УДК 539.3

© 2006 г. **Е. И. Рыжак**

ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

На основе и в развитие идей и результатов А.А. Мовчана (ст.), распространяющих на сплошные тела определения и основные общие теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости и неустойчивости, устанавливается критерий неустойчивости положения равновесия одномерного нелинейно-упругого тела под действием потенциальных внешних сил. Для данного простейшего типа распределенной упругой системы (которому, однако, присущ ряд общих свойств распределенных упругих систем, в числе которых неограниченность оператора линейного приближения и дискретность его спектра) сформулирована и доказана теорема о неустойчивости по линейному приближению. Метод доказательства представляет собой вариант метода секторов К.П. Персидского.

С момента опубликования (более ста лет назад) знаменитой работы Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения" исследования в данной области, относящиеся к системам с конечным числом степеней свободы, прямо или косвенно используют (а также развивают) ее результаты, идеи и методы, оказавшиеся чрезвычайно плодотворными.

Что же касается исследований по устойчивости распределенных систем (систем с бесконечным числом степеней свободы), то они в большинстве случаев (включая и предыдущие работы автора) игнорируют как теорию устойчивости Ляпунова, так и существующие (но недостаточно известные) ее обобщения на системы такого типа [1–9]. Как правило, упомянутые исследования опираются на общепринятые в данной области механики статические или динамические "критерии", адекватность которых строгой теории и вообще представлениям об устойчивости, сложившимся в механике систем с конечным числом степеней свободы, далеко не бесспорна, что дает основания ставить под сомнение их результаты и выводы. Альтернативой всему этому является, по-видимому, рассмотрение задач об устойчивости и неустойчивости распределенных систем на основе соответствующей строгой теории, что и осуществляется в публикуемой статье; конкретно, используется обобщение теории Ляпунова, разработанное А.А. Мовчаном (ст.) [3–5].

Наиболее простым и прозрачным (с точки зрения математического описания) типом распределенных систем являются упругие системы. Консервативные упругие системы (в том числе и распределенные) идеально подходят для применения прямого метода Ляпунова в случае устойчивости: очевидный кандидат на роль функции (функционала) Ляпунова – полная энергия системы, которая в силу уравнений движения сохраняется. Именно таким образом А.А. Мовчаном был придан точный смысл и дано доказательство (в рамках его обобщения теории Ляпунова) теоремы Лагранжа для упругих сплошных тел: достаточное условие устойчивости – определенная положительность полной потенциальной энергии по некоторой специально выбранной норме [5].

Что касается неустойчивости тех же консервативных систем, то в этом случае все намного сложнее и результатов, дающих и обосновывающих эффективные критерии неустойчивости сплошных тел, по сути, нет. Заметим, что доказательства теорем о критериях неустойчивости намного сложнее доказательств теорем о критериях устойчивости и для конечномерных систем (в частности, консервативных). Простым и естественным оказывается лишь весьма частный случай, когда полная потенциальная энергия (отсчитываемая от положения равновесия) определенно отрицательна. Кроме того, Четаевым (с помощью его же известной теоремы) была доказана неустойчивость при наличии отрицательных значений потенциальной энергии в очень специфическом (можно сказать, курьезном) случае, когда потенциальная энергия – однородная функция некоторой степени. Дело в том, что для линейных систем (у которых потенциальная энергия квадратична), этот результат большого интереса не представляет, а нелинейные системы такого рода совершенно нетипичны и даже нереальны (типично наличие знакопеременной квадратичной формы, представляющей собой потенциальную энергию линеаризованной системы, и слагаемых более высоких степеней). А.А. Мовчан [5] приводит вариант доказательства Четаева (с минимальными изменениями) в случае "подходящих" упругих сплошных тел, но, в силу особенностей нелинейной теории упругости, таковых просто не существует.

В общем случае, когда потенциальная энергия конечномерной консервативной системы не является определенно отрицательной, но может принимать отрицательные значения в окрестности положения равновесия, стандартное доказательство неустойчивости никак не использует консервативность, а опирается на общую теорему Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Однако доказательство Ляпунова и его модификации основаны на конечномерности пространства. Что касается двух вариантов теоремы о неустойчивости по линейному приближению, представленных в книге [10], то они хотя и относятся к уравнениям в бесконечномерных пространствах, но по методу доказательства основаны на предположении об ограниченности линейного оператора, что делает невозможным их непосредственное применение в задаче о неустойчивости распределенных упругих систем, где оператор линеаризованной задачи всегда неограничен (это ясно обозначено во введении упомянутой книги).

Таким образом, для распределенных систем, в том числе и консервативных, по-видимому, не существует доказанных результатов типа теоремы Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Этим и определяется актуальность цели публикуемой работы, а именно: сформулировать и доказать теорему о неустойчивости по линейному приближению хотя бы для простейшей нелинейной распределенной консервативной системы – одномерного нелинейно-упругого тела с закрепленными концами. Используемый метод доказательства совершенно иной, чем в классическом доказательстве Ляпунова и чем в доказательствах соответствующих теорем книги [10]; он представляет собой некоторый вариант метода секторов К.П. Персидского [11–13]. Главным условием применимости предлагаемого варианта метода секторов для доказательства сформулированной теоремы является дискретность спектра линейного оператора, что для распределенных упругих систем имеет место и в общем случае.

1. Точные и линеаризованные уравнения движения одномерного упругого тела. Основные предположения о коэффициентах. Энергия тела. Будем рассматривать одномерное упругое тело, занимающее в отсчетной конфигурации отрезок $[0, l]$; точкам тела соответствуют значения переменной $x \in [0, l]$. Смещением тела будем называть скалярнозначную функцию $u(x, t)$, где t – время, предполагаемую дважды непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам. Концы одномерного тела считаются закрепленными:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{1.1}$$

Обозначая производную по t при постоянном x (т.е. материальную производную по времени) точкой над символом, а производную по x при постоянном t – нижним индексом x, примем для тела следующее уравнение движения (уравнение импульса):

$$\mu(x)\ddot{u}(x, t) = \left(p(x)u_x(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial u_x}(x, u_x(x, t))\right)_x + q(x)u(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x, u(x, t)). \tag{1.2}$$

По предположению, функции $\mu(x)$ и $q(x)$ непрерывны, а $p(x)$ – дифференцируема на отрезке $[0, l]$ и все три функции положительны. Функция $\psi(x, u_x)$ обладает, по предположению, следующими свойствами: $\psi(x, 0) = 0$, $\psi(x, u_x)$ дважды дифференцируема по обоим аргументам, причем справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial u_x}(x, u_x)\right| \le C_1|u_x|^{1+\sigma_1}, \tag{1.3}$$

где $C_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$ – постоянные. Из неравенства (1.3) следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_x}(x, 0) = 0.$$

Кроме того, из неравенства (1.3) легко вывести неравенство

$$|\psi(x, u_x)| \le \frac{C_1}{2+\sigma_1}|u_x|^{2+\sigma_1}. \tag{1.4}$$

Предполагаемые свойства функции $\varphi(x, u)$ аналогичны: $\varphi(x, 0) = 0$, она дифференцируема по второму аргументу, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u)\right| \le C_2|u|^{1+\sigma_2}; \quad C_2 > 0; \quad \sigma_2 > 0 \tag{1.5}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, 0) = 0.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$|\varphi(x, u)| \le \frac{C_2}{2+\sigma_2}|u|^{2+\sigma_2}. \tag{1.6}$$

Если в уравнении (1.2) положить равными нулю слагаемые, содержащие функции ψ и φ, то получим линеаризованное уравнение

$$\mu(x)\ddot{u}(x, t) = (p(x)u_x(x, t))_x + q(x)u(x, t) \tag{1.7}$$

в правой части которого стоит оператор, противоположный по знаку оператору Штурма–Лиувилля.

Заметим, что механической системе, порождающей уравнение импульса (1.2), может быть придан двоякий смысл: 1) одномерное упругое тело, и тогда $u(x, t)$ – одномерное (продольное) смещение; 2) струна, и в этом случае $u(x, t)$ – поперечное смещение. В обоих случаях $\mu(x)$ – погонная плотность, слагаемое, зависящее от u_x – упругое напряжение, а зависящее от u – распределенная потенциальная внешняя сила (в данном случае, в силу положительности $q(x)$, – отталкивающая от положения равновесия и вызывающая неустойчивость).

Обозначая интегрирование по отрезку $[0, l]$ угловыми скобками, а также обозначая поле скоростей $\dot{u}(x, t)$ через $\upsilon(x, t)$, запишем полную энергию тела $e\{u, \upsilon\}$, которая, как легко видеть, сохраняется при его движении:

$$e\{u, \upsilon\} = \frac{1}{2}\langle\mu\upsilon^2\rangle + \frac{1}{2}\langle pu_x^2 + \psi\rangle - \frac{1}{2}\langle qu^2 + \varphi\rangle; \quad \dot{e}\{u, \upsilon\} = 0. \tag{1.8}$$

Будем рассматривать поля смещений, скоростей и другие непрерывные функции на отрезке $[0, l]$ как элементы гильбертова пространства со скалярным произведением

$$u\tilde{u} \equiv \langle\mu u \cdot \tilde{u}\rangle. \tag{1.9}$$

Введя линейный оператор A (назовем его обобщенным оператором Штурма–Лиувилля) и нелинейный оператор f равенствами

$$Au \equiv -\frac{1}{\mu}(pu_x)_x - \frac{1}{\mu}qu, \quad f\{u\} \equiv \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_x}\right)_x + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \tag{1.10}$$

запишем уравнение движения как систему двух уравнений

$$\dot{u} = \upsilon, \quad \dot{\upsilon} = -Au + f\{u\}. \tag{1.11}$$

Очевидно, что пара нулевых полей $u(x, t) = 0$, $\upsilon(x, t) = 0$ представляет собой нулевое решение (иначе говоря, положение равновесия) системы уравнений (1.11). Неустойчивость именно этого положения равновесия и является предметом рассмотрения в работе.

Заметим, что оператор A симметричен относительно введенного скалярного произведения на функциях, которые дважды дифференцируемы по x и принимают нулевые значения на концах отрезка:

$$\tilde{u} \cdot Au = u \cdot A\tilde{u}. \tag{1.12}$$

Линеаризованная система уравнений движения имеет вид

$$\dot{u} = \upsilon, \quad \dot{\upsilon} = -Au, \tag{1.13}$$

а энергия тела может быть представлена так:

$$e\{u, \upsilon\} = \frac{1}{2}\upsilon \cdot \upsilon + \frac{1}{2}u \cdot Au + \frac{1}{2}\Psi\{u\}, \quad \Psi\{u\} \equiv \langle\psi\rangle - \langle\varphi\rangle. \tag{1.14}$$

2. Известные спектральные свойства оператора A. Определение оператора B и оценки сверху и снизу для его квадратичной формы. Спектральные и связанные с ними свойства обобщенного оператора Штурма–Лиувилля хорошо известны. Перечислим те из них, которые используются в дальнейших построениях. Оператор A полуограничен снизу, имеет действительный дискретный спектр $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$), причем $\lim a_n = +\infty$ при $n \to \infty$. Будем считать, что собственные числа (СЧ) занумерованы в порядке неубывания: $a_1 \le a_2 \le \ldots$. Имеется ортонормированная система собственных функций (СФ) $\{g_n\}$:

$$Ag_n = a_n g_n, \quad g_i \cdot g_j = \delta_{ij}. \tag{2.1}$$

Заметим, что линейная оболочка любого конечного набора СФ, скажем, $\mathrm{span}(g_1, \ldots g_n)$, является инвариантным подпространством оператора, что верно и для ортогонального (в смысле введенного скалярного произведения) дополнения к ней $\mathrm{span}(g_1, \ldots, g_n)^{\perp}$.

В силу известного вариационного описания СЧ и СФ справедливы следующие неравенства:

$$u \cdot Au \ge a_{n+1} u \cdot u, \quad \forall u \in \mathrm{span}(g_1, \ldots g_n)^{\perp}. \tag{2.2}$$

Имея в виду принципиальную осуществимость дальнейших обобщений, не будем исключать возможности наличия кратных (конечной кратности) СЧ оператора A.

Будем считать, что первые m СЧ оператора A отрицательны, следующие m' СЧ равны нулю, а все остальные СЧ положительны:

$$\begin{aligned} &a_i < 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &a_j = 0, \quad j = m+1, \ldots, m+m' \\ &a_k > 0, \quad k = m+m'+1, \ldots, \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для удобства дальнейшей записи введем диадные операторы, в обычном смысле соответствующие скалярному произведению (1.9):

$$(g \otimes h)u \equiv g(h \cdot u). \tag{2.4}$$

Построим по заданному оператору A определенно положительный оператор B, имеющий те же СФ и строго положительный спектр. Пусть $b_0 > 0$ – некоторое пока произвольное положительное число, для которого в дальнейшем будут приняты некоторые ограничения. Зададим оператор B следующим равенством:

$$B \equiv \sum_{i=1}^{m} 2|a_i| g_i \otimes g_i + \sum_{j=m+1}^{m+m'} b_0 g_j \otimes g_j + A. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} &Bg_i = b_i g_i, \quad b_i = |a_i| > 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &Bg_j = b_j g_j, \quad b_j = b_0 > 0, \quad j = m+1, \ldots, m+m' \\ &Bg_k = b_k g_k, \quad b_k = a_k > 0, \quad k = m+m'+1, \ldots, \infty. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, оператор B отличается от оператора A на конечномерный оператор, определенно положительный в своем подпространстве $\mathrm{span}(g_1, \ldots, g_{m+m'})$; на бесконечномерном подпространстве $\mathrm{span}(g_1, \ldots, g_{m+m'})^{\perp}$ операторы B и A действуют одинаково.

Пользуясь тем, что для каждого из операторов конечномерное подпространство $\mathrm{span}(g_1, \ldots g_{m+m'})$ и бесконечномерное подпространство $\mathrm{span}(g_1, \ldots, g_{m+m'})^{\perp}$ инвариантны, и учитывая неравенство (2.2), легко доказать оценку снизу для квадратичной формы оператора B, уточняющую характер ее определенной положительности:

$$u \cdot Bu \geq b_{\min} u \cdot u; \quad b_{\min} \equiv \min(|a_m|, b_0, a_{m+m'+1}) > 0. \tag{2.7}$$

Однако для дальнейшего анализа нужны еще две оценки (сверху и снизу) этой квадратичной формы в терминах величины $\langle u_x^2 \rangle$. Получим эти оценки, предварительно введя следующие обозначения:

$$\underline{\chi} \equiv \min_x \chi(x), \quad \bar{\chi} \equiv \max_x \chi(x); \quad \chi = \mu, p, q; \quad \Theta \equiv \bar{q}/\underline{\mu}.$$

Начнем с более простой оценки – сверху:

$$\begin{aligned} &u \cdot Bu \leq \max(2|a_1|, b_0) u \cdot u + u \cdot Au \leq \bar{\mu} \max(2|a_1|, b_0) \langle u^2 \rangle + \langle p u_x^2 \rangle \leq \\ &\leq (\bar{\mu} l^2 \max(2|a_1|, b_0) + \bar{p}) \langle u_x^2 \rangle \equiv \bar{C} \langle u_x^2 \rangle. \end{aligned}$$

Для получения оценки снизу сначала рассмотрим операторы

$$\tilde{A} = A + \Theta I, \quad \tilde{B} = B + \Theta I; \quad Iu = u, \quad \tilde{B} = \tilde{A} + (B - A).$$

Оператор $\tilde{B}$ имеет те же СФ, что и B, а для его квадратичной формы имеем оценку снизу

$$u \cdot \tilde{B} u \geq u \cdot \tilde{A} u = \langle p u_x^2 \rangle + \langle (\Theta \mu - q) u^2 \rangle \geq \underline{p} \langle u_x^2 \rangle. \tag{2.8}$$

С другой стороны, имеем

$$u \cdot \tilde{B} u = u \cdot Bu + \frac{\Theta}{b_{\min}} b_{\min} u \cdot u \leq \left(1 + \frac{\Theta}{b_{\min}}\right) u \cdot Bu \equiv N u \cdot Bu. \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.8), (2.9) получаем

$$\underline{C}\langle u_x^2\rangle \equiv \frac{p}{N}\langle u_x^2\rangle \le \frac{1}{N}u\cdot\tilde{B}u \le u\cdot Bu.$$

Таким образом, имеем оценки сверху и снизу

$$\underline{C}\langle u_x^2\rangle \le u\cdot Bu \le \bar{C}\langle u_x^2\rangle. \tag{2.10}$$

3. Пространство пар "смещения–скорости" (фазовое пространство). Эквивалентные системы уравнений (нелинейная и линеаризованная) в фазовом пространстве; линейный оператор линеаризованной системы и специальное скалярное произведение. Специальная норма. Введем фазовое (действительное) линейное пространство, т.е. пространство пар

$$\mathbf{w}(x,t) = \left\| \begin{matrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{matrix} \right\|; \quad q_1\mathbf{w}_1 + q_2\mathbf{w}_2 \equiv \left\| \begin{matrix} q_1u_1(x,t) + q_2u_2(x,t) \\ q_1v_1(x,t) + q_2v_2(x,t) \end{matrix} \right\|.$$

Тогда нелинейная система уравнений (1.11) примет вид

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathcal{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}\{\mathbf{w}\}; \quad \mathcal{A}\mathbf{w} \equiv \mathcal{A}\left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v \\ -Au \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{f}\{\mathbf{w}\} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ f\{u\} \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

Оператор $\mathcal{A}$, действующий на пространстве пар, можно представить и в виде условной матрицы

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где I – тождественный оператор в исходном функциональном пространстве.

Линеаризованная система уравнений (1.13) получается отбрасыванием слагаемого $\mathbf{f}\{\mathbf{w}\}$:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathcal{A}\mathbf{w}. \tag{3.2}$$

Очевидно, что свойства оператора $\mathcal{A}$ порождаются свойствами оператора A. Рассмотрим некоторые из них. Прежде всего заметим, что каждое собственное одномерное подпространство оператора A, натянутое на СФ g_i, порождает двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$, натянутое на пару векторов $\mathbf{g}_i^u \equiv \left\| \begin{matrix} g_i \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и $\mathbf{g}_i^v \equiv \left\| \begin{matrix} 0 \\ g_i \end{matrix} \right\|$. Действительно, пусть

$$\mathbf{w} = u_i\mathbf{g}_i^u + v_i\mathbf{g}_i^v = \left\| \begin{matrix} u_ig_i \\ v_ig_i \end{matrix} \right\|. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{w} = \left\| \begin{matrix} v_ig_i \\ -u_iAg_i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v_ig_i \\ -a_iu_ig_i \end{matrix} \right\| = v_i\mathbf{g}_i^u - a_iu_i\mathbf{g}_i^v. \tag{3.4}$$

При этом особенности действия оператора $\mathcal{A}$ на этих двумерных подпространствах различны в зависимости от знака СЧ a_i.

Если $a_i < 0$, то имеем

$$-a_i = |a_i| \equiv \alpha_i^2, \quad \alpha_i > 0 \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i^{\pm} \equiv \mathbf{g}_i^u \pm \alpha_i \mathbf{g}_i^{\upsilon}, \quad \mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}_i^{\pm} = \pm\alpha_i \boldsymbol{\gamma}_i^{\pm}. \tag{3.6}$$

Значит, в этом случае двумерное инвариантное подпространство распадается в прямую сумму двух одномерных собственных подпространств, натянутых на собственные векторы (СВ) $\boldsymbol{\gamma}_i^+$ (с СЧ α_i) и $\boldsymbol{\gamma}_i^-$ (с СЧ $-\alpha_i$). Заметим, что этим собственным подпространствам соответствуют экспоненциальные по времени решения линеаризованной системы

$$\mathbf{w}_i^{\pm}(x, t) = u_{i0}^{\pm} e^{\pm\alpha_i t} \boldsymbol{\gamma}_i^{\pm}, \tag{3.7}$$

где u_{i0}^+, u_{i0}^- – произвольные числа. Решения с возрастающей экспонентой свидетельствуют о неустойчивости линеаризованной системы (каким бы образом эта неустойчивость ни была определена), но сами по себе еще ничего не говорят о неустойчивости нелинейной системы.

Если $a_i = 0$, то для $\mathbf{w}$ (3.3) имеем

$$\mathcal{A}\mathbf{w} = \upsilon_i \mathbf{g}_i^u; \quad \mathcal{A}\mathbf{g}_i^u = 0, \quad \mathcal{A}\mathbf{g}_i^{\upsilon} = \mathbf{g}_i^u. \tag{3.8}$$

Решения линеаризованной системы здесь имеют вид

$$\mathbf{w}_i(x, t) = (u_{i0} + \upsilon_{i0} t)\mathbf{g}_i^u + \upsilon_{i0}\mathbf{g}_i^{\upsilon}$$

и при $\upsilon_{i0} \neq 0$ тоже уходят от положения равновесия.

Если $a_i > 0$, то имеется пара чисто мнимых корней характеристического уравнения, а одномерных инвариантных подпространств нет (напомним, что все введенные пространства – действительные); соответствующие решения – колебательные (линейные комбинации синусов и косинусов):

$$\begin{gathered}\omega_i \equiv \sqrt{a_i}, \quad \mathcal{A}\mathbf{g}_i^u = -\omega_i^2 \mathbf{g}_i^{\upsilon}; \quad \mathcal{A}\mathbf{g}_i^{\upsilon} = \mathbf{g}_i^u \\ \mathbf{w}_i(x, t) = \left(u_{i0}\cos\omega_i t + \frac{\upsilon_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t\right)\mathbf{g}_i^u + (\upsilon_{i0}\cos\omega_i t - \omega_i u_{i0}\sin\omega_i t)\mathbf{g}_i^{\upsilon}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Эти решения остаются в окрестности положения равновесия.

Введем в фазовом пространстве некоторое специальное скалярное произведение, связанное с оператором B, а через него – с оператором A и его СФ:

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}' \equiv \left\| \begin{matrix} u \\ \upsilon \end{matrix} \right\| \bullet \left\| \begin{matrix} u' \\ \upsilon' \end{matrix} \right\| \equiv u \cdot Bu' + \upsilon \cdot \upsilon'. \tag{3.10}$$

Все свойства скалярного произведения очевидным образом следуют из доказанных ранее свойств оператора B и его квадратичной формы. Заметим, что скалярный квадрат $\mathbf{w}$ содержит в качестве одного из слагаемых удвоенную полную энергию линеаризованной системы:

$$B = -2A^- + b_0 I^0 + A = -A^- + b_0 I^0 + A^+; \quad A^- \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i g_i \otimes g_i$$

$$I^0 = \sum_{i=m+1}^{m+m'} g_i \otimes g_i; \quad A = A^- + A^+.$$

Имеем

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = u \cdot Au + v \cdot v - 2u \cdot A^{-}u + b_0 u \cdot I^0 u, \tag{3.11}$$

причем дополнительные слагаемые связаны только с подпространством $\mathrm{span}(\mathcal{W}_1, \ldots \mathcal{W}_{m+m'})$, соответствующим неположительным СЧ; здесь

$$\mathcal{W}_i \equiv \mathrm{span}(\mathbf{g}_i^u, \mathbf{g}_i^v). \tag{3.12}$$

Для дальнейшего понадобится разбиение оператора $\mathcal{A}$ на симметричную и антисимметричную части по отношению к введенному скалярному произведению в фазовом пространстве. Для этого найдем $\mathcal{A}^T\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}'' \equiv \mathcal{A}^T\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{w}' \bullet \mathcal{A}^T\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}' \bullet \mathbf{w}'' = \mathbf{w} \bullet \mathcal{A}\mathbf{w}', \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}'$$

$$\mathcal{A}\mathbf{w}' = \left\| \begin{matrix} v' \\ -Au' \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{w} \bullet \mathcal{A}\mathbf{w}' = u \cdot Bv' - v \cdot Au' = u' \cdot (-Av) + v' \cdot Bu = u' \cdot Bu'' + v' \cdot v''.$$

Тогда

$$v'' = Bu, \quad Bu'' = -Av. \tag{3.13}$$

На каждом из трех подпространств

$$\mathrm{span}(g_1, \ldots g_m) \equiv U^-, \quad \mathrm{span}(g_{m+1}, \ldots g_{m+m'}) \equiv U^0, \quad \mathrm{span}(g_1, \ldots g_{m+m'})^{\perp} \equiv U^+$$

второе уравнение (3.13) принимает вид

$$-A(u'')^- = -Av^- \Rightarrow (u'')^- = v^-, \quad b_0(u'')^0 = 0 \Rightarrow (u'')^0 = 0, \quad A(u'')^+ = -Av^+ \Rightarrow (u'')^+ = -v^+.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{A}^T\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}'' = \left\| \begin{matrix} u'' \\ v'' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v^- - v^+ \\ Bu \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v^- \\ -Au^- \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ b_0u^0 \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} v^+ \\ -Au^+ \end{matrix} \right\| \tag{3.14}$$

$$\mathcal{A}^s = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T), \quad \mathcal{A}^s\mathbf{w} \equiv \mathcal{A}^s \left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v^- + v^0/2 \\ -Au^- + b_0u^0/2 \end{matrix} \right\| \tag{3.15}$$

$$\mathcal{A}^a = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^T), \quad \mathcal{A}^a\mathbf{w} = \left\| \begin{matrix} v^+ + v^0/2 \\ -Au^+ - b_0u^0/2 \end{matrix} \right\|. \tag{3.16}$$

Из соотношений (3.15), (3.16) видно, что операторы $\mathcal{A}^s$ и $\mathcal{A}^a$ “сцеплены” только на подпространстве $\mathcal{W}^0$, порождаемом нулевым подпространством оператора A, и при его отсутствии они “расцеплены”. На конечномерном подпространстве $\mathcal{W}^-$ (соответственно, на бесконечномерном подпространстве $\mathcal{W}^+$), порождаемом СФ оператора A с отрицательными (соответственно, положительными) СЧ, оператор $\mathcal{A}$ симметричен (соответственно, антисимметричен). На конечномерном подпространстве $\mathcal{W}^0$ оператор $\mathcal{A}$ имеет как симметричную, так и антисимметричную части. Для каждого из операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^s$ и $\mathcal{A}^a$ подпространства $\mathcal{W}^-$, $\mathcal{W}^0$ и $\mathcal{W}^+$ – инвариантные; для ограничений упомянутых операторов на эти подпространства введем в их обозначения дополнительный верхний индекс, принимающий значения –, 0 или + соответственно. При этом

$$\mathscr{A}^{-} = \mathscr{A}^{s-}, \quad \mathscr{A}^{a-} = 0; \quad \mathscr{A}^{+} = \mathscr{A}^{a+}, \quad \mathscr{A}^{s+} = 0; \quad \mathscr{A}^{0} = \mathscr{A}^{s0} + \mathscr{A}^{a0}. \tag{3.17}$$

Для дальнейшего анализа введем в фазовом пространстве специальную норму, которая мажорирует норму, порождаемую скалярным произведением:

$$|\mathbf{w}|^2 \equiv \bar{C} l \sup(u_x^2) + v \cdot v \tag{3.18}$$

$$\underline{C}\langle u_x^2\rangle + v \cdot v \le \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = u \cdot Bu + v \cdot v \le \bar{C}\langle u_x^2\rangle + v \cdot v \le |\mathbf{w}|^2, \tag{3.19}$$

где супремум берется по $x \in [0, l]$. Неустойчивость, устанавливаемая в работе – это, прежде всего, неустойчивость именно по норме (3.18), хотя в дальнейшем из этой неустойчивости выводится неустойчивость в несколько ином смысле (в большей степени соответствующем традициям и духу теории упругости и вообще механики деформируемого твердого тела).

4. Первое определение неустойчивости. Функционал Ляпунова и доказательство неустойчивости. Будем рассматривать неустойчивость положения равновесия (нулевого решения) системы (1.11) с нулевыми граничными условиями.

Определение. Положение равновесия $\mathbf{w} = 0$ называется неустойчивым по Ляпунову в смысле нормы (3.18), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует решение $\mathbf{w}(x, t)$, начальное значение которого удовлетворяет неравенству $|\mathbf{w}(x, 0)| < \delta$, а при некотором значении $t_1 > 0$ выполняется неравенство $|\mathbf{w}(x, t_1)| \ge \varepsilon$.

Такое определение – частный случай известного определения неустойчивости [1, 2]. Неустойчивость положения равновесия одномерного нелинейно-упругого тела будет рассматриваться далее прежде всего в соответствии с данным определением, а затем и в соответствии с несколько другим определением – частным случаем более общего определения А.А. Мовчана [3, 4]. Подчеркнем, что при исследовании неустойчивости будет считаться, что для любого начального состояния

$$\mathbf{w}(x, 0) = \left\| \begin{matrix} u(x, 0) \\ v(x, 0) \end{matrix} \right\|$$

удовлетворяющего граничным условиям и принятым условиям гладкости, существует по крайней мере, одно классическое решение системы (1.11).

Теорема. (О неустойчивости по линейному приближению.) Пусть линейный оператор A, определяемый первым равенством (1.10) и задающий потенциальную энергию одномерного линейно-упругого тела с закрепленными концами под действием линейной распределенной внешней силы, имеет по крайней мере, одно отрицательное СЧ. Тогда положение равновесия соответствующего нелинейно-упругого тела с нелинейной внешней силой (нулевое решение нелинейной системы уравнений движения (1.11)) неустойчиво по Ляпунову по норме (3.18).

Заметим, что предположение теоремы, касающееся оператора A, в терминах потенциальной энергии линеаризованной системы (равной $u \cdot Au/2$) означает наличие отрицательных значений последней на некоторых допустимых (равных нулю при $x = 0$; l) полях смещений.

Доказательство. Введем функционал

$$\eta\{\mathbf{w}\} \equiv \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} + \Psi\{u\} = u \cdot Bu + v \cdot v + \Psi\{u\} = 2e\{\mathbf{w}\} + u \cdot (B - A)u, \tag{4.1}$$

который будем называть функционалом Ляпунова, хотя его свойства совершенно иные, чем свойства традиционного функционала (функции) Ляпунова, используемого в теоремах о неустойчивости.

Почти очевидно (и будет строго показано), что слагаемое $\Psi\{u\}$ сколь угодно мало по сравнению с $\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}$ в достаточно малом шаре $S(\bar{\delta})$, задаваемом неравенством

$$|\mathbf{w}| < \bar{\delta}. \tag{4.2}$$

Действительно, если $\mathbf{w} \neq 0$, а $u = 0$, то $\Psi\{u\} = 0$ и $\Psi\{u\}/\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = 0$. Если же $u \neq 0$, то $u \cdot Bu > 0$ и

$$\begin{gathered}\frac{|\Psi\{u\}|}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} = \frac{|\Psi\{u\}|}{u \cdot Bu}\frac{u \cdot Bu}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} \le \frac{|\Psi\{u\}|}{u \cdot Bu} \le \frac{|\Psi\{u\}|}{\underline{C}\langle u_x^2\rangle} \le \\ \le \frac{C_1}{(2+\sigma_1)\underline{C}}\frac{\langle |u_x|^{2+\sigma_1}\rangle}{\langle u_x^2\rangle} + \frac{C_2}{(2+\sigma_2)\underline{C}}\frac{\langle |u|^{2+\sigma_2}\rangle}{\langle u_x^2\rangle} \le \frac{C_1 l}{(2+\sigma_1)\underline{C}}\sup|u_x|^{\sigma_1} + \frac{C_2 l^{2+\sigma_2}}{(2+\sigma_2)\underline{C}}\sup|u_x|^{\sigma_2}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

В силу определения (3.18)

$$\sup|u_x| \le \frac{|\mathbf{w}|}{\sqrt{\bar{C}l}} < \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{\bar{C}l}}, \quad \frac{|\Psi\{u\}|}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} \le C_3|\mathbf{w}|^{\sigma_1} + C_4|\mathbf{w}|^{\sigma_2}. \tag{4.4}$$

Поскольку, по предположению, σ_1 и σ_2 положительны, то для сколь угодно малого $\xi > 0$ можно выбрать такое $\bar{\delta} > 0$, чтобы в шаре $S(\bar{\delta})$ выполнялись неравенства

$$-\xi < \frac{\Psi\{u\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} < \xi \Leftrightarrow 1 - \xi < \frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} < 1 + \xi \tag{4.5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \xi < 1 - \frac{\xi}{1+\xi} < \frac{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}} < 1 + \frac{\xi}{1-\xi}, \tag{4.6}$$

из которых следует, в частности, что во всех точках шара $S(\bar{\delta})$, отличных от центра, величина $\eta\{\mathbf{w}\}$ положительна и ее логарифм существует.

Введя предварительно функционалы

$$\zeta_\eta\{\mathbf{w}\} = \frac{\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}\mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}} = \frac{\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}}, \quad \zeta\{\mathbf{w}\} = \frac{\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} \tag{4.7}$$

найдем производную величины $(\ln\eta)/2$ в силу уравнений движения

$$\frac{1}{2}(\ln\eta)^{\cdot} = \frac{u \cdot (B-A)\upsilon}{\eta\{\mathbf{w}\}} = \zeta_\eta\{\mathbf{w}\} = \zeta\{\mathbf{w}\}\frac{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}}. \tag{4.8}$$

Здесь использовано постоянство полной энергии тела и равенство

$$\mathbf{w} \cdot \mathcal{A}\mathbf{w} = u \cdot (B-A)\upsilon,$$

которое следует из соотношений (3.1), (3.10) и симметрии операторов A и B.

В соответствии с равенствами (3.17)

$$\mathcal{A}^s = \mathcal{A}^{s-} + \mathcal{A}^{s0} = \mathcal{A}^- + \mathcal{A}^{s0}, \tag{4.9}$$

т.е. на подпространстве $\mathcal{W}^-$ действия операторов $\mathcal{A}^s$ и $\mathcal{A}$ совпадают, на подпространстве $\mathcal{W}^+$ оператор $\mathcal{A}^s$ – нулевой, а на подпространстве $\mathcal{W}^0$ его действие в силу равенства (3.15) таково:

$$\mathcal{A}^s\left\| \begin{matrix} u^0 \\ v^0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} v^0 \\ b_0 u^0 \end{matrix} \right\|.$$

Найдем значения функционала $\zeta_\eta\{\mathbf{w}\}$ на лежащих в шаре $S(\bar\delta)$ векторах $\mathbf{w}_1^+$, коллинеарных вектору $\boldsymbol{\gamma}_1^+$ (это СВ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^s$ с СЧ $\alpha_1 = \sqrt{-a_1}$):

$$\zeta_\eta\{\mathbf{w}_1^+\} = \alpha_1\frac{\mathbf{w}_1^+ \bullet \mathbf{w}_1^+}{\eta\{\mathbf{w}_1^+\}} > \alpha_1(1-\xi). \tag{4.10}$$

Таким образом, в достаточно малом шаре $S(\bar\delta)$ значения $\zeta_\eta\{\mathbf{w}_1^+\}$ сколь угодно мало отличаются от α_1 и ограничены снизу числом $\alpha_1(1-\xi)$. Выберем некоторое положительное число $\tilde\alpha$, удовлетворяющее неравенству

$$0 < \tilde\alpha < \alpha_1(1-\xi) \tag{4.11}$$

и назовем псевдоконусом $\Omega^p(\tilde\alpha)$ множество ненулевых векторов $\mathbf{w}$, для которых

$$\tilde\alpha < \zeta_\eta\{\mathbf{w}\}. \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.10) и (4.11) видно, что пересечение псевдоконуса $\Omega^p(\tilde\alpha)$ и шара $S(\bar\delta)$ непусто. Очевидно, что

$$\zeta_\eta\{\mathbf{w}\} = 0 < \tilde\alpha, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{W}^+. \tag{4.13}$$

В силу непрерывности этого функционала он в пересечении псевдоконуса и шара принимает всевозможные значения α, удовлетворяющие неравенствам $\tilde\alpha < \alpha \le \alpha_1(1-\xi)$, причем граница псевдоконуса $\partial\Omega^p(\tilde\alpha)$ – это $\mathbf{w} = 0$ и те ненулевые векторы $\mathbf{w}$, для которых

$$\zeta_\eta\{\mathbf{w}\} = \tilde\alpha. \tag{4.14}$$

Граница псевдоконуса $\partial\Omega^p(\tilde\alpha)$ разбивает шар $S(\bar\delta)$ на две части:

$$\Omega^p(\tilde\alpha) \cap S(\bar\delta) \text{ и } S(\bar\delta)\backslash(\Omega^p(\tilde\alpha) \cap S(\bar\delta)).$$

Если непрерывная кривая $\mathbf{w}(t)$ берет начало в первой из них и при каком-то значении t, не выходя из шара, попадает во вторую, то она неизбежно пересекает границу $\partial\Omega^p(\tilde\alpha)$ (прохождение через вершину $\mathbf{w} = 0$ в дальнейшем будет исключено).

Покажем прежде всего, что если некоторое решение $\mathbf{w}(t)$ принимает ненулевое начальное значение $\mathbf{w}(0) \in \Omega^p(\tilde\alpha) \cap S(\bar\delta)$ и не выходит за пределы псевдоконуса, то оно при некотором $t = t_1$ выходит на границу шара $|\mathbf{w}| = \bar\delta/2$. Предположим обратное, т.е. что $\mathbf{w}(t) \in S(\bar\delta/2)$, $\forall t$. Тогда

$$\frac{1}{2}(\ln\eta)^\cdot > \tilde\alpha \Rightarrow \eta(t) > \eta(0)e^{2\tilde\alpha t}$$

$$(1-\xi)\eta\{\mathbf{w}\} < \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} \le |\mathbf{w}|^2 \Rightarrow (1-\xi)\eta(0)e^{2\tilde\alpha t} < |\mathbf{w}(t)|^2.$$

Заметим, что отсюда следует упоминавшаяся выше невозможность прохождения рассматриваемого решения через вершину псевдоконуса.

Если бы при всех $t > 0$ решение оставалось внутри шара $S(\bar{\delta}/2)$, то всегда было бы справедливо неравенство

$$(1-\xi)\eta(0)e^{2\tilde{\alpha}t} < \bar{\delta}^2/4,$$

что невозможно. Значит, при некотором значении $t = t_1$

$$|\mathbf{w}(t_1)| = \bar{\delta}/2. \quad (4.15)$$

Но это как раз и означает неустойчивость по Ляпунову, так как можно взять такое $\mathbf{w}(0) \neq 0$, чтобы было

$$0 < |\mathbf{w}(0)| < \delta, \quad (4.16)$$

где δ – сколь угодно малое число. При этом

$$\eta(0) > (1-\xi)\mathbf{w}(0) \bullet \mathbf{w}(0) > 0. \quad (4.17)$$

Беря $\varepsilon = \bar{\delta}/2$, получаем полное соответствие определению неустойчивости.

Таким образом, остается (и это самое главное) доказать, что решение, оставаясь внутри достаточно малого шара, действительно не выйдет за пределы хотя бы одного подходящего псевдоконуса, что будет означать, что множество $\Omega^p(\tilde{\alpha}) \cap S(\bar{\delta})$ – сектор [11].

Прежде всего покажем, что часть границы псевдоконуса $\Omega^p(\tilde{\alpha})$, лежащая внутри достаточно малого шара, заключена между границами двух сколь угодно мало различающихся конусов $\Omega(\tilde{\alpha}(1-\xi))$ и $\Omega(\tilde{\alpha}(1+\xi))$; под конусом $\Omega(\beta)$ здесь понимается множество таких ненулевых векторов $\mathbf{w}$, для которых

$$\beta < \zeta\{\mathbf{w}\}. \quad (4.18)$$

Граница $\partial\Omega(\beta)$ при $\mathbf{w} \neq 0$ задается равенством

$$\zeta\{\mathbf{w}\} = \beta. \quad (4.19)$$

В дальнейшем всегда будет считаться, что $\mathbf{w} \neq 0$. Пусть $\mathbf{w} \in \partial\Omega^p(\tilde{\alpha})$. Тогда

$$\zeta\{\mathbf{w}\} = \zeta_\eta\{\mathbf{w}\}\frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} = \tilde{\alpha}\frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}$$

и в шаре $S(\bar{\delta})$, в силу второго неравенства (4.5), имеем

$$\tilde{\alpha}(1-\xi) \le \zeta\{\mathbf{w}\} \le \tilde{\alpha}(1+\xi) \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \bar{\Omega}(\tilde{\alpha}(1-\xi))\backslash\Omega(\tilde{\alpha}(1+\xi)). \quad (4.20)$$

Если бы траектория $\mathbf{w}(t)$ из внутренней части псевдоконуса $\Omega^p(\tilde{\alpha})$ выходила в момент времени t_2 на его границу, то в этот момент величина $\zeta_\eta\{\mathbf{w}\}$ не увеличивалась бы и, следовательно, ее производная по времени в силу системы (1.11) могла бы быть только неположительной (это следует из формулы Тейлора для $\zeta_\eta\{\mathbf{w}\}$ в окрестности $t = t_2$). Если анализ обнаруживает, что в любой точке $\mathbf{w} \in \partial\Omega^p(\tilde{\alpha}) \cap S(\bar{\delta})$ упомянутая производная в силу системы положительна, то это означает, что траектория, берущая начало внутри псевдоконуса, до его границы дойти не может и остается внутри него.

Найдем производную по времени величины $\zeta_\eta\{\mathbf{w}\}$ в силу системы (1.11) и покажем, что существуют такие положительные значения $\tilde{\alpha}$, для которых эта производная положительна на части границы псевдоконуса $\partial\Omega^p(\tilde{\alpha}) \cap S(\bar{\delta})$:

$$
\begin{aligned}
(\zeta_\eta\{\mathbf{w}\})^{\bullet} &= \frac{2\dot{\mathbf{w}} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}} - \frac{(\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w})\dot{\eta}}{\eta^2} = \\
&= 2\left(\frac{(\mathcal{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}\{\mathbf{w}\}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}} - (\zeta_\eta\{\mathbf{w}\})^2\right) = 2\frac{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}{\eta\{\mathbf{w}\}}\left(\frac{(\mathcal{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}\{\mathbf{w}\}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} - \frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}\tilde{\alpha}^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

В силу неравенств (4.6) $\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}/\eta$ мало отличается от единицы в шаре $S(\bar{\delta})$ и знак производной определяется знаком выражения, стоящего в скобках в последнем из равенств (4.21). Это выражение (с использованием равенства (4.19)) может быть представлено так:

$$
Y\{\mathbf{w}\} \equiv \frac{(\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} - \beta^2 + \frac{\mathbf{f}\{\mathbf{w}\} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} - \tilde{\alpha}^2\left(1 - \frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}\right)\frac{\eta\{\mathbf{w}\}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}. \tag{4.22}
$$

Модуль последнего слагаемого ограничен величиной $\tilde{\alpha}^2\xi(1 + \xi)$ и сколь угодно мал в достаточно малом шаре $S(\bar{\delta})$. Покажем, что то же самое справедливо и в отношении предпоследнего слагаемого, из чего будет следовать, что знак $Y\{\mathbf{w}\}$ определяется знаком суммы двух первых слагаемых.

Заметим, что если $\mathbf{w} = \begin{Vmatrix} 0 \\ v \end{Vmatrix}$, то $\mathbf{f}\{\mathbf{w}\} = 0$ и $\mathbf{f}\{\mathbf{w}\} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} = 0$, а $\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = v \cdot v > 0$, т.е. предпоследнее слагаемое обращается в нуль. Если же $\mathbf{w} = \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix}$, то

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}\{\mathbf{w}\} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} &= f\{u\} \cdot \left(-A^- + \frac{1}{2}b_0 I^0\right)u = \\
&= \frac{1}{2}\left\langle\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_x}\right)_x + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(-a_i)g_i\langle\mu g_i u\rangle + \sum_{k=m+1}^{m+m'}\frac{b_0}{2}g_k\langle\mu g_k u\rangle\right)\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Примем для b_0 предварительное неравенство

$$
0 < b_0 \le |a_1|. \tag{4.24}
$$

С учетом того, что все $g_i(x)$ обращаются в нуль на концах отрезка $[0, l]$, имеем

$$
\left\langle\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_x}\right)_x g_i\right\rangle = -\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u_x}g_{ix}\right\rangle
$$

$$
|\mathbf{f} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w}| \le \frac{|a_1|}{2}\sum_{i=1}^{m+m'}\left|\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u_x}g_{ix}\right\rangle\langle\mu g_i u\rangle\right| + \frac{|a_1|}{2}\sum_{i=1}^{m+m'}\left|\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial u}g_i\right\rangle\langle\mu g_i u\rangle\right| \tag{4.25}
$$

$$
|\langle\mu g_i u\rangle| \le \sqrt{\bar{\mu}}\, l\sqrt{\langle u_x^2\rangle}
$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u} g_i \right\rangle\right| \le C_2 \left|\left\langle |u|^{1+\sigma_2} g_i \right\rangle\right| \le C_2 \sup|u|^{1+\sigma_2} |\langle g_i \rangle| \le C_2 l^{(1+\sigma_2)/2} \langle u_x^2 \rangle^{(1+\sigma_2)/2} \sqrt{l\langle g_i^2 \rangle} \le$$

$$\le C_2 l^{(1+\sigma_2)/2} (l^{1/2}/\underline{\mu}^{1/2}) \langle u_x^2 \rangle^{(1+\sigma_2)/2} = \frac{C_2 l^{1+\sigma_2/2}}{\underline{\mu}^{1/2}} \langle u_x^2 \rangle^{(1+\sigma_2)/2}$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u} g_i \right\rangle \langle \mu g_i u \rangle\right| \le C_2 l^{2+\sigma_2/2} \left(\frac{\bar{\mu}}{\underline{\mu}}\right)^{1/2} \langle u_x^2 \rangle \sup|u_x|^{\sigma_2}$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u_x} g_{ix} \right\rangle\right| \le C_1 \left|\left\langle |u_x|^{1+\sigma_1} g_{ix} \right\rangle\right| \le C_1 \sup|u_x|^{\sigma_1} \langle u_x^2 \rangle^{1/2} \langle g_{ix}^2 \rangle^{1/2}$$

$$0 \ge a_i = g_i \cdot A g_i = \langle p g_{ix}^2 \rangle - \langle q g_i^2 \rangle \ge \underline{p} \langle g_{ix}^2 \rangle - \frac{\bar{q}}{\underline{\mu}} \langle \mu g_i^2 \rangle = \underline{p} \langle g_{ix}^2 \rangle - \frac{\bar{q}}{\underline{\mu}} \Rightarrow \langle g_{ix}^2 \rangle \le \frac{\bar{q}}{\underline{\mu p}}$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u_x} g_{ix} \right\rangle \langle \mu g_i u \rangle\right| \le C_1 l \bar{\mu}^{1/2} \langle g_{ix}^2 \rangle^{1/2} \langle u_x^2 \rangle \sup|u_x|^{\sigma_1} \le C_1 l \left(\frac{\overline{\mu q}}{\underline{\mu p}}\right)^{1/2} \langle u_x^2 \rangle \sup|u_x|^{\sigma_1}.$$

Производя в (4.25) суммирование и учитывая первое неравенство (4.4), получаем окончательно

$$|\mathbf{f} \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}| \le \langle u_s^2 \rangle (C_5 |\mathbf{w}|^{\sigma_1} + C_6 |\mathbf{w}|^{\sigma_2}). \tag{4.26}$$

Таким образом,

$$\frac{|\mathbf{f} \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}|}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} \le \frac{|\mathbf{f} \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}|}{u \cdot Bu} \le \frac{|\mathbf{f} \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}|}{\underline{C} \langle u_x^2 \rangle} \le \frac{C_5}{\underline{C}} |\mathbf{w}|^{\sigma_1} + \frac{C_6}{\underline{C}} |\mathbf{w}|^{\sigma_2}. \tag{4.27}$$

Правая часть этого неравенства сколь угодно мала в шаре $S(\bar{\delta})$ при достаточно малом $\bar{\delta}$.

Остается доказать, что существуют такие положительные значения $\tilde{\alpha}$, что при $\mathbf{w} \ne 0$, $\mathbf{w} \in \partial\Omega^p(\tilde{\alpha}) \cap S(\bar{\delta})$ выполняется неравенство

$$\frac{(\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} > \beta^2. \tag{4.28}$$

Проведем доказательство сначала для более простого невырожденного случая, когда оператор A не имеет нулевых СЧ, а затем докажем неравенство и для вырожденного случая. Если оператор A невырожден, то подпространства U° и $\mathcal{W}^\circ$ пусты, $B = -A^- + A^+$, операторы $\mathcal{A}^a$ и $\mathcal{A}^s$ отличны от нуля на взаимно ортогональных подпространствах, являющихся инвариантными, поэтому

$$(\mathcal{A}^a \mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w} = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w} = (\mathcal{A}^s \mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s \mathbf{w}. \tag{4.29}$$

Оператор $\mathcal{A}^s$ имеет $2m$ отличных от нуля СЧ α_1, $(-\alpha_1)$, …, α_m, $(-\alpha_m)$, где $\alpha_i = \sqrt{-a_i}$, с СВ $\boldsymbol{\gamma}_i^+$, $\boldsymbol{\gamma}_i^-$ и тождественно равен нулю на бесконечномерном подпространстве $\mathcal{W}^+$. Выберем $\tilde{\alpha}$ и $\bar{\delta}$ таким образом, чтобы отрезок $[\tilde{\alpha}(1-\xi), \tilde{\alpha}(1+\xi)]$ лежал внутри интервала, концы которого – два соседних отличных друг от друга СЧ, например,

$$\alpha_2 < \tilde{\alpha}(1-\xi) < \tilde{\alpha}(1+\xi) < \alpha_1. \tag{4.30}$$

Если же имеется только одно отрицательное СЧ $a_1 < 0$ (и, соответственно, одно $\alpha_1 = \sqrt{-a_1} > 0$), то пусть, например,

$$0 < \alpha_1/2 < \tilde{\alpha}(1-\xi) < \tilde{\alpha}(1+\xi) < \alpha_1.$$

При этом в силу неравенств (4.20) имеем

$$\zeta\{\mathbf{w}\} = \beta \Rightarrow \tilde{\alpha}(1-\xi) \le \beta \le \tilde{\alpha}(1+\xi) \Rightarrow \alpha_2 < \beta < \alpha_1, \tag{4.31}$$

т.е. величина β отлична от любого из СЧ оператора $\mathscr{A}^s$. Пусть

$$\mathbf{h} = \mathscr{A}^s\mathbf{w} - \beta\mathbf{w} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{h} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathscr{A}^s\mathbf{w} - \beta\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = 0 \tag{4.32}$$

$$\begin{gathered}(\mathscr{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathscr{A}^s\mathbf{w} = (\beta\mathbf{w} + \mathbf{h}) \bullet (\beta\mathbf{w} + \mathbf{h}) = \beta^2\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{h} \bullet \mathbf{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(\mathscr{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathscr{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} = \beta^2 + \frac{\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}}.\end{gathered} \tag{4.33}$$

Представим $\mathbf{w}$ в виде суммы СВ (являющихся взаимно ортогональными)

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1^+ + \mathbf{w}_1^- + \ldots + \mathbf{w}_m^+ + \mathbf{w}_m^- + \mathbf{w}^\perp, \tag{4.34}$$

Имеем

$$\mathbf{h} = (\alpha_1 - \beta)\mathbf{w}_1^+ - (\alpha_1 + \beta)\mathbf{w}_1^- + \ldots + (\alpha_m - \beta)\mathbf{w}_m^+ - (\alpha_m + \beta)\mathbf{w}_m^- - \beta\mathbf{w}^\perp$$

$$\begin{gathered}\mathbf{h} \bullet \mathbf{h} = (\alpha_1 - \beta)^2\mathbf{w}_1^+ \bullet \mathbf{w}_1^+ + (\alpha_1 + \beta)^2\mathbf{w}_1^- \bullet \mathbf{w}_1^- + \ldots + (\alpha_m - \beta)^2\mathbf{w}_m^+ \bullet \mathbf{w}_m^+ + \\ + (\alpha_m + \beta)^2\mathbf{w}_m^- \bullet \mathbf{w}_m^- + \beta^2\mathbf{w}^\perp \bullet \mathbf{w}^\perp \ge \min((\alpha_i - \beta)^2, \beta^2)\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\frac{(\mathscr{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathscr{A}^s\mathbf{w}}{\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}} - \beta^2 \ge \min((\alpha_i - \beta)^2, \beta^2). \tag{4.35}$$

Правая часть неравенства (4.35) положительна и конечна. Значит, при достаточно малом $\bar{\delta}$ и соответственно достаточно малом ξ, вместе с ней строго положительна и производная (4.21). Значит, траектории, начинающиеся в ненулевых точках пересечения областей $\Omega^p(\tilde{\alpha})$ и $S(\bar{\delta})$, оставаясь в области $S(\bar{\delta})$, не выходят из области $\Omega^p(\tilde{\alpha})$, но тогда они достигают границы $\partial S(\bar{\delta}/2)$, что и означает неустойчивость по норме $|\mathbf{w}|$.

Обратимся к случаю вырожденного оператора A. В этом случае $B = -A^- + b_0I^0 + A^+$ (3.11), где положительное число b_0 ограничено пока лишь неравенством $b_0 \le |a_1|$ (4.24), однако в принципе оно может быть выбрано достаточно малым (хотя и конечным), что и будет сделано в дальнейшем. Заметим, что ограничение снизу для числа b_0 обусловлено тем, что оно входит в оценку снизу для формы $u \cdot Bu$ (2.10) через равенство (2.7).

В случае вырождения операторы $\mathcal{A}^s$ и $\mathcal{A}^a$ сцеплены на подпространстве $\mathcal{W}^0$:

$$(\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} = (\mathcal{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} + (\mathcal{A}^a\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} = (\mathcal{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} + v^0 \cdot Bv^0/4 - b_0^2u^0 \cdot u^0/4 =$$
$$= (\mathcal{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} - b_0(u^0 \cdot Bu^0 + v^0 \cdot v^0)/4 + b_0 v^0 \cdot v^0/2 \geq (\mathcal{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} - b_0\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}/4$$

$$\beta_0 \equiv \sqrt{b_0}/2 \Rightarrow (\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} \geq (\mathcal{A}^s\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} - \beta_0^2\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}.$$

Исследование правой части последнего неравенства проводится аналогично невырожденному случаю, но должны быть найдены СЧ оператора $\mathcal{A}^s$ на подпространстве $\mathcal{W}^0$. Можно убедиться, что каждый из векторов g_i, $i = m+1, \ldots, m+m'$ (образующих ортонормированный базис в U^0) порождает пару СВ оператора $\mathcal{A}^s$ с СЧ β_0 и $-\beta_0$:

$$\mathcal{A}^s(\mathbf{g}_i^u \pm 2\beta_0\mathbf{g}_i^v) = \pm\beta_0(\mathbf{g}_i^u \pm 2\beta_0\mathbf{g}_i^v), \quad i = m+1, \ldots, m+m'.$$

Обозначая линейную комбинацию СВ с СЧ β_0 в разложении $\mathbf{w}$ через $\mathbf{w}_0^+$, а аналогичную комбинацию для СЧ $-\beta_0$ через $\mathbf{w}_0^-$, получим

$$\mathbf{h} = \mathcal{A}^s\mathbf{w} - \beta\mathbf{w} = (\alpha_1 - \beta)\mathbf{w}_1^+ - (\alpha_1 + \beta)\mathbf{w}_1^- + \ldots + (\alpha_m - \beta)\mathbf{w}_m^+ -$$
$$- (\alpha_m + \beta)\mathbf{w}_m^- + (\beta_0 - \beta)\mathbf{w}_0^+ - (\beta_0 + \beta)\mathbf{w}_0^- - \beta\mathbf{w}^\perp$$

$$\mathbf{h} \bullet \mathbf{h} \geq \min((\alpha_i - \beta)^2, (\beta_0 - \beta)^2, \beta^2)\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}$$

Таким образом,

$$(\mathcal{A}\mathbf{w}) \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} \geq \beta^2\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{h} \bullet \mathbf{h} - \beta_0^2\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} \geq$$
$$\geq (\beta^2 + \min((\alpha_i - \beta)^2, (\beta_0 - \beta)^2, \beta^2) - \beta_0^2)\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}. \tag{4.36}$$

Напомним, что β сколь угодно мало отличается от $\tilde{\alpha}$ (4.31) и нужно показать, что $\tilde{\alpha}$ и β_0 могут быть выбраны так, чтобы они были положительными и конечными, а разность $\min((\alpha_i - \beta)^2, (\beta_0 - \beta)^2, \beta^2) - \beta_0^2$ тоже была положительной и конечной. Рассмотрим два случая: 1) $\tilde{m} = 1$ и 2) $\tilde{m} > 1$ подразумевая под $\tilde{m}$ количество различных отрицательных СЧ оператора A (и равное количество различных значений α_i).

Случай 1. Имеется только $\alpha_1 > 0$. Пусть

$$\beta_0 = \frac{\alpha_1}{7}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{4}{7}\alpha_1. \tag{4.37}$$

Тогда

$$\frac{3}{7}\alpha_1 < \beta < \frac{5}{7}\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 - \beta > \frac{2}{7}\alpha_1, \quad \beta - \beta_0 > \frac{2}{7}\alpha_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min((\alpha_1 - \beta)^2, (\beta_0 - \beta)^2, \beta^2) - \beta_0^2 > 3\left(\frac{\alpha_1}{7}\right)^2. \tag{4.38}$$

Случай 2. Имеются по крайней мере два различных соседних СЧ α_1 и α_2, причем

$$0 < \alpha_2 < \alpha_1. \tag{4.39}$$

Пусть

$$\beta_0 = \min\left(\alpha_2, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{6}\right), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \tag{4.40}$$

Тогда

$$|\alpha_1 - \beta| > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}, \quad |\alpha_2 - \beta| > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}, \quad \beta > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}, \quad |\beta_0 - \beta| > \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}$$

$$\beta_0 \le \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{6} \Rightarrow \min((\alpha_1 - \beta)^2, (\alpha_2 - \beta)^2, (\beta_0 - \beta)^2, \beta^2) - \beta_0^2 > (\alpha_1 - \alpha_2)^2/12. \tag{4.41}$$

Тем самым возможность выбора подходящих значений чисел $\tilde{\alpha}$ и β_0 в обоих случаях показана.

Этим доказательство неустойчивости рассматриваемой системы по норме $|\mathbf{w}|$ (3.18) завершается. Однако норма (3.18) содержит как "деформационное" слагаемое (первое), так и скоростное, а именно кинетическую энергию. Традиционно же в теории упругости и вообще в механике деформируемого твердого тела первостепенный интерес представляют смещения и деформации; именно с ними обычно связаны меры отклонения системы от положения равновесия, исследуемого на устойчивость или неустойчивость. Поэтому желательно было бы доказать, что решение $\mathbf{w}(t)$ нарастает не только по норме (3.18), но и по какой-либо деформационной, не зависящей от скорости норме. В терминологии А.А. Мовчана это соответствует неустойчивости по двум метрикам, и такая неустойчивость будет выведена в следующем разделе из уже доказанной неустойчивости по норме $|\mathbf{w}|$.

5. Определение неустойчивости по двум нормам и доказательство ее наличия. Конкретизируя применительно к рассматриваемой задаче определение неустойчивости по двум метрикам [4], дадим следующее определение неустойчивости по двум нормам.

Определение. Нулевое решение системы (1.11) называется неустойчивым по двум нормам, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $\delta > 0$ существует решение $\mathbf{w}(t)$, удовлетворяющее в начальный момент времени неравенству

$$|\mathbf{w}(0)| < \delta, \tag{5.1}$$

а в некоторый момент t_1 – неравенству

$$\sup|u_x(x, t_1)| \ge \varepsilon. \tag{5.2}$$

Заметим, что выше было доказано существование решения $\mathbf{w}(t)$, которое достигает границы некоторого шара $S(\bar{\delta}/2)$ и при этом не выходит за пределы псевдоконуса $\Omega^p(\tilde{\alpha})$, $0 < \tilde{\alpha} < \alpha_1$. В сочетании с малостью шара $S(\bar{\delta}/2)$ в силу неравенств (4.20) это означает, что $\mathbf{w}(t)$ не выходит и за пределы конуса $\Omega(\tilde{\alpha}(1-\xi))$, где ξ – сколь угодно малое число:

$$\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} \ge \tilde{\alpha}(1-\xi)\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} \equiv \tilde{\beta}\mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = \tilde{\beta}(u \cdot Bu + v \cdot v) \ge \tilde{\beta} v \cdot v.$$

Отсюда следует, что

$$v \cdot v \le \frac{1}{\tilde{\beta}}\mathbf{w} \bullet \mathcal{A}^s\mathbf{w} = \frac{1}{\tilde{\beta}} v \cdot (B - A)u$$

$$(v \cdot v)^2 \le \frac{1}{\tilde{\beta}^2}(v \cdot (B - A)u)^2 \le \frac{1}{\tilde{\beta}^2}(v \cdot v)((B - A)u) \cdot (B - A)u \le$$

$$\le \frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}(v \cdot v)u \cdot Bu \Rightarrow v \cdot v \le \frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}u \cdot Bu.$$

В силу оценки (2.10) в конусе $\Omega(\tilde{\beta})$ имеем

$$\upsilon\cdot\upsilon \le \frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}\bar{C}\langle u_x^2\rangle \le \frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}\bar{C}l\sup(u_x^2), \quad |\mathbf{w}|^2 \le \left(1+\frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}\right)\bar{C}l\sup(u_x^2).$$

Очевидно, что если взять

$$\varepsilon = \left[\left(1+\frac{4\alpha_1^2}{\tilde{\beta}^2}\right)\bar{C}l\right]^{-1/2}\frac{\bar{\delta}}{2},$$

то при достижении решением границы шара $\partial S(\bar{\delta}/2)$, т.е. при выполнении равенства $|\mathbf{w}(t_1)| = \bar{\delta}/2$, будет справедливо неравенство (5.2), что и означает определенную выше неустойчивость по двум нормам.

6. Заключение. Используемый здесь вариант метода секторов К.П. Персидского отличен от известных автору опубликованных вариантов этого метода: в качестве сектора в фазовом пространстве системы берется конус, поверхность которого характеризуется заданным положительным значением экспоненциального показателя роста некоторой нормы решения. Существенно, что это значение выбирается таким образом, чтобы оно не совпадало ни с одним из положительных СЧ оператора линейного приближения.

Доказанная в конечном итоге неустойчивость по двум нормам имеет следующий простой механический смысл: как бы ни были малы начальные возмущения по скоростям, смещениям и деформациям, среди них найдутся такие, что в ходе дальнейшего движения тела деформации достигнут заданного конечного значения по крайней мере в одной точке тела.

Можно предположить, что предложенный метод доказательства окажется вполне пригодным в принципе и для консервативных распределенных систем более общего вида (например, трехмерных упругих тел).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-05-64146).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. 241 с.
2. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
3. *Мовчан А.А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 483–493.
4. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
5. *Мовчан А.А.* Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение // Инж. сб. 1960. Т. 29. С. 3–20.
6. *Knops R.J., Wilkes E.W.* On Movchan's theorems for stability of continuous systems // Intern. J. Engng Sci. 1966. V. 4. № 4. P. 303–329.
7. *Gilbert J.E., Knops R.J.* Stability of general systems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 25. № 4. P. 271–284.
8. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.

9. *Слободкин А.М.* Об устойчивом равновесии консервативных систем с бесконечным числом степеней свободы // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 356–358.
10. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
11. *Персидский К.П.* Ко второй методе Ляпунова // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1947. Т. 42. Вып. 1. С. 48–55.
12. *Laloy M.* Une extension de la méthode des secteurs pour l'étude de l'instabilité á la Liapounov // Ann. Sóc. Scient. de Bruxelles. 1973. Ser. 1. V. 87. № 1. P. 17–49 = *Лалуа М.* Расширение метода секторов для исследования неустойчивости по Ляпунову // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1974. № 5 (147). С. 3–27.
13. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Berlin: Springer, 1977 = *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

Москва
e-mail: e_i_ryzhak@mail.ru

Поступила в редакцию
12.X.2004