой мгновенно диффундирует при  $t > 0$ .

Задача о диффузии вихревого слоя имеет точное аналитическое решение и в случае более общего задания граничного условия (1.2), а именно

$$u(0, t) = U(t),$$

где  $U(t)$  – кусочно непрерывная функция, равная нулю при  $t < 0$  с разрывами первого рода в точках  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots (i \geq 0)$ . Это решение записывается с использованием интеграла Стильтеса

$$u(x, t) = \int_0^t \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} dU(\tau). \tag{1.4}$$

Здесь  $dU(t) = (\dot{U}(t) + \sum_i [U]_i \delta(t-t_i))dt$ , где  $[U]_i$  – скачок функции  $U$  в точке разрыва  $t_i$ .

Уравнение (1.1) как при  $u = u(x, t)$ , так и при  $u = \sigma(x, t)$  – очевидное следствие системы, состоящей из уравнения движения

$$\sigma_x = \rho v_t, \quad (t, x) \in D_0 \tag{1.5}$$

и определяющего соотношения ньютоновской вязкой жидкости ( $\mu = \rho\nu$ )

$$\sigma = \mu v_x \quad (t, x) \in D_0. \tag{1.6}$$

В случае неньютоновской вязкой среды сдвиговое течение, по-прежнему, происходит в области  $D_0$ , но материал характеризуется нелинейным реологическим законом

$$\sigma = F(v_x), \quad F(0) = 0. \tag{1.7}$$

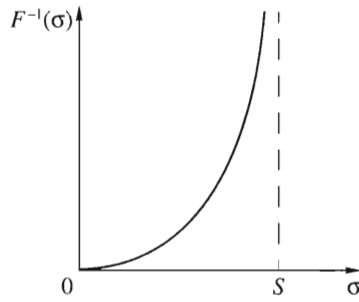
Из системы (1.5), (1.7) следуют нелинейные параболические уравнения

$$\rho v_t = F'(v_x) v_{xx}, \quad \rho(F^{-1})'(\sigma) \sigma_t = \sigma_{xx} \quad (t, x) \in D_0. \tag{1.8}$$

После введения автомодельной переменной  $\eta = x/(2\sqrt{\nu_0 t})$ , где  $\nu_0$  – характерная кинематическая вязкость в нелинейной модели (1.7), уравнения (1.8) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций  $\psi(\eta) = v_x(x, t)$  и  $\varphi(\eta) = \sigma(x, t)$ ,  $0 < \eta < \infty$ :

$$\frac{d}{d\eta} \left( F'(\psi) \frac{d\psi}{d\eta} \right) + 2\rho\nu_0\eta \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2\rho\nu_0\eta(F^{-1})'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \tag{1.9}$$

Задание граничных условий в виде  $\psi(0) = V'_0$ ,  $\psi(\infty) = 0$  или  $\varphi(0) = S_0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ , следующем из условий (1.2), в дополнение к уравнениям (1.8) делает задачи о диффузии вихревого



Фиг. 1

слоя в нелинейно-вязкой среде с произвольным реологическим законом  $F$  как в терминах скоростей деформаций, так и в терминах напряжений автомодельными.

Приведем пример точного аналитического решения второго уравнения (1.9). Выберем двухконстантную нелинейно-вязкую жидкость с функцией  $F$ , такой, что обратное к (1.6) определяющее соотношение имеет вид (фиг. 1, сплошная кривая)

$$v_x = F^{-1}(\sigma) = -\frac{S}{\mu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{S} \right) + \frac{\sigma}{S} + \frac{\sigma^2}{2S^2} \right], \quad 0 \leq \sigma < S. \quad (1.10)$$

Касательные напряжения в модели (1.10) не могут превышать материальной константы  $S$ , а при  $\sigma \rightarrow S - 0$  скорость деформации стремится в бесконечность. В определенном смысле поведение, описываемое реологической моделью (1.10), сходно с поведением жестко идеальнопластического материала с предельным напряжением  $S$  (фиг. 1, штриховая линия).

Подставляя выражение (1.9) во второе уравнение (1.8) и учитывая, что характерная кинематическая вязкость  $\nu_0$  в данном случае равна  $\mu/\rho$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $\varphi(\eta)$

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{2\eta\varphi^2}{S(S-\varphi)} \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \quad (1.11)$$

Пусть заданное касательное напряжение  $S_0$  на границе полуплоскости совпадает с  $S$ . Тогда точное решение уравнения (1.11) с граничными условиями

$$\varphi(0) = S, \quad \varphi(\infty) = 0$$

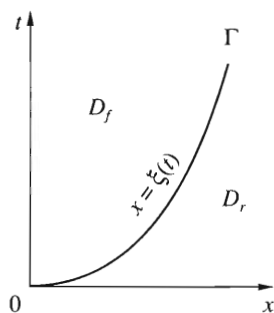
во всей полуплоскости следующее:

$$\varphi = \frac{S}{1 + \eta}.$$

Это означает, что

$$\sigma(x, t) = S \left( 1 + \frac{x}{2\sqrt{\nu_0 t}} \right)^{-1}. \quad (1.12)$$

**2. Наличие предела текучести и отсутствие автомодельности.** Пусть теперь материал имеет предел текучести при сдвиге  $\tau_s$  и проявляет вязкопластические свойства. Включим в базис масштабов для перехода к безразмерным переменным плотность  $\rho$ , динами-



Фиг. 2

ческую вязкость  $\mu$  и величину  $\tau_s$ , так что считаем все дальнейшие соотношения в разд. 2, 3 записанными в безразмерном виде.

Как известно, вязкопластическое течение осуществляется там и тогда, где и когда квадратичный инвариант девиатора напряжений, равный в данной задаче  $|\sigma|$ , больше  $\tau_s$ . Оставшаяся часть материала принадлежит жесткой зоне, где квадратичный инвариант скоростей деформаций  $\sqrt{2v_{ij}v_{ij}}$ , который равен в данной задаче  $|v_x|$ , нулевой. Граница раздела зоны течения и жесткой зоны, на которой  $|\sigma| = 1$ , подлежит определению наравне с другими разыскиваемыми величинами и зачастую представляет основной интерес в задачах массо- и теплопереноса [4, 5].

Исследуем диффузию разрыва касательного напряжения, который задается условиями

$$\sigma(x, 0^+) = 0, \quad x > 0 \quad \sigma(0, t) = S_0 h(t), \quad S_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

При этом (см. фиг. 2)

$$D_0 = D_f \cup \Gamma \cup D_r, \quad D_f = \{t > 0, 0 < x < \xi(t)\}$$

$$\Gamma = \{t > 0, x = \xi(t)\}, \quad D_r = \{t > 0, x > \xi(t)\},$$

где  $D_f$  – полоса вязкопластического сдвига,  $\Gamma$  – граница, отделяющая жесткую полуплоскость  $D_r$  от  $D_f$ . На монотонно возрастающую непрерывную функцию  $\xi(t)$  ( $\xi(0^+) = 0$ ) наложено условие

$$|\sigma(\xi(t), t)| = 1. \quad (2.2)$$

Итак, требуется найти функции

$$v \in C^1(D_0), \quad v \in C^2(D_f, D_r), \quad \sigma \in C^1(D_0), \quad \sigma \in C^2(D_f, D_r),$$

удовлетворяющие системам

$$\sigma_x = v, \quad |\sigma| = 1 + |v_x| \quad (t, x) \in D_f \quad (2.3)$$

$$\sigma_x = v, \quad v_x = 0 \quad (t, x) \in D_r, \quad (2.4)$$

а также условию (2.2). Второе равенство (2.3) является определяющим соотношением вязкопластической среды с линейной вязкостью, или среды Шведова – Бингама.

Начально-краевая задача (2.1)–(2.4) принадлежит к классу параболических задач в области с неизвестной движущейся границей [6, 7]. Она может быть переформулирована в новых независимых переменных  $y = x/\xi(t)$ ,  $\tilde{t} = t$  (тильда над  $t$  в дальнейшем опускается)

$$\sigma_y = \xi v_t - \dot{\xi} y v_y, \quad |v_y| = \xi(|\sigma| - 1) \quad (t, y) \in D'_f \quad (2.5)$$

$$\sigma_y = \xi v_t, \quad v_y = 0 \quad (t, y) \in D'_r \quad (2.6)$$

$$|\sigma(1, t)| = 1, \quad \sigma(0, t) = S_0 h(t), \quad \sigma(y, 0^+) = 0 \quad (2.7)$$

$$D'_f = \{t > 0, 0 < y < 1\}, \quad D'_r = \{t > 0, y > 1\}.$$

Задача (2.5)–(2.7) поставлена уже в областях с постоянными границами, а неизвестная функция  $\xi$  перешла из граничных условий в уравнения.

Пусть для определенности  $S_0 > 0$ , тогда  $\sigma > 0$ ,  $v_y > 0$  в области  $D'_f$ . При этом задачу (2.5)–(2.7) можно следующим образом поставить в напряжениях

$$\sigma_{yy} + \xi \dot{\xi} y \sigma_y = \xi^2 \sigma_t \quad (t, y) \in D'_f \quad (2.8)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (t, y) \in D'_r \quad (2.9)$$

$$\sigma(1, t) = 1, \quad \sigma(0, t) = S_0, \quad \sigma(y, 0^+) = 0. \quad (2.10)$$

В попытке поиска решения начально-краевой задачи (2.8)–(2.10) в автомодельной форме, что эквивалентно случаю, когда функция  $\sigma$  зависит только от переменной  $y$ , из уравнения (2.8) имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \sigma}{dy^2} + by \frac{d\sigma}{dy} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (2.11)$$

причем  $\xi \dot{\xi} = b = \text{const}$ , так что зависимость толщины зоны течения от  $t$  сразу определяется с точностью до постоянной:  $\xi = \sqrt{2bt}$ . Уравнение (2.11) с граничными условиями (2.10)  $\sigma(0) = S_0$ ,  $\sigma(1) = 1$  имеет решение

$$\sigma = S_0 \left( 1 - \frac{C\sqrt{\pi}}{2} \text{erf} \left( y \sqrt{\frac{b}{2}} \right) \right). \quad (2.12)$$

Постоянные  $C > 0$  и  $b$  связаны условием равенства единице правой части соотношения (2.12) при  $y = 1$ .

Из этого условия видно, что если  $0 \leq S_0 \leq 1$ , то  $C$  подобрать нельзя, т.е. зоны течения в этом случае нет и при  $t > 0$  вся полуплоскость охвачена жесткой зоной. Действительно, сдвиговых усилий  $|S_0| \leq 1$  на границе недостаточно для преодоления предела текучести. Таким образом, условие осуществимости вязкопластического течения имеет вид  $|S_0| > 1$ .

По напряжению (2.12) из системы (2.5) найдем скорость в зоне течения  $0 < y < 1$ :

$$v(y, t) = \left[ (S_0 - 1)y - \frac{S_0 \sqrt{\pi} C y}{2} \text{erf} \left( y \sqrt{\frac{b}{2}} \right) - \frac{S_0 C}{\sqrt{2b}} \exp \left( -\frac{by^2}{2} \right) \right] \xi(t), \quad (2.13)$$

а также скорость границы полуплоскости  $y = 0$  и скорость границы раздела  $y = 1$

$$v(0, t) = -\frac{S_0 C}{\sqrt{2b}} \xi(t) = -S_0 C \sqrt{t} \quad (2.14)$$

$$v_*(t) \equiv v(1, t) = -\frac{S_0 C}{\sqrt{2b}} \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \xi(t) = -S_0 C \sqrt{t} \exp\left(-\frac{b}{2}\right). \quad (2.15)$$

Следовательно, жесткая полуплоскость должна двигаться поступательно со скоростью  $v_*$  (2.15) и ускорением

$$\dot{v}_*(t) = -\frac{S_0 C}{\sqrt{2b}} \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \dot{\xi}(t) = -\frac{S_0 C}{2\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{b}{2}\right). \quad (2.16)$$

Обратимся к распределениям напряжения и скорости в жесткой зоне, описываемым уравнением (2.9), которое в силу непрерывности  $\sigma$  при  $y > 0$ , а также автомодельности имеет интеграл

$$\sigma(y) = 1 - k(y - 1), \quad y > 1.$$

Но по определению в любой точке жесткой зоны  $|\sigma| \leq 1$ , поэтому  $k = 0$ ,  $\sigma \equiv 1$  и из уравнения движения (2.6) сразу следует  $v_t \equiv \dot{v}_*(t) \equiv 0$ . Это, как видно, противоречит выведенной зависимости (2.16) ускорения от  $t$ , т.е. система (2.8)–(2.10) не имеет автомодельного решения  $\sigma(y)$ .

Отсутствие автомодельности в задаче о диффузии вихревого слоя в среде Шведова–Бингама, обладающей пределом текучести, в отличие от аналогичных задач для линейной и нелинейной вязкой жидкости, вызвано тем, что течение происходит не в области  $D_0$ , а в расширяющейся полосе  $D'_f$  с неизвестной границей (фиг. 2).

Одной из первых задач теории вязкопластичности, в которой учитывалось движение границы жесткого ядра, была задача об ударе вязкопластического стержня о твердую преграду [8]. Исследовался [9, 10] плоскопараллельный и осесимметричный сдвиг материала Шведова–Бингама в областях с подвижными границами. Имеются обзоры по плоскому и пространственному нестационарному деформированию подобных сред в неканонических областях, а также по проблемам устойчивости этого деформирования [4, 5, 11–13].

**3. Задача в области с неизвестной границей и неаналитичность ее решения. Асимптотики на больших временах.** Следствием требуемой гладкости функций  $\sigma(y, t)$  и  $u(y, t)$  при переходе из области  $D'_f$  в  $D'_r$  является равенство  $v_t(1, t) = 0$ . В совокупности с первым уравнением (2.5) и условием  $v_y(1, t) = 0$  это означает, что  $\sigma_y(1, t) = 0$ . Последнее условие – дополнительное к постановке задачи (2.8)–(2.10). В области  $D'_r$ , как было показано выше, решение тривиально:  $\sigma \equiv 1$ ,  $v_t \equiv 0$ , а в области  $D'_f$  имеем следующую задачу для двух неизвестных функций  $\sigma(y, t)$  и  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + \xi \dot{\xi} y \sigma_y &= \xi^2 \sigma_t \\ \sigma(0, t) &= S_0, \quad \sigma(1, t) = 1, \quad \sigma_y(1, t) = 0, \quad \xi(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Начальное условие для  $\sigma$  опущено в силу того, что при  $t = 0$  область  $D'_f$  отсутствует и замена  $(x, t) \rightarrow (y, t)$  становится вырожденной.

Недавно исследовалась [14] задача, сходная с (3.1), (3.2), и были обсуждены условия, влияющие на существование зоны вязкопластического течения, а также на конечность характеристик течения на малых временах.

Задача (3.1), которую можно сформулировать в переменных  $(x, t)$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_t, & 0 < x < \xi(t) \\ \sigma(0, t) &= S_0, & \sigma(\xi(t), t) = 1, & \sigma_x(\xi(t), t) = 0, & \xi(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

является одним из вариантов известной задачи Стефана [1, 15]. Нетрудно показать, что все частные производные по  $y$  решения  $\sigma(y, t)$  задачи (3.1) в точке  $y = 1$ , так же как все частные производные по  $x$  решения  $\sigma(x, t)$  задачи (3.2) на кривой  $x = \xi(t)$  равны нулю при любом  $t$ . Тем не менее в области вязкопластического течения эти функции не равны тождественно своему значению при  $y = 1$  (или при  $x = \xi(t)$ ), т.е. единице. Это говорит о неаналитичности решений  $\sigma(y, t)$  и  $\sigma(x, t)$  задач (3.1) и (3.2).

Изучим возможность задания на границе полуплоскости вместо первого условия в задаче (3.2) такого режима касательного напряжения

$$S(t) = S_0 h(t) + S_1(t),$$

где  $S_1(t)$  – непрерывная хотя бы на малом интервале времени  $0 < t < t_\epsilon$  функция, удовлетворяющая требованиям  $S_1(0) = 0$  и  $\dot{S}_1(t) \geq 0$ , что решение сформулированной задачи Стефана имеет аналогичный (1.4) вид

$$\sigma(x, t) = \int_0^t \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} dS(\tau). \quad (3.3)$$

При этом два других граничных условия для  $\sigma$  приводят к системе интегральных уравнений относительно двух функций  $\xi(t)$  и  $S_1(t)$

$$S_0 \operatorname{erfc} \frac{\xi(t)}{2\sqrt{t}} + \int_0^t \operatorname{erfc} \frac{\xi(t)}{2\sqrt{t-\tau}} dS_1(\tau) = 1 \quad (3.4)$$

$$\frac{S_0}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2(t)}{4t}\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \frac{dS_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} = 0.$$

Оба слагаемые в левой части последнего равенства (3.4) при сколь угодно малом  $t < t_\epsilon$  строго положительны, поэтому их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, наличие дополнительного граничного условия  $\sigma_x(\xi(t), t) = 0$  уже делает систему (3.4) несовместной и приводит к отрицательному ответу на вопрос о допустимости решения (3.3).

Наметим пути построения асимптотических решений задачи (3.1) при  $t \rightarrow \infty$ . Будем искать решение этой задачи в виде

$$\sigma(y, t) = 1 + (S_0 - 1)Y_1(y)\exp(-T(t)Y(y)) \quad (3.5)$$

с тремя неизвестными функциями  $T(t)$ ,  $Y(y)$  и  $Y_1(y)$ . Две последние должны удовлетворять условиям

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = \infty, \quad Y_1(0) = 1, \quad Y_1(1) = 0. \quad (3.6)$$

Асимптотическое поведение решения на больших временах соответствует  $T(t) \sim t^{-q}$  и  $\xi(t) \sim \sqrt{t}$ , где неизвестный показатель  $q$  положителен. Наряду с  $q$  необходимо найти функции  $Y$  и  $Y_1$  из системы

$$Y_1'' + yY_1'/2 = 0, \quad Y_1 Y'' + (2Y_1' + yY_1/2)Y' + qY_1 Y = 0 \quad (3.7)$$

получающейся после подстановки представления (3.5) в первое уравнение (3.1) и выделения главных членов асимптотик. Функция  $Y_1(y)$  сразу находится из первого уравнения системы (3.7) с граничными условиями (3.6):

$$Y_1(y) = 1 - \frac{\operatorname{erf}(y/2)}{\operatorname{erf}(1/2)}.$$

Тогда показатель  $q$  – собственное значение, а функция  $Y(y)$  – собственная функция линейной задачи на собственные значения

$$Y'' + \left( \frac{y}{2} - \frac{2 \exp(-y^2/4)}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(1/2) - \operatorname{erf}(y/2))} \right) Y' + qY = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = \infty.$$

**4. Нахождение функции  $\xi(t)$  по измерениям на доступной границе  $y = 0$ .** Возвратимся к размерным переменным и всюду далее сохраним за ними обозначения соответствующих безразмерных переменных. Пусть после приложения в начальный момент времени на границе полуплоскости  $y = 0$  касательного напряжения

$$S_0 = \alpha_1 \tau_s, \quad \alpha_1 > 1 \tag{4.1}$$

можно измерить скорость данной границы. Согласно соотношению (2.14) модуль этой скорости растет со временем пропорционально  $\sqrt{t}$  и, следовательно, имеет вид

$$|v(0, t)| = \alpha_2 \tau_s \sqrt{v t / \mu}, \tag{4.2}$$

где  $\alpha_2$  – экспериментально найденный коэффициент пропорциональности. Кроме того, само выражение (2.14) переписывается следующим образом

$$|v(0, t)| = S_0 C \sqrt{v t / \mu}. \tag{4.3}$$

Сравнивая теперь (4.2) и (4.3) и учитывая (4.1), приходим к выражению для безразмерной постоянной  $C$ :

$$C = \alpha_2 / \alpha_1. \tag{4.4}$$

Поскольку коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  известны из измерений на доступной границе  $y = 0$ , то значение  $C$  известно. Подставим это значение в связь  $C$  и  $b$ , которая в размерных переменных примет вид

$$S_0 \left( 1 - \frac{C \sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{b}{2v}} \right) = \tau_s, \tag{4.5}$$

и приходим к алгебраическому уравнению относительно параметра  $b$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{b}{2v}} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2}. \tag{4.6}$$

Зная значение параметра  $b$ , находим текущую толщину зоны течения

$$\xi(t) = \sqrt{2bt}. \tag{4.7}$$

Приведем числовой пример, в котором материальные постоянные  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\tau_s$  взяты характерными для ледниковых структур и часто используются при расчетах в гляциологии [16]:  $\rho \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu \approx 10^{11} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$  (для естественного льда при усилении, перпендикулярном главной кристаллографической оси),  $\tau_s \approx 10^3 \text{ кг/м} \cdot \text{с}^2$ . Пусть после мгновенного приложения на верхней границе касательной нагрузки  $2 \cdot 10^3 \text{ кг/м} \cdot \text{с}^2$  ( $\alpha_1 = 2$ ) скорость

этой границы через 1 с составила  $10^{-3}$  м/с. Подсчитаем по этим данным значение параметра  $b$ .

Согласно соотношению (4.2)  $\alpha_2 \approx 10$  и по формуле (4.6) находим  $b \approx 2 \cdot 10^6$  м<sup>2</sup>/с. Пользуясь равенством (4.7), заключаем, что, например, через 1 с после начала движения толщина зоны вязкопластического течения будет около 2 км.

Сходные задачи встречаются и в механике грунтов при моделировании движения оползней [17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00397, 05-01-00401, 05-01-00403).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматлит, 1963. 727 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
4. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязко-пластических сред. М.: Наука, 1977. 373 с.
5. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических сред. М.: УРСС, 1998. 176 с.
6. Кружков С.Н. О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1009–1020.
7. Кружков С.Н. Об одном классе задач с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 5. С. 1036–1038.
8. Ишлинский А.Ю., Баренблатт Г.И. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 4. С. 734–737.
9. Сафрончик А.И. Неустановившееся течение вязко-пластичного материала между параллельными стенками // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 925–935.
10. Сафрончик А.И. Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязко-пластичной среде // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1051–1056.
11. Георгиевский Д.В. Устойчивость нестационарного сдвига вязкопластической полуплоскости с тангенциальным разрывом вдоль границы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 3. С. 65–72.
12. Георгиевский Д.В. Некоторые неоднмерные задачи вязкопластичности: жесткие зоны и устойчивость (обзор) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 61–78.
13. Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
14. Huilgol R.R. On kinematic conditions affecting the existence and nonexistence of a moving yield surface in unsteady unidirectional flows of Bingham fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2004. V. 123. № 2–3. P. 215–221.
15. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 457 с.
16. Савельев Б.А. Гляциология. М.: Изд-во МГУ, 1991. 288 с.
17. Сагомонян А.Я. Движение оползней, возникающих на склонах возвышенностей под действием дождя // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 4. С. 30–36.