

УДК 531.36:534.1

© 2006 г. А. А. Сейранян, А. П. Сейранян

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматривается задача о стабилизации верхнего вертикального (перевернутого) положения маятника с помощью вибрации точки подвеса. Периодическая функция, описывающая колебания точки подвеса, считается произвольной, но обладающей малой амплитудой, и учитывается малое вязкое трение. Получена формула для границы области устойчивости решений уравнения Хилла с демпфированием в окрестности нулевой собственной частоты. Проведено сравнение аналитических и численных результатов, свидетельствующее об их хорошем согласии. Выведена асимптотическая формула для критической частоты стабилизации верхнего вертикального положения маятника. Показано, что влияние вязкого трения на критическую частоту имеет третий порядок малости и во всех рассмотренных примерах учет вязкого трения приводит к возрастанию критической частоты.

Колебания и устойчивость маятника с колеблющейся точкой подвеса изучались многими авторами [1–13]. В настоящее время эта задача представляет интерес в связи с современными устройствами – ловушками заряженных частиц в электромагнитном поле [14] – и приложениями в квантовой механике [15, 16]. Существенным отличием предлагаемой работы от предшествующих является учет вязкого трения, произвольный характер периодической функции возбуждения и метод исследования устойчивости.

1. Основные соотношения. Плоские колебания физического маятника относительно верхнего вертикального (неустойчивого) положения равновесия с колеблющейся точкой подвеса описываются уравнением

$$I\theta_{tt} + c\theta_t - mr(g + z_{tt})\sin\theta = 0. \quad (1.1)$$

Здесь I и m – момент инерции и масса маятника, θ – угол отклонения маятника от верхнего вертикального положения, c – коэффициент вязкого трения, r – расстояние от точки подвеса до центра масс, g – ускорение свободного падения, z – вертикальное перемещение точки подвеса, которое, по предположению, следует закону

$$z = a\phi(\Omega t), \quad (1.2)$$

где Ω – частота возбуждения, $\phi(\tau)$ – произвольная кусочно-непрерывная 2π – периодическая функция. Амплитуда a и коэффициент трения c предполагаются малыми. Для удобства введем обозначение

$$\varphi = -\phi_{tt}. \quad (1.3)$$

Среднее значение 2π -периодической функции $\varphi(\tau)$ предполагается равным нулю:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau = 0. \quad (1.4)$$

Введем безразмерные время и параметры

$$\tau = \Omega t, \quad \beta = \frac{c}{I\Omega}, \quad \varepsilon = \frac{a\Omega_0^2}{g}, \quad \omega = \frac{\Omega_0}{\Omega}; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{mrg}{I}}. \quad (1.5)$$

Ω_0 – собственная частота свободных колебаний маятника с неподвижной точкой подвеса относительно нижнего вертикального положения равновесия.

В случае математического маятника

$$I = mr^2, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \beta = \frac{c}{mr^2\Omega}, \quad \varepsilon = \frac{a}{r},$$

где r – длина маятника.

В обозначениях (1.2), (1.3), (1.5) уравнение (1.1) принимает вид

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} - [\omega^2 - \varepsilon\varphi(\tau)]\sin\theta = 0, \quad (1.6)$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ . Коэффициенты этого уравнения явно зависят от 2π -периодической функции $\varphi(\tau)$ и трех безразмерных параметров ε , β , ω , причем ε и β малы по сравнению с единицей.

2. Область устойчивости для уравнения Хилла с демпфированием. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, устойчивость тривиального решения $\theta = 0$ нелинейного уравнения (1.6) с периодическими коэффициентами определяется устойчивостью решений линеаризованного уравнения

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [\mu + \varepsilon\varphi(\tau)]\theta = 0; \quad \mu = -\omega^2. \quad (2.1)$$

Это уравнение Хилла с демпфированием [7, 9, 17].

При $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ верхнее вертикальное положение равновесия маятника $\theta = 0$ неустойчиво. Исследуем возможность стабилизации маятника с помощью высокочастотных колебаний точки подвеса. Это соответствует близости параметров задачи к точке

$$\varepsilon = 0, \quad \beta = 0, \quad \mu = 0. \quad (2.2)$$

Для нахождения области устойчивости в окрестности этой точки воспользуемся методом, основанным на вычислении производных матрицы монодромии и анализе поведения мультипликаторов [17–19].

Введем переменные $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ и запишем уравнение (2.1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu - \varepsilon\varphi(\tau) & -\beta \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(\tau)$ (матрицант) системы (2.3) находится из матричного дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Матрица монодромии (Флоке) определяется равенством $\mathbf{F} = \mathbf{X}(T)$. Для исследования устойчивости линейной системы (2.3) воспользуемся теорией Флоке [20], согласно которой линейная система с периодическими коэффициентами устойчива, если все собственные значения (мультипликаторы) матрицы монодромии \mathbf{F} по модулю меньше единицы, и неустойчива, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы.

Пусть при некотором n -мерном векторе действительных параметров \mathbf{p}_0 известна матрица монодромии $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$. Придадим вектору параметров приращение в виде $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}$, вследствие чего матрица \mathbf{G} , а следовательно, и матрицант $\mathbf{X}(\tau)$ получат приращения. Это соответственно приведет к изменению матрицы монодромии \mathbf{F} . Были найдены выражения для первых и вторых производных матрицы монодромии по параметрам в виде интегралов по периоду [18]

$$\mathbf{F}_{,k} = \mathbf{F}_0 \mathbf{P}_k \tag{2.5}$$

$$\mathbf{F}_{,ij} = \mathbf{F}_0 (\mathbf{K}_{ij} + \widehat{\mathbf{K}}_{ij} + \widehat{\mathbf{K}}_{ji}), \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{F}_{,k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k}, \quad \mathbf{F}_{,ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \mathbf{P}_k = \int_0^T \mathbf{H}_k(\tau) d\tau, \quad \mathbf{K}_{ij} = \int_0^T \mathbf{H}_{ij}(\tau) d\tau$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{ij} = \int_0^T \mathbf{H}_i(\tau) \left(\int_0^\tau \mathbf{H}_j(\zeta) d\zeta \right) d\tau,$$

$$\mathbf{H}_k(\tau) = \mathbf{X}_0^{-1}(\tau) \mathbf{G}_{,k}(\mathbf{p}_0, \tau) \mathbf{X}_0(\tau), \quad \mathbf{H}_{ij}(\tau) = \mathbf{X}_0^{-1}(\tau) \mathbf{G}_{,ij}(\mathbf{p}_0, \tau) \mathbf{X}_0(\tau), \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Нулевой индекс означает, что соответствующая величина берется при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Формула для производных n -го порядка содержит n -кратные интегралы [19].

Отметим, что для нахождения производных матрицы монодромии необходимо лишь знание матрицанта $\mathbf{X}_0(\tau)$ и производных матрицы \mathbf{G} по параметрам, вычисленных при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Раскладывая матрицу монодромии в окрестности точки \mathbf{p}_0

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{,k} \Delta p_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{F}_{,ij} \Delta p_i \Delta p_j + \dots, \tag{2.7}$$

можно оценить поведение мультипликаторов (собственных значений матрицы монодромии \mathbf{F}), ответственных за устойчивость системы (2.3), при изменении параметров.

Из уравнений (2.3), (2.4) в точке (2.2) находим матрицант и обратную к нему матрицу

$$\mathbf{X}_0(\tau) = \left\| \begin{array}{c} 1 \ \tau \\ 0 \ 1 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{X}_0^{-1}(\tau) = \left\| \begin{array}{c} 1 \ -\tau \\ 0 \ 1 \end{array} \right\|. \tag{2.8}$$

Таким образом, матрица монодромии в точке (2.2) равна

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_0(2\pi). \tag{2.9}$$

Собственные значения этой матрицы – двукратные мультипликаторы $\rho_1 = \rho_2 = 1$ с одним собственным вектором (сильное взаимодействие [18]), поэтому при малом изменении параметров ϵ, β, μ в окрестности начала координат $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ пространства параметров мультипликаторы либо расходятся по действительной оси комплексной плоскости в разные стороны (неустойчивость), либо становятся комплексно сопряженными величинами и расходятся в направлении, перпендикулярном действительной оси. Устойчивость означает, что при этом мультипликаторы остаются внутри единичного круга.

Для нахождения области устойчивости разложим матрицу монодромии \mathbf{F} в окрестности точки \mathbf{p}_0 в ряд Тейлора (2.7) по параметрам ε , β и μ . Тогда, согласно соотношениям (2.7), (2.9), матрицу монодромии можно представить в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_{11} & 2\pi + \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.10)$$

где α_{ij} – малые величины. Согласно теореме Лиувилля [20],

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \exp \left(\int_0^{2\pi} \text{tr} \mathbf{G} dt \right) = \exp(-2\pi\beta);$$

поэтому решение характеристического уравнения $\det \|\mathbf{F}(\mathbf{p}) - \rho \mathbf{I}\| = 0$ записывается в виде

$$\rho = \text{tr} \mathbf{F} / 2 \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{F} / 2)^2 - \exp(-2\pi\beta)}. \quad (2.11)$$

Условие асимптотической устойчивости $|\rho| < 1$ можно записать в виде системы неравенств, связывающих диагональные элементы матрицы монодромии.

При отрицательном дискриминанте имеем

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} < 0, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} < 2(\exp(-\pi\beta) - 1), \quad \exp(-2\pi\beta) < 1. \quad (2.12)$$

Заметим, что последнее условие (2.12), налагаемое на модуль мультипликаторов, выполняется при любом коэффициенте демпфирования $\beta > 0$. Отсюда следует, что при отрицательном дискриминанте система асимптотически устойчива.

При неотрицательном дискриминанте условия устойчивости имеют вид

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} < 0, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 2(\exp(-\pi\beta) - 1), \quad \exp(-2\pi\beta) - 1 > \alpha_{11} + \alpha_{22}. \quad (2.13)$$

Именно третье условие (2.13) определяет границу области устойчивости.

По формулам (2.5), (2.6), а также по соотношениям для производных более высокого порядка [19] и с использованием выражений (2.3), (2.8), (2.9) вычислим значения производных матрицы монодромии по параметрам вплоть до четвертого порядка при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ и найдем величины α_{ij} . В результате определяющее условие устойчивости (третье условие (2.13)) принимает вид

$$4\pi^4 \mu^2 / 3 - 4\pi^2 \mu (1 - \pi\beta + 2\pi^2 \beta^2 / 3) + A\varepsilon^2 \mu + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^2 \beta^2 + M\varepsilon^3 + C\varepsilon^4 + D\varepsilon^2 \beta + S\varepsilon^3 \beta < 0, \quad (2.14)$$

где

$$A = \left(\int_0^{2\pi} t \varphi(t) dt \right)^2 - 4\pi \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau dt.$$

Другие коэффициенты полинома в левой части неравенства (2.14) выражаются через след производных матрицы монодромии по параметрам, имеют довольно громоздкий вид и здесь не приведены. С помощью преобразования кратных интегралов посредством интегрирования по частям можно показать, что коэффициенты A и D , M и S связаны соотношениями

$$\pi A + D = 0, \quad \pi M + S = 0. \quad (2.15)$$

Тогда из условия (2.14) следует, что область устойчивости определяется неравенством

$$\mu > F\varepsilon^2 + N\varepsilon^3 + K\varepsilon^2\beta^2 + L\varepsilon^4. \quad (2.16)$$

Коэффициенты полинома в правой части этого неравенства определяются с помощью подстановки (2.16) в уравнение границы, которое получается из (2.14) заменой знака неравенства на равенство, и приравнивания нулю соответствующих членов одного порядка малости. В итоге находим

$$F = \frac{A}{4\pi^2}, \quad N = \frac{M}{4\pi^2}, \quad K = \frac{B}{4\pi^2} - \frac{2\pi^2 F}{3}, \quad L = \frac{\pi^2 F^2}{3} + \frac{aF + C}{4\pi^2}. \quad (2.17)$$

Таким образом, из условия (2.16) для произвольной периодической функции $\varphi(\tau)$ в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ следует, что с точностью до величин третьего порядка малости область устойчивости определяется неравенством

$$\mu > F\varepsilon^2; \quad F = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t\varphi(t) dt \right)^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \tau\varphi(\tau) d\tau dt. \quad (2.18)$$

Отметим, что, по предположению, для функции $\varphi(\tau)$ выполняется условие (1.4). Можно показать, что для периодических функций, части которых можно симметрично отразить относительно временной оси и совместить, постоянная $F < 0$.

Для периодической функции $\varphi(\tau) = \cos \tau$ уравнение (2.1) называется уравнением Матъе–Хилла. Условие устойчивости (последнее неравенство (2.13)) для этого уравнения приводит к соотношению

$$\frac{\pi^2 \mu^2}{3} - \mu(1 - \gamma_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} + \gamma_2 < 0, \quad (2.19)$$

где введены обозначения

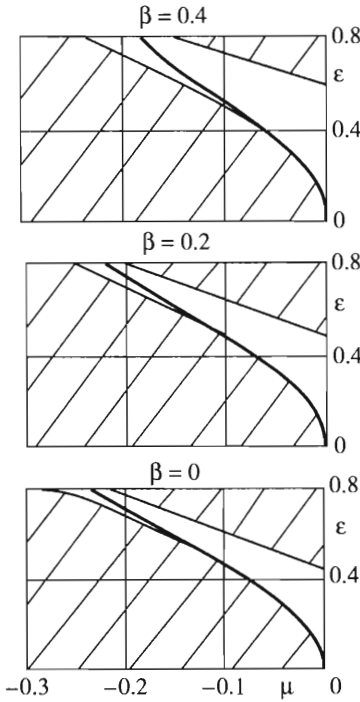
$$\gamma_1 = \pi\beta - \frac{2\pi^2\beta^2}{3} + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)\varepsilon^2, \quad \gamma_2 = \frac{\pi\varepsilon^2\beta}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{3}\right)\varepsilon^2\beta^2 + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{25}{8}\right)\frac{\varepsilon^4}{4}.$$

Соответственно, согласно соотношениям (2.16), (2.17), получим условие устойчивости в виде

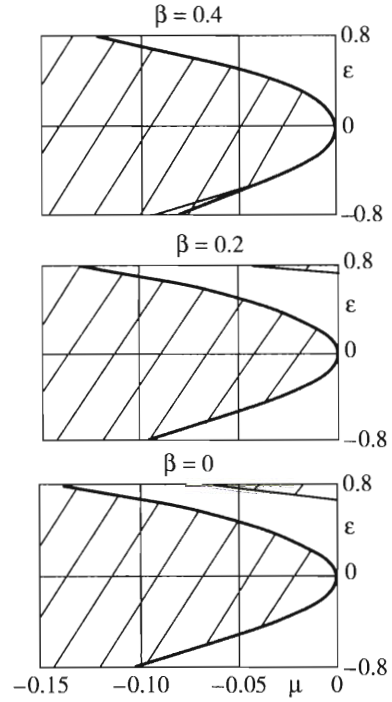
$$\mu > -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2\beta^2}{2} + \frac{7\varepsilon^4}{32}. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что учет демпфирования сужает область устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ при $\mu < 0$ и демпфирование является дестабилизирующим фактором в отличие от случаев $\mu > 0$ [17]. Отметим, что утверждение о том, что демпфирование не влияет на границу области устойчивости для уравнения Матъе–Хилла при отрицательных значениях μ [7], согласно полученным результатам, верно лишь в первом приближении.

На фиг. 1 показано влияние демпфирования на границу области устойчивости для периодической функции $\varphi(\tau) = \cos \tau$. Граница области устойчивости, найденная с помощью аналитической формулы (2.20), отмечена жирной линией, а области неустойчивости, полученные с помощью численного интегрирования уравнений (2.2), (2.3), вычисления матрицы монодромии \mathbf{F} и абсолютных значений мультипликаторов, заштрихованы. Из фиг. 1 следует, что границы области устойчивости, полученные аналитически и численно, хорошо согласуются между собой вплоть до значений $\varepsilon \approx 0.5$, $\beta \approx 0.4$, $\mu \approx -0.15$. Заме-



Фиг. 1



Фиг. 2

тим, что при $\beta = 0$ имеем часть диаграммы Айнса–Стретта [7, 10], которая при учете члена шестого порядка по ϵ описывается асимптотической формулой

$$\mu > -\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{7\epsilon^4}{32} - \frac{29\epsilon^6}{144}. \quad (2.21)$$

В рассмотренном выше примере кубичный член по ϵ в формуле (2.16) отсутствует ($N = 0$). Нетрудно доказать, что отсутствие нечетных членов в формуле (2.16) имеет место для произвольных 2π -периодических функций с симметрией $\varphi(\tau + \pi) = -\varphi(\tau)$. Действительно, сделав в уравнении (2.1) преобразование времени $t = \tau + \pi$ и используя свойство симметрии, придем к эквивалентному уравнению $\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [\mu - \epsilon\varphi(t)]\theta = 0$. Отсюда следует, что область устойчивости симметрична относительно оси μ , поэтому нечетные члены по ϵ в формуле (2.16) отсутствуют.

Для периодической функции с нулевым средним, не обладающей указанной симметрией,

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^3 - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi \quad (2.22)$$

область устойчивости с помощью соотношений (2.16), (2.17) определяется условием

$$\mu > -\frac{19\pi^2\epsilon^2}{900} - \frac{41\pi^4\epsilon^3}{103950} + \frac{139\pi^4\epsilon^2\beta^2}{69300} + \frac{1074071\pi^6\epsilon^4}{40439148750}. \quad (2.23)$$

Как и в предыдущем случае, учет демпфирования сужает область устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$, и демпфирование является дестабилизирующим факто-

ром. На фиг. 2 граница области устойчивости, найденная с помощью аналитической формулы (2.23), отмечена жирной линией, а области устойчивости, полученные с помощью численного интегрирования, заштрихованы. Налицо наличие небольшой асимметрии области устойчивости относительно оси μ . Сравнение аналитических и численных результатов для границы области устойчивости свидетельствует об их отличном согласии вплоть до значений $\varepsilon \approx 0.8$, $\beta \approx 0.4$, $\mu \approx -0.1$.

Полученные результаты дополняют исследование областей устойчивости и неустойчивости для уравнения Хилла с демпфированием [17] для случая нулевой частоты $\omega = 0$.

Замечание. Если среднее значение периодической функции $\varphi(\tau)$ не равно нулю, то с помощью замены переменных

$$\tilde{\mu} = \mu + \varepsilon\varphi_0, \quad \tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau$$

уравнение Хилла приводится к виду (2.1) с периодической функцией $\tilde{\varphi}(\tau)$, имеющей нулевое среднее значение. В этом случае уравнение границы области устойчивости в переменных μ , ε будет содержать также линейный член по ε .

3. Стабилизация маятника. С учетом соотношений (1.4) коэффициент β для удобства можно записать в виде

$$\beta = \beta_0\omega, \quad \beta_0 = c/(I\Omega_0). \tag{3.1}$$

Теперь коэффициент демпфирования β_0 не зависит от частоты возбуждения Ω . Тогда, учитывая, что $\mu = -\omega^2$, и вычислив производные от матрицы монодромии по ε пятого и шестого порядка, с помощью формулы (2.16) получим неравенство

$$-\omega^2(1 + K\varepsilon^2\beta_0^2) > \varepsilon^2(F + N\varepsilon + L\varepsilon^2 + V\varepsilon^3 + H\varepsilon^4). \tag{3.2}$$

Коэффициенты F, N, K, L даны формулами (2.17), а коэффициенты V и H вычисляются аналогично. Извлекая корень из обеих частей неравенства (3.2) и раскладывая радикалы в ряд, с учетом соотношений (1.4) найдем область стабилизации маятника с точностью до членов четвертого порядка малости, если величины ε и β_0 считать одного порядка. Она определяется условием

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > T \left[\frac{2F}{\varepsilon} - N + \varepsilon \left(\frac{3N^2}{4F} - L \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{3NL}{2F} - \frac{5N^3}{8F^2} - V \right) + \varepsilon\beta_0^2KF + \varepsilon^3 \left(\frac{3(L^2 + 2NV)}{4F} + \frac{35N^4}{64F^3} - \frac{15N^2L}{8F^2} - H \right) \right]; \quad T = \frac{1}{2F\sqrt{-F}}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что при достаточно высокой частоте вибрации точки подвеса верхнее вертикальное положение маятника становится устойчивым (предполагается, что $F < 0$). При $K > 0$ малое демпфирование повышает критическую частоту стабилизации. Однако, как показывает формула (3.3), влияние демпфирования на критическую частоту стабилизации очень невелико (третьего порядка малости).

Для функции $\varphi(\tau) = \cos\tau$ с помощью соотношения (3.3) получим

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{7\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon\beta_0^2}{4} - \frac{2389\varepsilon^3}{18432} \right]. \tag{3.4}$$

Таким образом, при достаточно высокой частоте вибрации точки подвеса верхнее вертикальное положение маятника становится устойчивым, и малое демпфирование повы-

шает критическую частоту стабилизации. Член порядка ε^{-1} в правой части неравенства (3.4) совпадает с полученным ранее [1–11], два следующих члена также известны [8]. Вследствие отмеченной симметрии коэффициенты $N = V = 0$, поэтому в формуле (3.4) члены нулевого и второго порядка по ε отсутствуют.

Рассматривая математический маятник с кусочно-постоянной функцией возбуждения

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau \leq \pi \\ -1, & \pi < \tau < 2\pi, \end{cases} \quad (3.5)$$

для которой $F = -\pi^2/12$, с помощью выражения (3.3) получим условие стабилизации в виде

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{3} \left[\frac{2}{\pi\varepsilon} + \frac{\pi^3\varepsilon}{126} + \frac{\pi^3\varepsilon\beta_0^2}{120} - \frac{79\pi^7\varepsilon^3}{970200} \right]. \quad (3.6)$$

В первом приближении критическая частота стабилизации для этого случая совпадает с известным результатом [12] и в $\sqrt{2}$ раз меньше критической частоты, приведенной в [13].

Для периодической функции (2.22), не обладающей симметрией, с помощью описанных выше вычислений получаем условие стабилизации в виде

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \frac{2.19}{\varepsilon} - 0.202 + 0.162\varepsilon + 0.045\varepsilon^2 + 0.214\varepsilon\beta_0^2 - 0.028\varepsilon^3. \quad (3.7)$$

По сравнению с предыдущими примерами отметим наличие членов нулевой и второй степени по ε . Как и ранее, учет демпфирования приводит к возрастанию критической частоты стабилизации.

Отметим, что в практических случаях параметры амплитуды и демпфирования удовлетворяют неравенствам $\varepsilon < 0.1$, $\beta_0 < 0.1$, поэтому полученные асимптотические формулы дают практическое решение задачи о стабилизации перевернутого маятника с помощью возбуждения колебаний точки подвеса с высокой точностью.

Авторы благодарят участников семинара МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством В.В. Белецкого и Ю.Ф. Голубева за обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Римского университета “La Sapienza”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. 1908. V. 52. № 8. P. 1–10.
2. Jeffreys H., Swirles B. Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Univ. Press, 1966 = Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. 3. М: Мир, 1970. 344 с.
3. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
4. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
5. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
7. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. N. Y.: Wiley, 1979. 704 p.
8. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа “маятник”. Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.

9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
11. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 394 с.
12. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: "Регулярная и хаотическая динамика"; Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2000. 367 с.
14. Paul W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. № 3. P. 531–540.
15. Grozdanov T.P., Rakovic M.J. Quantum system driven by rapidly varying periodic perturbation // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. № 4. P. 1739–1746.
16. Rahav S., Gilary I., Fishman S. Time independent description of rapidly oscillating potentials // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 11. P. 110404–1 – 110404–4.
17. Сейранян А.П. Области резонанса для уравнения Хилла с демпфированием // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 44–47.
18. Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P. Stability analysis for multiparameter linear periodic systems // Arch. Appl. Mech. 1999. V. 69. № 3. P. 160–180.
19. Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. N. J.: World Sci., 2003. 403 p.
20. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

Москва

e-mail: aseiran@hotmail.ru

seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию

15.III.2006