УДК 531.36: 534.1

© 2006 г. А. И. Овсеевич

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА ПРИ БЫСТРЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Изучается устойчивость верхнего положения равновесия маятника, когда точка подвеса совершает быстрые случайные колебания с малой амплитудой. Выделен класс случайных колебаний, которые делают систему устойчивой с вероятностью единица при наличии малого трения. Показано, что если трения нет, то устойчивость обязательно теряется, что, как известно, неверно при гармонических колебаниях подвеса. Доказаны некоторые общие результаты о невозможности стохастической стабилизации гамильтоновых систем.

Устойчивость верхнего положения равновесия маятника при быстрых гармонических колебаниях точки подвеса – давно известное (по крайней мере с 1908 г. [1]) и интересное явление. Оно было включено П.Л. Капицей в общую теорию движения в быстро осциллирующем внешнем поле [2], развитую им на физическом уровне строгости; кроме того, была доказана устойчивость маятника прямым физическим экспериментом. Для доведения теории П.Л. Капицы до математического уровня строгости требуется, в частности, теория Колмогорова–Арнольда–Мозера гамильтоновых систем, близких к интегрируемым (см. [3]). Задача сильно упрощается для неидеального маятника с диссипацией, и ее решение было получено Н.Н. Боголюбовым [4] до работы П.Л. Капицы.

Предмет работы – стохастический аналог задачи П. Л. Капицы – близок к темам статей [5, 6], где, в частности, рассмотрены другие типы случайных возмущений движения маятника. Общие результаты [5, 7] касаются задачи о стабилизации неустойчивой линейной системы с помощью случайного шума; их можно, в свою очередь, считать стохастическим аналогом основного результата работы [8], где такая стабилизация была построена с помощью быстрых гармонических колебаний. Применяемые ниже методы, однако, отличаются от методов работ [5–7] большей общностью и простотой.

Возможность стабилизации верхнего положения маятника с помощью быстрых случайных колебаний подвеса была установлена на физическом уровне строгости [9]. Были изучены [10] более общие задачи о стохастической стабилизации консервативных систем, однако они не имеют прямого отношения как к вопросу об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с малым трением, так и к вопросу о его неустойчивости при отсутствии трения.

1. Основные уравнения. При наличии (малого) трения уравнение движения маятника длиной l с вертикально вибрирующей точкой подвеса при малых углах ϕ с вертикалью имеет вид

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{\ddot{\zeta}}{l} + \frac{g}{l}\right)\phi - \nu\dot{\phi},$$

где $\zeta = \zeta(t)$ – высота точки подвеса, ν – коэффициент трения. Точка $(\phi, \dot{\phi}) = (0, 0)$ соответствует верхнему положению равновесия.

Предполагается, что движение точки подвеса быстрое и с малой амплитудой, а точнее $\zeta(t) = az(\omega t)$, где амплитуда a мала по сравнению с длиной маятника l, а частота ω велика по сравнению с собственной частотой маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Прямая проверка показывает, что эта динамическая система описывается уравнениями

$$x' = \varepsilon y, \quad y' = -\varepsilon^2\delta y + \varepsilon(z'' + \varepsilon^2 k^2)x, \tag{1.1}$$

где

$$x = \phi, \quad y = \dot{\phi}/(\omega\varepsilon), \quad k^2 = g/(l\omega^2\varepsilon^4), \quad \delta = \nu/(\omega\varepsilon^2), \quad \varepsilon^2 = a/l.$$

Штрихом обозначено дифференцирование по быстрому времени $\tau = \omega t$, а движение точки подвеса описывается случайным процессом $az(\omega t)$. Считаем параметр ε малым, а параметры k и δ порядка единицы. Другими словами, $\omega \sim \varepsilon^{-2}\omega_0$.

2. Стационарные случайные процессы с достаточно сильным перемешиванием. Предположим, что функция z, описывающая движение точки подвеса, представляет собой траекторию стационарного случайного процесса со свойством достаточно сильного перемешивания. В этом разделе условие перемешивания точно формулируется и доказывается лемма об интегрировании по времени процессов с сильным перемешиванием. В следующем разделе с использованием введенных здесь понятий будет сформулирована и доказана теорема об устойчивости верхнего положения равновесия маятника, точка подвеса которого совершает быстрые случайные колебания с малой амплитудой.

Пусть задан стационарный случайный процесс $f(t)$ и непрерывное и возрастающее семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_s$, содержащих σ-алгебру $\sigma(f(\tau), \tau \le s)$, порожденную значениями процесса до момента s. В дальнейшем все рассматриваемые стационарные процессы предполагаются имеющими конечное математическое ожидание.

Скажем, что такой процесс обладает достаточно сильным перемешиванием, если $\mathbf{E}|f(t)|^2 < \infty$ и

$$\|\mathbf{E}(f(s) - (\mathbf{E}f(s))|\mathcal{F}_t)\| \le c(s-t)\|f(t) - (\mathbf{E}f(t))\|; \quad \int_0^{+\infty} c(s)ds < \infty,$$

где $\mathbf{E}$ – математическое ожидание, $s \ge t$, $\|\cdot\|$ – L_2-норма.

Оказывается, что с точностью до малой ошибки любой процесс с достаточно сильным перемешиванием можно проинтегрировать, причем интеграл снова окажется стационарным процессом. Точное утверждение состоит в следующем.

Лемма 1. Пусть $t \mapsto f(t)$ – стационарный процесс с нулевым средним и достаточно сильным перемешиванием. Тогда существует стационарный квадратично интегрируемый процесс F, такой, что

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds + M(t),$$

где M – квадратично интегрируемый мартингал со стационарными приращениями.

Доказательство. Введем обозначение

$$I(\alpha, \beta, t) = \mathbf{E}\left(\int_\alpha^\beta f(s)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)$$

и запишем формальное тождество

$$I(0, \infty, t) = \int_0^t f(s)ds + I(t, \infty, t).$$

Заметим, что на формальном уровне процесс $t \mapsto I(t, \infty, t)$ стационарен, а процесс $t \mapsto I(0, \infty, t)$ является мартингалом. Формально говоря, нужно положить

$$F(t) = -I(t, \infty, t), \quad M(t) = -I(0, \infty, t).$$

Для оправдания этих формальных вычислений положим

$$F_T(t) = -I(t, T', t), \quad M_T(t) = -I(0, T', t); \quad T' = \max(T, t).$$

Свойство сильного перемешивания немедленно дает, что процессы $F_T(t)$, $M_T(t)$ сходятся в L_2 при $T \to \infty$, а предельные процессы имеют нужные свойства.

Приведем типичный пример стационарного случайного процесса с сильным перемешиванием, который может возникать в связи с задачей о маятнике. Пусть z – единственное стационарное решение с нулевым средним следующих уравнений Ито:

$$dz = z'dt, \quad dz' = -z'dt - zdt + dw, \tag{2.1}$$

где w – стандартный винеровский процесс. Видно, что $\mathbf{E}z'^2 = 1/2$. Тогда процесс $t \mapsto z'(t)^2 - 1/2$ – стационарный, с сильным перемешиванием и нулевым средним. Более того, величины

$$F(t) = -(z^2(t) + z'^2(t))/2, \quad M(t) = -\int_0^t z'(s)dw(s)$$

определяют разложение из леммы 1.

3. Теорема об устойчивости.

Теорема 1. Предположим, что процесс z из (1.1) непрерывно дифференцируемый и стационарный с нулевым средним, причем $\exp(\varepsilon^2|z|)$ имеет конечное математическое ожидание для достаточно малого ε, а z'^2 – процесс с сильным перемешиванием. Тогда нулевое решение системы (1.1) является с вероятностью единица экспоненциально устойчивым, если ε достаточно мало и $k^2 < \mathbf{E}z'^2$.

В доказательстве теоремы проводится несколько (линейных обратимых и симплектических) замен переменных, которые приводят систему (1.1) к форме, удобной для применения техники функций Ляпунова. Первые две замены переменных такие:

$$x = x_1, \quad y = y_1 + \varepsilon z' x_1, \tag{3.1}$$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 - \varepsilon^3 \delta z x_2, \tag{3.2}$$

что преобразует систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned} x_2' &= \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 z' x_2 - O(\varepsilon^4) x_2 \\ y_2' &= -\varepsilon^2 \delta y_2 - \varepsilon^2 z' y_2 + \varepsilon^3 (k^2 - z'^2) x_2 + O(\varepsilon^4) y_2 + O(\varepsilon^4) x_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Первого шага метода усреднения (связанного с преобразованием (3.1)) можно избежать, если использовать вместо x, y канонически сопряженные переменные. А именно, заметим, что пара

$$x_1 = \phi, \quad y_1 = [\dot{\phi} - \dot{\zeta} l \phi] = m^{-1} \partial L / \partial \dot{\phi}$$

совпадает с точностью до умножения на m^{-1} с парой канонически сопряженных переменных для квадратичного гамильтониана, связанного с математическим маятником.

С этого момента обозначения типа $O(\varepsilon^4)$ используются для величин, меньших по модулю, чем $\varepsilon^4 \xi(\tau)$, где ξ – некоторый стационарный процесс с положительными значениями и равномерно по ε ограниченным математическим ожиданием $\mathbf{E}|\xi(\tau)|$. Теперь воспользуемся преобразованием

$$x_2 = \exp(\varepsilon^2 z)x_3, \quad y_2 = \exp(-\varepsilon^2 z)y_3, \tag{3.4}$$

которое уничтожает член $O(\varepsilon^2)$ в предыдущей системе. А именно

$$\begin{aligned} x_3' &= \varepsilon y_3 + O(\varepsilon^4)x_3 + O(\varepsilon^3)y_3 \\ y_3' &= -\varepsilon^2\delta y_3 + \varepsilon^3(k^2 - z'^2)x_3 + O(\varepsilon^4)y_3 + O(\varepsilon^4)x_3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Дальше хотелось бы применить преобразование

$$x_3 = x_4, \quad y_3 = y_4 + \varepsilon^3 S(\tau)x_4, \tag{3.6}$$

в котором $dS = (-z'^2 + \mathbf{E}z'^2)d\tau$, чтобы упростить член $\varepsilon^3(k^2 - z'^2)x_3$. Это, к сожалению, невозможно, если потребовать, чтобы процесс S был стационарным. Однако разложение из леммы 1 о процессах с сильным перемешиванием позволяет найти такой квадратично интегрируемый стационарный процесс S, что $dS = (-z'^2 + \mathbf{E}z'^2)d\tau + dM$, где M – квадратично интегрируемый мартингал. Теперь, если использовать этот процесс S в преобразовании (3.6), система принимает вид (индекс 4 далее опущен)

$$\begin{aligned} dx &= (\varepsilon y + O(\varepsilon^4)x + O(\varepsilon^3)y)d\tau \\ dy &= (-\varepsilon^2\delta y + \varepsilon^3(k^2 - \langle z'^2\rangle)x + O(\varepsilon^4)y + O(\varepsilon^4)x)d\tau - \varepsilon^3 x dM. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Остается показать, что последняя система (с вероятностью единица) экспоненциально устойчива, поскольку все предшествующие преобразования растут (в быстром времени τ) медленнее, чем $\exp(\mu\tau)$, где величина μ произвольно мала. Чтобы это сделать, используем обычную технику функций Ляпунова [11]. А именно возьмем квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x, y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2)/2$$

$$a = \varepsilon^2(\delta^2/2 + A^2), \quad b = \varepsilon\delta/2, \quad c = 1, \quad A^2 = \mathbf{E}z'^2 - k^2 = \mathrm{const} > 0$$

и вычислим дифференциал процесса $V(x_\tau, y_\tau)$. Имеем

$$dV \le -\varepsilon^2 fVd\tau + O(\varepsilon^3)Vd\tau + BdM,$$

где f – положительная постоянная (зависящая от δ и A, но не от ε), B – квадратичная форма от x, y, причем $B = O(V)$ (здесь постоянная в O не зависит от ε и, в действительности, является стационарным процессом), обозначение $O(\varepsilon^3)$ имеет тот же смысл, что и в системе (3.3). Неравенства для дифференциалов – в точности формальная запись неравенств для соответствующих интегралов.

Теперь формула Ито показывает, что

$$d\ln V \le -\varepsilon^2 fd\tau + O(\varepsilon^3)d\tau - b^2 d\langle M, M\rangle/2 + bdM, \quad b = B/V,$$

где $\langle M, M\rangle$ – квадратичная вариация [12] мартингала M. Имеем

$$\ln V(\tau) \le \ln V(0) - \varepsilon^2 f\tau + \varepsilon^3\int_0^\tau \xi(s)ds + \int_0^\tau b(s)dM(s), \tag{3.8}$$

где ξ и b – стационарные процессы (функции от z, z') с конечным математическим ожиданием. Ввиду сходимости почти наверное (эргодическая теорема) величин $\tau^{-1}\int_0^\tau \xi(s)ds$

при $\tau \to \infty$ к интегрируемой случайной величине, приходим к выводу, что первый интеграл в неравенстве (3.8) пренебрежим по сравнению с $\varepsilon^2 f\tau$ при $\varepsilon \to 0$ и большом τ. Последний интеграл в действительности – винеровский процесс в новом времени

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau b(s)^2 d\langle M, M\rangle(s).$$

Поэтому он не превышает (по закону повторного логарифма) $O(\sqrt{\theta \ln \ln \theta})$ при больших τ (на самом деле, граница θ^λ, где $1/2 < \lambda < 1$, совершенно достаточна для доказательства). Однако $\theta = O(\tau)$ при $\tau \to \infty$ в силу все той же эргодической теоремы.

Действительно, для доказательства того, что $\theta = O(\tau)$, достаточно рассмотреть целые значения τ, а в этом случае

$$\theta(\tau) = \sum_{k=0}^{\tau-1} T^k \eta; \quad \eta = \int_0^1 b(s)^2 d\langle M, M\rangle(s).$$

Здесь η – интегрируемая случайная величина, а T – сохраняющее меру преобразование сдвига на единицу по времени. (Мера $d\langle M, M\rangle$ стационарна из-за того, что мартингал M имеет стационарные приращения.) Эргодическая теорема утверждает, что $\theta(\tau)/\tau$ сходится с вероятностью единица к интегрируемой случайной величине и в частности, $\theta(\tau) = O(\tau)$. Поэтому последний интеграл в неравенстве (3.8) пренебрежим по сравнению с $\varepsilon^2 f\tau$ при $\tau \to \infty$. Следовательно $\ln V(\tau)$ стремится (линейно) к $-\infty$ и $V(\tau)$ стремится к нулю экспоненциально быстро, если ε достаточно мало.

4. Гамильтоновы системы. Рассмотрим вопрос об устойчивости (или скорее неустойчивости) маятника без трения, т.е. в системе (1.1) полагаем $\delta = 0$. В последующем изложении малый параметр ε несущественен, поэтому заменяем его единицей и приходим к системе

$$x' = y, \quad y' = (z'' + k^2)x. \tag{4.1}$$

В качестве z возьмем процесс (2.1). Заметим, что данная система не зависит от того, как ее рассматривать: как уравнение Ито или как уравнение Стратоновича. Стандартное доказательство теоремы Лиувилля проходит без изменений для стохастических гамильтоновых уравнений, понимаемых в смысле Стратоновича. Поэтому мера Лиувилля сохраняется под действием фазового потока независимо от того, в каком смысле понимается система дифференциальных уравнений. Будем рассматривать ее в смысле Ито. Неустойчивость системы (4.1) следует из известных результатов [13].

Ниже приведены значительно более простые непосредственные рассуждения.

Рассмотрим стохастический дифференциал энергии

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}k^2x^2.$$

Имеем

$$dH = z''xy + \frac{1}{2}x^2dt = -(z+z')xydt + xydw + \frac{1}{2}x^2dt.$$

Отсюда следует (здесь и далее в доказательстве все интегралы по времени берутся по отрезку $[0, T]$)

$$\mathbf{E}H(T) = H(0) - \mathbf{E}\int(z_t + z'_t)x_t y_t dt + \mathbf{E}\int\frac{1}{2}x_t^2 dt. \tag{4.2}$$

Предположим, что система (4.1) устойчива с вероятностью единица. Тогда имеется фундаментальная система окрестностей нуля U, которая сохраняется фазовым потоком. Действительно, если U' – окрестность нуля, которая остается внутри некоторой другой малой окрестности нуля при действии фазового потока ϕ_t, то можно положить $U = \cup_{t \geq 0}\phi_t(U')$. Проинтегрируем теперь выражение (4.2) по инвариантной окрестности относительно меры Лиувилля. Результат имеет вид

$$\int_U \mathbf{E}H(T)d\lambda(x_0, y_0) = \int_U H(0)d\lambda(x_0, y_0) -$$

$$- \mathbf{E}\int(z_t + z_t')\int_U x_t y_t d\lambda(x_0, y_0)dt + \mathbf{E}\int\int_U \frac{1}{2}x_t^2 d\lambda(x_0, y_0)dt.$$

Однако внутренние интегралы не зависят от времени t. Более того, это *детерминированные* постоянные, поскольку, очевидно, являются таковыми в начальный момент $t = 0$. Отсюда получаем

$$\int_U \mathbf{E}H(T)d\lambda(x_0, y_0) = C_1 + C_2\mathbf{E}\int(z_t + z_t')dt + C_3 T, \tag{4.3}$$

где C_3 – положительная постоянная. Но $\mathbf{E}\int(z_t + z_t')dt = 0$, и получается, что интеграл в левой части равенства (4.3) стремится к бесконечности при $T \to \infty$. Это противоречит устойчивости системы (4.1).

Можно избежать использования математических ожиданий и работать с выборочными траекториями. А именно можно заменить тождество (4.2) на

$$H(T) = H(0) - \int(z_t + z_t')x_t y_t dt + \int\frac{1}{2}x_t^2 dt + \int x_t y_t dw.$$

Те же соображения приводят к равенству

$$\int_U H(T)d\lambda(x_0, y_0) = C_1 + C_2\int(z_t + z_t')dt + C_3 T + C_4 w(T)$$

(В действительности, $C_2 = -C_4$.) Ясно, однако, что все члены в правой части, кроме C_3T, будут $o(T)$. Поэтому левая часть стремится к $+\infty$ при $T \to \infty$. Это опять-таки противоречит устойчивости системы (4.1).

Заметим, что, вообще говоря, гамильтонов поток, соответствующий гамильтониану вида $H + \xi U$, где $H = H(p, q)$ и $U = U(p, q)$ – гладкие функции, а ξ – белый шум, *не сохраняет* симплектическую форму $\sum_i dp_i \wedge dq_i$ и меру Лиувилля, если уравнения Гамильтона

$$dp = -\frac{\partial H}{\partial q}dt - \frac{\partial U}{\partial q}dw, \quad dq = \frac{\partial H}{\partial p}dt + \frac{\partial U}{\partial p}dw \tag{4.4}$$

трактуются в смысле Ито. Мера Лиувилля, однако сохраняется при выполнении условия

$$(\mathrm{Hess}\,U)^* J \mathrm{Hess}\,U = 0; \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{4.5}$$

где $\mathrm{Hess}\,U$ – гессиан (матрица вторых частных производных) функции U, звездочка означает транспонирование.

Эти замечания позволяют сформулировать следующий общий результат о стохастической неустойчивости гамильтоновых систем. Его доказательство вполне в духе предыдущих соображений.

Теорема 2. Пусть H – строго выпуклый гамильтониан, такой, что начало координат $(0, 0)$ – устойчивая точка равновесия для соответствующей гамильтоновой системы. Рассмотрим возмущенный гамильтониан вида $H + \xi U$, где U – гладкая функция, удовлетворяющая условию (4.5), неплоская в начале координат и такая, что $dU(0, 0) = 0$, а $\xi = dw/dt$ – белый шум. Тогда начало координат *неустойчиво* для возмущенной системы.

Доказательство. Применяя формулу Ито, получим

$$dH = \{U, H\}dw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial^2(p, q)}h_U, h_U\right)dt,$$

где $\partial^2 H/\partial^2(p, q)$ – гессиан функции H, а $h_U = (\partial U/\partial p, -\partial U/\partial q)$ – гамильтоново векторное поле, соответствующее функции U. Сделанные предположения гарантируют, что второе слагаемое в правой части предыдущего равенства неотрицательно и строго положительно в малой окрестности Σ начала координат, из которой удалено некоторое "тонкое" подмножество. "Тонкое" здесь означает, в частности, что мера Лиувилля λ этого подмножества упомянутой окрестности, где

$$((\partial^2 H/\partial^2(p, q))h_U, h_U) \le \delta$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Допустим, что начало координат *устойчиво* для возмущенной системы. Отсюда следует, что имеется малая окрестность Ω начала координат, такая, что ни одна фазовая траектория с началом в Ω никогда не покидает указанную окрестность Σ. Выберем теперь δ настолько малым, чтобы удвоенная мера множества

$$\{(q, p) \in \Sigma;\ ((\partial^2 H/\partial^2(p, q))h_U, h_U) \le \delta\}$$

была меньше, чем мера Лиувилля $\int_\Omega dp\, dq$ множества Ω. С помощью теоремы Лиувилля заключаем, что для любого t

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 H}{\partial^2(p, q)}h_U, h_U\right)(q_t, p_t)d\lambda(q_0, p_0) \ge \frac{1}{2}\delta \operatorname{mes}(\Omega).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\int_\Omega H(q_t, p_t)d\lambda(q_0, p_0) \ge \frac{1}{2}t\delta \operatorname{mes}(\Omega).$$

Это, очевидно, противоречит сделанному допущению, что $(q_t, p_t) \in \Sigma$, если время t достаточно велико.

Автор благодарит Р.З. Хасьминского и П.Л. Чоу за обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-08-50226, 05-01-00647).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52. Pt 2. № 8. P. 1–10.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
3. *Бардин Б.С., Маркеев А.П.* Об устойчивости маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
4. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
5. *Arnold L.* Stabilization by noise revisited // ZAMM. 1990. V. 70. № 7. P. 235–246.
6. *Wihstutz V.* Noise induced rotation // ZAMM. 1990, V. 7. № 7. P. 247–253.
7. *Kao J., Wihstutz V.* Stabilization of companion form systems by mean zero noise // Stochastics and Stochastics Report. 1994. V. 49. № 1–2. P. 1–25.
8. *Меерков С.М., Циткин М.Ю.* Об эффективности метода вибрационного регулирования для динамических систем, описываемых дифференциальным уравнением n-го порядка // Автоматика и телемеханика. 1975. № 4. С. 5–10.
9. *Ланда П.С., Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 358–378.
10. *Ковалева А.С.* Стабилизация квазиконсервативной системы, подверженной высокочастотным воздействиям // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 925–936.
11. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М.: Наука, 1969. 367 с.
12. *Kunita H., Watanabe S.* On square integrable martingales // Nagoya Math. 1967. J. V. 30. P. 209–245 = *Кунита X., Ватанабе С.* О мартингалах, интегрируемых с квадратом // Математика. Период. сб. переводов. 1971. Т. 15. № 1. С. 66–102.
13. *Kao J., Wihstutz V.* Characterization of stochastic processes which stabilize linear companion form systems // Stochastic Processes and their Applications. 2000. V. 89. № 1–2. P. 49–68.

Москва
e-mail: ovseev@ipmnet.ru

Поступила в р едакцию
10.VIII.2004