

УДК 539.4

© 2006 г. А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко

## УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ПРЯМОМ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

В различных постановках получены аналитические решения задачи об осесимметричной потере устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, претерпевающей прямое мартенситное превращение под действием сжимающей нагрузки. Установлено, что решение в рамках концепции “фиксированного фазового состава” дает оценку сверху для критической нагрузки, а решение в рамках концепции “продолжающегося нагружения” – оценку снизу. Для защемленной пластины найдено промежуточное решение в рамках концепции “упругой разгрузки”, удовлетворяющее всем уравнениям задачи при нулевых вариациях внешних нагрузок и соответствующее не зависящей от радиальной координаты толщине слоя дополнительного фазового превращения.

Экспериментально обнаружено [1], что термоупругие мартенситные фазовые превращения, происходящие под действием сжимающих напряжений, могут служить причиной потери устойчивости тонкостенных элементов из сплавов с памятью формы (СПФ). Проанализированы [2–5] разные концепции, которые могут лежать в основе описания этого явления: гипотеза “фиксированного фазового состава”, согласно которой при переходе в смежную форму равновесия параметр фазового состава не меняется, концепция “продолжающегося фазового перехода”, согласно которой переход в смежную форму равновесия сопровождается дополнительным фазовым превращением. Последнее предположение возможно в двух вариантах: гипотеза “продолжающегося нагружения”, в соответствии с которой действующие нагрузки в процессе потери устойчивости могут испытывать малые возмущения, вследствие чего дополнительный фазовый переход испытывают все точки сечения, и концепция “упругой разгрузки”, в соответствии с которой на выпуклой поверхности пластины в процессе выпучивания образуется зона, свободная от дополнительного фазового перехода.

В рамках этих концепций получены решения задач устойчивости стойки Шенли на опорных стержнях из СПФ [2, 3], стержня [4], прямоугольной пластины и пластины – полоски из того же материала [5]. Следует отметить, что концепции “упругой разгрузки” и “продолжающегося нагружения” не являются полностью альтернативными. Так, для случая пластины построено решение [5] в рамках концепции “упругой разгрузки” с постоянной толщиной слоя дополнительного фазового перехода. Однако для правомерности этого решения действующие на пластину внешние нагрузки должны испытывать некоторые малые возмущения, для которых получены явные выражения.

В данной работе в рамках разных гипотез получены аналитические решения задачи о потере устойчивости сплошной круглой защемленной (без ограничений радиального смещения кромок) или свободно опертой по контуру пластины из СПФ, вызванной прямым мартенситным превращением, происходящим под действием постоянной радиальной сжимающей нагрузки, равномерно распределенной по контуру пластины.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается сплошная круглая пластина постоянной толщины  $h$  и радиуса  $R$ , изготовленная из сплава с памятью формы (СПФ). Вводится полярная система координат  $r, \theta$ , оси которой расположены в срединной плоскости, а начало в центре пластины. Пластина нагружена по своей торцевой кромке равномерно сжима-

ющей постоянной внешней поверхностной силой  $p$ , действующей в радиальном направлении. Положительной считается сжимающая нагрузка.

Поверхностная сила  $p$  прикладывается к пластине при столь высокой температуре, что создаваемое напряженное состояние не вызывает прямого мартенситного превращения в изотермических условиях. Далее пластина медленно охлаждается от температуры начала до температуры окончания прямого мартенситного превращения. Температура всех точек пластины в каждый момент времени считается одинаковой.

Разыскивается минимальное значение нагрузки, при котором в процессе прямого превращения наряду с тривиальной плоской формой пластины возможны также искривленные формы равновесия. Задача устойчивости решается в линеаризованной постановке в рамках теории малых деформаций и кинематических гипотез Кирхгофа – Лява (в отношении полных деформаций).

Для решения задачи устойчивости используется упрощенный вариант предложенной ранее [6–8] системы определяющих соотношений для СПФ, который для плоского напряженного состояния (осесимметричная задача) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{\sigma_r - \mu(q)\sigma_\theta}{E(q)}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{\sigma_\theta - \mu(q)\sigma_r}{E(q)} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_1} + \frac{1-q}{G_2}, \quad \mu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1$$

$$d\varepsilon_r^{(2)} = \left( \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{3\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_r^{(2)} \right) dq, \quad d\varepsilon_\theta^{(2)} = \left( \frac{2\sigma_\theta - \sigma_r}{3\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_\theta^{(2)} \right) dq \quad (1.3)$$

$$M_2 + k\sigma_i \leq T \leq M_1 + k\sigma_i, \quad kd\sigma_i - dT > 0 \quad (1.4)$$

$$q = \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi(t + k^*\sigma_i))], \quad t = \frac{M_1 - T}{M_1 - M_2}, \quad k^* = \frac{k}{M_1 - M_2}, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$  – полная, упругая и фазовая деформации;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_i$  – компоненты и интенсивность напряжений,  $q$  – объемная доля мартенситной фазы;  $E(q)$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  – модуль Юнга двухфазной среды и его значения в мартенситном (индекс 1) и аустенитном (индекс 2) состояниях,  $G(q)$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  – аналогичные значения для модуля сдвига,  $\mu(q)$  – коэффициент Пуассона двухфазной среды;  $T$  – текущая температура,  $M_1$  и  $M_2$  – температуры начала (индекс 1) и окончания (индекс 2) прямого мартенситного превращения в свободном от напряжений материале;  $k$ ,  $\sigma_{(1)}$ ,  $a_0$  – постоянные материала.

В соответствии с уравнениями (1.1), (1.3) при решении задачи пренебрегается объемным эффектом реакции мартенситного превращения и чисто температурными деформациями, а из неравенств (1.4) и последнего выражения (1.5) ясно, что при определении условий осуществления прямого перехода (1.4) пренебрегается влиянием поперечных касательных напряжений.

**2. Анализ докритического состояния.** Было установлено [9], что если значения напряжений, получаемые при решении некоторой упругой задачи, не зависят от упругих постоянных и координат точек тела, то точно такие же напряжения должны получаться при решении задачи о прямом мартенситном превращении для такого же по форме и так же нагруженного тела из СПФ, при условии, что температура не зависит от координат точек тела. Отсюда следует, что докритические напряжения в рассматриваемой пластине и интенсивность напряжений  $\sigma_i$  при прямом превращении определяются формулами

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p, \quad \sigma_i = |p|. \quad (2.1)$$

Фазовые деформации находятся интегрированием соотношений (1.3) при учете равенств (2.1) и нулевых начальных условий. Имеем

$$\varepsilon_r^{(2)} = \varepsilon_\varphi^{(2)} = -\frac{P}{3\sigma_{(1)}a_0}(\exp(a_0q) - 1). \tag{2.2}$$

Согласно равенствам (2.1) до момента потери устойчивости происходит равномерное сжатие пластины. Докритические значения прогиба, угла поворота и кривизн равны нулю.

**3. Система уравнений для возмущенного состояния.** Было показано [4, 5], что учет малых возмущений температуры при анализе устойчивости стержней и пластин из СПФ не приводит к изменению значений критических сил. Поэтому ниже считается, что вариация температуры равна нулю. Гипотеза прямых нормалей для полной деформации записывается применительно к пластине при учете соотношений (1.1), (1.2) в виде

$$\varepsilon_r^0 - x_3\kappa_r = \frac{\sigma_r - \mu(q)\sigma_\theta}{E(q)} + \varepsilon_r^{(2)}, \quad \varepsilon_\theta^0 - x_3\kappa_\theta = \frac{\sigma_\theta - \mu(q)\sigma_r}{E(q)} + \varepsilon_\theta^{(2)}. \tag{3.1}$$

Здесь  $x_3$  – ортогональная пластине координата,  $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0$  – деформации срединной плоскости пластины,  $\kappa_r, \kappa_\theta$  – кривизны.

Беря вариации от обеих частей равенств (3.1) и используя соотношения (1.3) и (2.2), получим

$$\delta\varepsilon_r^0 - x_3\delta\kappa_r = \frac{\delta\sigma_r - \mu\delta\sigma_\theta}{E} + g\delta q, \quad \delta\varepsilon_\theta^0 - x_3\delta\kappa_\theta = \frac{\delta\sigma_\theta - \mu\delta\sigma_r}{E} + g\delta q \tag{3.2}$$

$$g = g(p, q) = -p\left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} - \frac{1 - \mu_2}{E_2} + \frac{1}{3\sigma_{(1)}}\exp(a_0q)\right) \tag{3.3}$$

$$\delta q = \psi(q)k^*\delta\sigma_i U_+, \quad \psi(q) = \pi\sqrt{q(1-q)}, \quad \delta\sigma_i = -\frac{\delta\sigma_r + \delta\sigma_\theta}{2}, \quad U_+ = H(\delta\sigma_i),$$

где  $H$  – функция Хевисайда,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – коэффициенты Пуассона для мартенситного и аустенитного состояний. Здесь и ниже все величины без знака вариации относятся к докритическому состоянию, аргумент  $q$  у величин  $E, G$  и  $\mu$  без индексов опускается.

Разрешая уравнения (3.2), (3.3) относительно вариации напряжений, получим

$$\delta\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{(\delta\varepsilon_r^0 - x_3\delta\kappa_r)(1 + \xi^+ U_+) + (\delta\varepsilon_\theta^0 - x_3\delta\kappa_\theta)(\mu - \xi^+ U_+)}{1 + \xi U_+} \tag{3.4}$$

$$\xi^+ = \xi^+(p, q) = -\frac{1}{2}Eg(p, q)\psi(q)k^*, \quad \xi = \xi(p, q) = \frac{2\xi^+(p, q)}{1 - \mu}.$$

Для  $\delta\sigma_\theta$  справедлива аналогичная (3.4) формула, в которой необходимо индексы  $r$  и  $\theta$  поменять местами.

Пусть для определенности нижняя часть сечения пластины  $-h/2 \leq x_3 \leq x_3^0$  при переходе в смежную форму равновесия испытывает дополнительный фазовый переход (ДФП), а верхняя  $x_3^0 \leq x_3 \leq h/2$  деформируется упруго. В упругой части дифференциальное условие осуществления прямого превращения (1.4) должно нарушаться:  $\delta\sigma_i \leq 0$  (здесь учтено, что  $\delta T = 0$ ); в зоне ДФП должно быть справедливо противоположное неравенство.

Тогда из предположения о непрерывности вариации напряжений при переходе через границу области ДФП следует, что на самой этой границе должно быть  $\delta\sigma_i = 0$ . Подставляя сюда выражение для вариации интенсивности напряжений (3.3) и используя в полученном соотношении выражения для вариаций компонент тензора напряжений (3.4), записанные для случая  $U_+ = 0$ , получим уравнение для определения координаты границы зоны ДФП

$$\delta\varepsilon_r^0 + \delta\varepsilon_\theta^0 = x_3^0(\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta). \quad (3.5)$$

Подстановка выражения (3.4) при учете уравнения (3.5) в выражения для вариаций усилий и моментов

$$\delta M_m = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_m x_3 dx_3, \quad \delta N_m = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_m dx_3,$$

где индекс  $m$  принимает значения  $r, \theta$ , дает

$$\begin{aligned} \delta M_r &= -D((\delta\kappa_r + \mu\delta\kappa_\theta) - \omega_1(\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta)) \\ \delta N_r &= D_1((\delta\varepsilon_r^0 + \mu\delta\varepsilon_\theta^0) - \omega_2(\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta)) \quad (r \leftrightarrow \theta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(два невыписанных соотношения получаются перестановкой индексов  $r$  и  $\theta$ ). Здесь

$$\begin{aligned} D &= D(q) = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_1 = D_1(q) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \\ \omega_1 &= \omega_1(p, z, q) = \frac{\omega}{4}(2-z)(1+z)^2, \quad \omega_2 = \omega_2(p, z, q) = \frac{h\omega}{8}(1+z)^2 \\ z &= \frac{2x_3^0}{h}, \quad \omega = \omega(p, q) = \frac{(1+\mu)\xi}{2(1+\xi)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно соотношениям (3.6) выражения для вариаций усилий и моментов состоят из упругой (первые слагаемые в круглых скобках) и неупругой (вторые слагаемые в круглых скобках) частей. Неупругие слагаемые тензоров усилий и моментов – шаровые тензоры. Поэтому разности  $\delta M_r - \delta M_\theta$  и  $\delta N_r - \delta N_\theta$  вычисляются с помощью обычных упругих зависимостей с переменными модулями, зависящими от параметра  $q$ . В то же время суммы вариаций моментов или усилий пропорциональны соответственно суммам вариаций кривизн или деформаций срединной поверхности (чтобы убедиться в этом для случая усилий, необходимо воспользоваться соотношением (3.5)). Эти соображения облегчают вывод разрешающего уравнения задачи.

К соотношениям (3.6) необходимо добавить уравнения равновесия

$$r\delta M'_r + \delta M_r - \delta M_\theta + N_r r \delta\varphi = 0, \quad \delta N'_r + \frac{\delta N_r - \delta N_\theta}{r} = \delta Q_r, \quad (3.8)$$

где  $\delta Q_r$  – вариация внешней поверхностной нагрузки, и совместности

$$\delta\varepsilon_r - \delta\varepsilon_\theta - r\delta\varepsilon'_\theta = 0,$$

где штрих обозначает производную по координате  $r$ . Последнее при учете левых частей представлений (3.1), а также линейных выражений, связывающих кривизны и угол поворота,

$$\delta\kappa_r = \delta\varphi', \quad \delta\kappa_\theta = \delta\varphi/r, \quad (3.9)$$

эквивалентно таковому же, но записанному только для вариаций деформаций в срединной плоскости

$$\delta \epsilon_r^0 - \delta \epsilon_\theta^0 - r \delta \epsilon_\theta^0 = 0. \tag{3.10}$$

Вместо условия совместности (3.10) можно использовать выражения вариаций соответствующих деформаций через вариацию радиального смещения

$$\delta \epsilon_r^0 = \delta u', \quad \delta \epsilon_\theta^0 = \delta u/r. \tag{3.11}$$

В результате все неизвестные функции задачи могут быть выражены через две величины  $\delta u$  и  $\delta \varphi$ , для которых должны выполняться два дифференциальных уравнения (каждое – второго порядка), получающиеся путем подстановки выражений (3.5), (3.6), (3.9) и (3.11) в уравнения (3.8).

Краевыми условиями в центре пластины при  $r = 0$  служат условия равенства нулю вариации угла поворота и вариации радиального смещения

$$\delta u(0) = 0, \quad \delta \varphi(0) = 0. \tag{3.12}$$

Краевые условия на внешнем контуре пластины для угла поворота зависят от типа ее закрепления. Для случая защемления – это равенство нулю вариации угла поворота

$$\delta \varphi(R) = 0. \tag{3.13}$$

Для свободного опирания – это условие равенства нулю вариации радиального изгибающего момента (3.6)

$$R \delta \varphi'(R)(1 - \omega_1) + \delta \varphi(R)(\mu - \omega_1) = 0. \tag{3.14}$$

Краевое условие на внешнем контуре для вариации радиального смещения сводится, вообще говоря, к заданию на этом контуре вариации внешней нагрузки:  $\delta N_r = -h \delta p$ , или

$$\delta u'(R) \left( 1 - \frac{2\omega_2}{hz} \right) + \frac{\delta u(R)}{R} \left( \mu - \frac{2\omega_2}{hz} \right) = -\frac{h \delta p}{D_1}. \tag{3.15}$$

Пусть задача решается при отсутствии вариаций внешних нагрузок (т.е. в рамках концепции “упругой разгрузки”). В этом случае во втором уравнении (3.8) и уравнении (3.15) необходимо положить  $\delta Q_r = 0$ ,  $\delta p = 0$ . Полученной системы уравнений с соответствующими граничными условиями достаточно для решения проблемы устойчивости.

В рамках концепции “продолжающегося нагружения” задача устойчивости для СПФ, вообще говоря, теряет определенность, поскольку возмущения внешних нагрузок неизвестны. Можно использовать, однако, постановку задачи, в рамках которой в определенном классе решений разыскивается то, для которого критические значения внешних нагрузок будут минимальны, при условии, что возмущения внешних нагрузок малы.

**4. Решения для случаев постоянной толщины зоны дополнительного фазового перехода.** В данной работе в качестве упомянутого выше класса решений рассматриваются те, для которых величина  $x_3^0$  (или  $z$ ) не зависит от радиальной координаты  $r$  (т.е. толщина зоны ДФП одинакова во всех точках пластины). Складывая выражения для  $\delta N_r$  и  $\delta N_\theta$  (3.6) при учете уравнения (3.5), получим

$$\delta N_r + \delta N_\theta = \lambda (\delta \epsilon_r^0 + \delta \epsilon_\theta^0), \quad \lambda = \lambda(p, z, q) = \frac{Eh}{1 - \mu} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\xi}{1 + \xi} \frac{(1+z)^2}{z} \right). \tag{4.1}$$

Величина  $q$  по предположению не зависит от координаты  $r$ , поэтому зависящие от  $q$  функции  $E(q)$ ,  $\mu(q)$ ,  $\xi(p, q)$ , входящие в выражение (4.1) для  $\lambda$ , не зависят от  $r$ . Таким обра-

зом, согласно равенству (4.1) величина  $z$  не зависит от  $r$  в случае, когда сумма вариаций мембранных усилий пропорциональна сумме вариаций деформаций срединной поверхности, с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от  $r$ .

Подставляя в соотношение (3.5) выражения для вариаций кривизн (3.9) и деформаций (3.11) через вариации угла поворота и радиального смещения, получим  $(r\delta u)' = x_3^0 (r\delta\varphi)'$ .

Интегрирование по  $r$  в условиях, когда  $x_3^0$  от радиуса не зависит, дает  $r\delta u = x_3^0 r\delta\varphi + C$ . Из этого равенства и условия ограниченности  $\delta u$  и  $\delta\varphi$  при  $r \rightarrow 0$  можно получить  $C = 0$ , откуда следует

$$\delta u = zh\delta\varphi/2. \quad (4.2)$$

Таким образом, для рассматриваемого класса решений вариации  $\delta\varphi$  и  $\delta u$  пропорциональны с коэффициентом, не зависящим от координаты  $r$ . Следовательно, любое однородное линейное уравнение или граничное условие, выполняющееся для одной из этих вариаций, должно выполняться и для другой. Поэтому в рамках концепции “упругой разгрузки” при нулевых вариациях внешних усилий каждая из функций  $\delta\varphi$  и  $\delta u$  должна удовлетворять двум дифференциальным уравнениям и двум наборам граничных условий. Ясно, что такая ситуация может иметь место лишь при специальном подборе функций, входящих в систему уравнений.

В условиях независимости параметра  $z$  от  $r$  подстановка выражений для вариаций моментов (3.6) в первое уравнение равновесия (3.8) с учетом выражений (3.9) для вариаций кривизн приводит к уравнению

$$\delta\varphi'' + \frac{\delta\varphi'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} - \alpha^2\right)\delta\varphi = 0, \quad \alpha^2 = \alpha^2(p, z, q) = \frac{hp}{D(q)(1 - \omega_1(p, z, q))}, \quad (4.3)$$

которое лишь значением коэффициента при  $\delta\varphi$  отличается от уравнения устойчивости для упругой круглой пластины [10, 11] (последнее получается из уравнения (4.3), если положить  $\omega_1 = 0$  и считать цилиндрическую жесткость  $D(q)$  постоянной величиной). Поэтому процедура решения уравнения (4.3) не отличается от процедуры исследования соответствующего уравнения для упругих пластин [10, 11]. Разница состоит в том, что для пластины из СПФ в отличие от упругой пластины искомое собственное значение зависит как от  $q$ , так и от  $z$ , причем помимо уравнения (4.3) необходимо, чтобы удовлетворялись еще и второе уравнение (3.8) с соответствующим граничным условием (3.15), а также соотношение (3.5). В случае, когда  $z$  от  $r$  не зависит, решать эту систему удастся последовательно. Сначала из уравнения (4.3) определяется собственное значение и собственная функция  $\delta\varphi$ , зависящие от величин  $z$  и  $q$ . Потом, перейдя с помощью соотношения (4.2) к вариации  $\delta u$  и подставив полученное решение во второе уравнение (3.8), можно найти значение  $z$ . Возможен вариант с заданием из каких-либо соображений величины  $z$  и последующим определением соответствующих значений вариаций нагрузки исходя из второго уравнения (3.8) и условия (3.15). В качестве таких соображений можно, в частности, использовать требования минимальности или максимальности искомых критических нагрузок по  $z$ . В упругом случае система двух уравнений устойчивости распадается, и для второго уравнения (3.8) возможно тривиальное решение.

Замена независимой переменной  $r$  на  $v = r\alpha$  позволяет привести уравнение (4.3) к уравнению Бесселя, решение которого записывается через бесселевы функции первого и второго рода с индексом единица в виде  $\varphi(v) = C_1 J_1(v) + C_2 Y_1(v)$ . Для сплошной круглой пластины из второго граничного условия (3.12) следует, что  $C_2 = 0$ , т.е.

$$\varphi(\alpha r) = C_1 J_1(\alpha r), \quad \delta u(\alpha r) = C_1 h z J_1(\alpha r)/2. \quad (4.4)$$

Вторая формула (4.4) получена из первой с помощью соотношения (4.2).

Для свободно опертой по контуру пластинки из краевого условия (3.14) получается

$$J_0(U)(1 - \omega_1(p, z, q)) - U^{-1}J_1(U)(1 - \mu(q)) = 0, \quad U = \alpha R, \quad (4.5)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом. Наименьший корень этого уравнения  $U_1$  зависит, вообще говоря, от  $p, z, q$ . Для защемленной по контуру пластины граничное условие (3.13) дает  $J_1(U) = 0$ . Его наименьший корень  $U_2$  приблизительно равен 3.8317.

Учитывая равенство  $\alpha R = U_i$ , из второй формулы (4.3) получаем искомые уравнения для критической нагрузки

$$p = D(q)U_i^2(1 - \omega_1(p, z, q))/(hR^2). \quad (4.6)$$

Здесь и ниже  $i = 1$  соответствует свободному опиранию, а  $i = 2$  – защемлению. Для случая свободного опирания удобнее в общем случае решать не систему (4.5), (4.6), а уравнение, получающееся непосредственно подстановкой выражения  $U = \alpha R$  в первую формулу (4.5). В результате при учете зависимости  $\alpha$  от  $p, z$  и  $q$  (4.3) уравнение (4.5) позволяет определить критическую нагрузку  $p$  как функцию  $z$  и  $q$ .

Минимизация полученных для случаев защемления и свободного опирания функции  $p = p(z, q)$  по  $q$ , а, возможно, в зависимости от постановки задачи и по  $z$ , позволяет найти критическое значение нагрузки  $p^*$ .

Согласно формуле (4.6) при учете соотношений (3.7) можно показать, что критическая нагрузка  $p$  как функция от  $z$  на отрезке  $[-1, 1]$  при фиксированном  $q$  имеет наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках  $z = -1$  и  $z = 1$ .

Следует отметить одну важную особенность решения задачи устойчивости для защемленной по контуру пластины из СПФ. Дело в том, что в соответствии с решением (4.4) вариация удвоенной средней кривизны  $\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta$  обращается в нуль при некотором значении  $r = r_0 < R$  и при переходе через эту точку меняет знак. При переходе  $r$  через значение  $r_0$  та из поверхностей пластины, к которой при  $r < r_0$  примыкала область упругой разгрузки с  $\delta\sigma_r < 0$ , теперь будет граничить с областью догрузки с  $\delta\sigma_r > 0$ . В результате, согласно уравнению (3.5), должен смениться знак  $x_3^0$  и  $z$ . Следовательно, в данном случае речь идет не о постоянной (не зависящей от  $r$ ) величине  $z$ , а о координате, которая, не меняясь по абсолютной величине, может менять знак (т.е. является разрывной функцией). Тем не менее можно показать, что полученное решение удовлетворяет всем уравнениям задачи как слева, так и справа от точки разрыва (последняя система будет несколько отличаться от приведенной выше, так как она формулируется для условий, когда область  $-h \leq x_3 < x_3^0$  – зона разгрузки, а область  $x_3^0 < x_3 \leq h$  – зона ДФП).

В случае задания функций  $z = z(p, q)$  или  $\lambda = \lambda(p, q)$  величину вариации внешней нагрузки, необходимую, чтобы удовлетворить всем уравнениям задачи устойчивости, можно найти, подставив выражения

$$\delta N_r - \delta N_\theta = D_1(1 - \mu)(\delta\epsilon_r^0 - \epsilon_\theta^0)$$

$$\delta N_r' = D_1 \left( \left( \frac{hz}{2} - \omega_2 \right) (\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta)' - (1 - \mu) \frac{\delta\epsilon_r^0 - \delta\epsilon_\theta^0}{r} \right),$$

получающиеся из второго уравнения (3.6) при учете соотношений (3.5) и (3.10) во второе уравнение (3.8). Получим

$$\delta Q_r = D_1 \left( \frac{hz}{2} - \omega_2 \right) (\delta\kappa_r + \delta\kappa_\theta)'. \quad (4.7)$$

Подстановка в это равенство выражений (3.9), в которых функция  $\varphi$  представлена в виде (4.4), а также использование выражения для  $\lambda$  (4.1) позволяет окончательно получить

$$\delta Q_r = -\frac{C_1 G h^2 z}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2 G h}\right) \left(\frac{U_1}{R}\right)^2 J_1\left(\frac{U_1 r}{R}\right). \quad (4.8)$$

Величина  $\delta r$  может быть найдена из условия (3.15) с помощью второй формулы (4.4).

Если принимается концепция “фиксированного фазового состава” (КФФС) [3, 4], то при переходе в смежную форму равновесия ДФП не происходит. Значения вариаций усилий и моментов, а также величину критического усилия, характерные для решения задачи в такой постановке, можно получить, формально положив в полученных выше формулах  $z = -1$ . В результате, согласно соотношениям (3.7) получится  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ , в формулах для вариаций усилий и моментов (3.6) останутся лишь “упругие” слагаемые, а формула (4.6) для критической силы перейдет в зависимость, характерную для упругой круглой пластины [10, 11], в которой учитывается переменность цилиндрической жесткости  $D(q)$  при фазовом переходе:

$$p = \frac{D(q) U_i^2}{h R^2}. \quad (4.9)$$

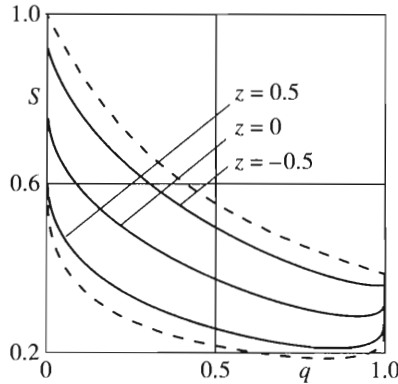
Согласно соотношениям (4.1) в этом решении  $\lambda = Eh/(1 - \mu)$ , и из равенства (4.8) получается

$$\delta Q_r = \frac{C_1 G h^2}{1 - \mu} \left(\frac{U_i}{R}\right)^2 J_1\left(\frac{U_i r}{R}\right). \quad (4.10)$$

Поэтому переход в смежную форму равновесия без ДФП может происходить в рамках системы определяющих соотношений (1.1)–(1.5) лишь при наличии возмущений внешней нагрузки. Можно показать, что благодаря вариациям внешних поверхностных усилий (4.10) и торцевой нагрузки  $\delta r$  в пластине возникает дополнительное напряженное состояние, вариация интенсивности которого отрицательна в каждой точке сечения и равна нулю на его нижней границе.

Необходимо отметить, что к тому же выражению для критического усилия (4.9) можно прийти, решая задачу устойчивости в рамках системы (1.1)–(1.5), при условии, что параметр материала  $k$  равен нулю, т.е. по принятой ранее терминологии [12] при решении задачи в несвязной постановке. В этом последнем случае при переходе в смежную форму равновесия ДФП в принципе не может иметь места, соотношение (3.5) теряет смысл и не входит в систему уравнений задачи. Для существования такого решения нет необходимости в вариациях внешней нагрузки типа (4.7), (4.8), поскольку уравнения для деформации срединной плоскости и соответствующих усилий имеет нулевое решение, допустимое, если в систему уравнений не входит соотношение (3.5). Таким образом, решения задачи устойчивости в рамках КФФС и в несвязной постановке, являясь по сути различными, приводят к одному и тому же значению критической силы (4.9), являющемуся максимальным из всех возможных значений, получающихся при решении задачи при условии, что величина  $z$  не зависит от  $r$ .

Ниже будет рассмотрен альтернативный случай наименьшей возможной критической нагрузки, получающейся при  $z = 1$ . Он соответствует концепции “продолжающегося нагружения” (КПН) [3, 4], в рамках которой при переходе в смежную форму равновесия все точки сечения испытывают ДФП. В этом случае, согласно соотношениям (3.7),



Фиг. 1

$\omega_1(p, z, q) = \omega(p, q)$  и критическая нагрузка зависит только от параметра фазового состава:

$$p = \frac{D(q)U_i^2}{hR^2}(1 - \omega(p, q)).$$

Данное решение не противоречит уравнению равновесия для мембранных усилий (3.8) только при наличии возмущения поверхностной нагрузки  $\delta Q_r$ , определяемого с помощью соотношения (4.7) при  $z = 1$ ,  $\omega_2(q, z) = h\omega(q)/2$ . Можно показать, что для случая свободного опирания в рамках данного решения граничное условие (3.15) удовлетворяется при равных нулю вариациях торцевой нагрузки:  $\delta p = 0$ . Действительно, из соотношений (3.7) легко получить, что при  $z = 1$  выполняется равенство  $\omega_1 = 2\omega_2/(hz)$ . Тогда при учете соотношения (4.2) из условия (3.14) следует, что левая часть соотношения (3.15) равна нулю, откуда и получается доказываемое утверждение.

Значения критических сил, получаемых для промежуточных значений  $z \in (-1, 1)$ , лежат между решениями в рамках КПН и КФФС. Этот факт иллюстрируется на фиг. 1 для случая защемления пластины при относительном значении ее радиуса  $R/h = 20$ ; приведены зависимости от  $q$  безразмерных критических усилий  $S$ , отнесенных к критической нагрузке  $p = U_1^2 D(0)/(hR^2)$  при изотермической потере устойчивости упругой пластины с аустенитными значениями модулей, для КПН (нижняя штриховая кривая), разных значений  $z$  и для КФФС (верхняя штриховая кривая). Этот и все дальнейшие расчеты произведены для следующих значений параметров материала, характерных для никелида титана:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = 0.48, \quad \mu_2 = 0.33, \quad k^*E_2 = 480, \quad \frac{\sigma_{(1)}}{E_2} = 0.049, \quad a_0 = 0.718.$$

Критическая нагрузка, соответствующая потере устойчивости  $p^*$  для каждого значения  $z$ , может быть определена по приведенным кривым как ордината точки минимума. Интересно отметить, что только для верхней кривой, полученной в рамках КФФС, наименьшее значение критической нагрузки соответствует  $q = 1$ , т.е. потеря устойчивости происходит в полностью мартенситном фазовом состоянии, соответствующем минимальному значению модулей упругих модулей. Для  $-1 < z \leq 1$  минимум на кривых  $p = p(q)$  достигается для значений  $0.5 < q^* < 1$ . Расположение минимума определяется, с одной стороны,

точкой  $q = 0.5$ , где максимальна скорость изменения параметра фазового состава, а значит, и максимальна скорость фазовой деформации, а с другой – точкой  $q = 1$ , где минимальны упругие модули. Поэтому в случае неучета ДФП минимальное значение критической нагрузки соответствует точке  $q = 1$  (верхняя кривая). Если же в полученных выше формулах положить  $E_1 = E_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ , т.е. не учитывать переменность упругих модулей, то все кривые для  $-1 < z \leq z$  будут иметь минимум при  $q = 0.5$ . Необходимо отметить, что согласно экспериментальным данным [1] потеря устойчивости при прямом превращении никогда не происходит при  $q = 1$ , а всегда наблюдается в некоторой промежуточной точке фазового перехода.

**5. Точное решение задачи устойчивости при отсутствии возмущений внешней нагрузки.** В соответствии с зависимостью (4.7) или (4.8) существует решение рассматриваемой задачи устойчивости, в котором координата границы зоны ДФП не зависит от  $r$  и при этом уравнение равновесия для мембранных усилий удовлетворяется при нулевых правых частях, т.е. при нулевых вариациях внешних нагрузок. Для этого решения должны выполняться соотношения

$$\omega_2(q, z) = hz/2, \quad \lambda = -2G(q)h, \quad (5.1)$$

обеспечивающие равенство нулю величины  $\delta Q_r$ . Можно показать, что для защемленной пластины при выполнении соотношений (5.1) будет равна нулю также вариация торцевого сжимающего усилия  $\delta p$ . Действительно, для величины  $\delta p = -\delta N_r(R)/h$  исходя из второго соотношения (3.6) при учете равенств (3.5), (5.1) и (4.2) можно получить

$$\delta p = D_1(1 - \mu)\delta\phi(R)/(hR).$$

Отсюда следует, что для защемленной пластины в силу краевого условия (3.13)  $\delta p = 0$ . Необходимо отметить, что для свободно опертой пластины при выполнении условия (5.1) будут равны нулю величины  $\delta Q_r$ , однако отличны от нуля величины

$$\delta p = C_1 D_1(1 - \mu)\delta\phi(R)J_1(\alpha R)/(hR).$$

Из соотношений (5.1) при учете выражения для  $\omega_2$  (3.7) можно получить уравнение

$$z^2 + 2(1 - 2/\omega)z + 1 = 0. \quad (5.2)$$

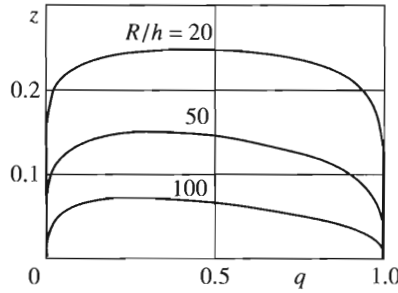
Можно показать, что для значений упругих постоянных, характерных для СПФ типа никелида титана ( $E_2 \geq E_1$ ,  $\mu_2 \leq \mu_1$ ), выполняется условие  $0 < \omega \leq 1$ , и уравнение (5.2) имеет два действительных корня, один из которых превосходит единицу, а другой

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - \omega}}{1 + \sqrt{1 - \omega}} \in [0, 1] \quad (5.3)$$

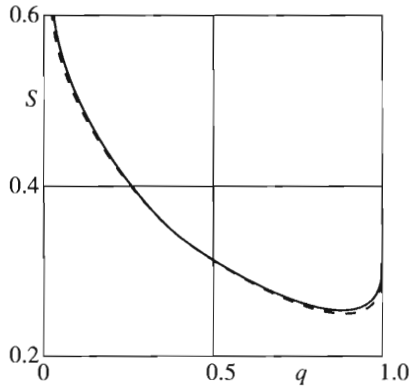
для всех значений  $q \in [0, 1]$ . Выражение (5.3) служит искомым единственным решением поставленной задачи для величины  $z$ . Следует отметить, что в отличие от решений, полученных в предыдущем разделе, в данном случае параметр  $z$  не является постоянной величиной, а обязательно зависит от  $q$ . Из неотрицательности  $z$  (5.3) следует, что в рамках полученного решения зона ДФП  $[-1, z]$  должна занимать большую часть сечения пластины.

Подстановка выражения (5.3) в выражение для  $\omega_1$  (3.7), а результата – в выражения (4.6) для критической силы дает

$$p = \frac{D(q)U_i^2}{hR^2} \frac{4(1 - \omega)}{2 - \omega + 2\sqrt{1 - \omega}}. \quad (5.4)$$



Фиг. 2

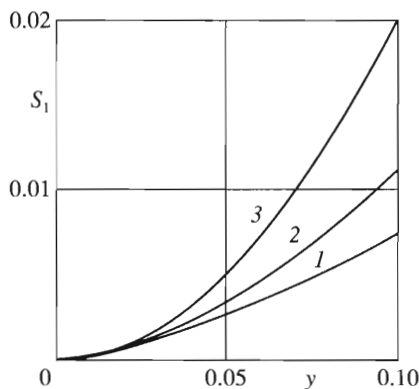


Фиг. 3

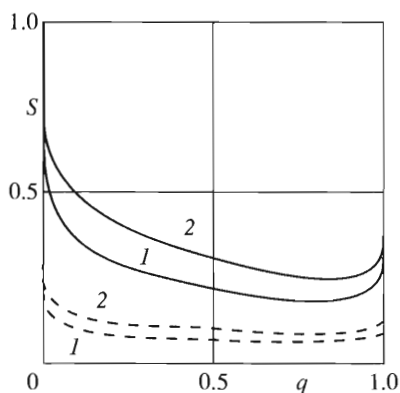
Решение системы уравнений (5.3), (5.4) дает функцию  $z = z(q)$ , графики которой для случая защемления изображены на фиг. 2 при разных значениях  $R/h$ . Видно, что эти графики представляют собой, во всяком случае, для достаточно толстых пластин весьма пологие в своей центральной части кривые, достигающие максимальных значений  $z_1$  в некоторых средних точках  $q = q_1$  интервала  $(0, 1)$ .

Зависимость безразмерного критического усилия  $S$  от  $q$ , полученная при решении той же системы для  $R/h = 20$ , приведена на фиг. 3 (сплошная кривая); штриховой кривой изображена зависимость  $S$  от  $q$ , найденная путем решения задачи (4.6) для  $z = z_1 = \text{const}$ . Согласно данным фиг. 3 абсцисса точки минимума предельной нагрузки по  $q$  не совпадает с абсциссой точки максимума по  $q$  величины  $z$ . Сами же предельные нагрузки  $p^*$ , определяемые из рассматриваемого решения с переменным  $z$  и полученные для постоянного максимального значения  $z = z_1$ , различаются незначительно.

На фиг. 4 представлены зависимости безразмерной критической нагрузки  $S_1 = p^*h^3/(D(1)U_2^2)$ , отнесенной к критической нагрузке изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии, от относительной толщины пластины  $u = h/R$  для случая защемления. Кривая 1 получена в рамках концепции “продолжающегося нагружения”, кривая 2 – в рамках концепции “упругой разгрузки” при нулевых вариациях внешних усилий, кривая 3 – в рамках концепции “фиксированного фазового состава”. Как видно, разница между этими решениями мала для сравнительно тонких пластин и резко возрастает с ростом их толщины. Критическая нагрузка для достаточно толстых пла-



Фиг. 4



Фиг. 5

стин может быть многократно ниже критического усилия, соответствующего изотермической потере устойчивости в мартенситном фазовом состоянии, что не противоречит экспериментальным данным [1].

На фиг. 5 сравниваются между собой зависимости относительных значений предельных нагрузок  $S$  от  $q$  для случаев защемления (сплошные кривые) и свободного опирания (штриховые линии). Все нагрузки отнесены к критическому усилию, соответствующему изотермической потере устойчивости защемленной пластины в аустенитном фазовом состоянии. Кривые 1 получены в рамках концепции “продолжающегося нагружения”, кривые 2 – в рамках концепции “упругой разгрузки”. Согласно фиг. 5 разница между минимальными по  $q$  критическими значениями нагрузок, определяемыми в рамках этих концепций, для случая защемления существенно выше, чем для свободного опирания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00841).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.

2. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость “стойки Шенли” при ползучести или при прямом термоупругом мартенситном превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 1. С. 89–102.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 132–144.
4. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 169–178.
5. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // ПММ. 2004. Вып. 1. С. 60–72.
6. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
7. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
8. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
9. Мовчан А.А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы. Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 136–144.
10. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
11. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
12. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 79–90.

Москва  
e-mail: movchan47@mail.ru

Поступила в редакцию  
27.IV.2004