УДК 531.36

© 2006 г. В. Н. Тхай

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБРАТИМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

Излагается теория симметричных периодических движений (СПД) обратимой системы второго порядка, охватывающая как колебания, так и вращения. Устанавливается грубость порождающей автономной обратимой системы, заключающаяся в том, что наличие или отсутствие СПД в возмущенной системе не зависит от конкретного вида "обратимых" возмущений. Исследуется как случай рождения СПД из семейства СПД порождающей системы, так и рождение цикла из положения равновесия. Для рождающихся (при малых значениях параметра) СПД получены критерии устойчивости по Ляпунову в невырожденной ситуации. Предлагается метод построения и исследования устойчивости по Ляпунову всех СПД. Для всех случаев резонансов устанавливаются условия существования цикла (симметричного и несимметричного) в окрестности опорного, "почти" резонансного СПД. Теоретические результаты применяются к изучению движения частицы вдоль прямой, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости основных идентичных притягивающих и одновременно излучающих основных тел (обобщение задачи Ситникова), в фотогравитационном варианте задачи трех тел. Анализируется круговая задача, найдены два различных ряда семейств СПД в слабоэллиптической задаче. Доказана неустойчивость положения равновесия при параметрическом резонансе, для произвольных значений эксцентриситета выделены области устойчивости(и неустойчивости). Построены все СПД периода 2π, для этих движений выяснено свойство устойчивости по Ляпунову.

К замечательным простейшим модельным задачам, связанным с анализом структуры фазового пространства динамической системы, относятся, в первую очередь, задача о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [1], задача Ситникова [2] и задача Белецкого [3], где "естественность и простота постановок задач сочетаются с необычайным богатством и разнообразием их содержания" [4]. Этим задачам посвящены многочисленные работы (см., например, обзоры [5–8]), поток которых не иссякает, причем исследуются как исходные задачи, так и их модификации. Из недавних исследований укажем работы по задачам о маятнике [9–16], по задаче Ситникова [17–22], по плоским движениям спутника вокруг центра масс под действием факторов разной природы [7, 23–29] (см.также библиографию в указанных работах).

Модельные задачи описываются периодическим уравнением второго порядка, отличительное свойство которого – его инвариантность относительно замены (фазовых координат и времени) (x, x', t) на $(x, -x', -t)$ или $(-x, x', -t)$. При этом в задаче о маятнике с вертикально (горизонтально) вибрирующей точкой подвеса и задаче Ситникова уравнение инвариантно относительно одновременно двух преобразований. Как известно, в динамике обратимость проявляется как инвариантность относительно преобразования $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^2$ = id (id – тождественное отображение) фазового пространства при одновременном обращении знака времени [30]. В механических системах $\mathbf{G}$ – линейное преобразование, и эти системы образуют класс обратимых механических систем [31–33].

Ниже для обратимой периодической системы второго порядка систематически исследуются так называемые симметричные периодические движения (СПД) типа колебаний и вращений: решаются вопросы существования, построения, устойчивости СПД и проблема рождения цикла около заданного СПД. Даются результаты по СПД в фотогравитационном варианте задаче Ситникова.

1. Симметричные периодические движения и их устойчивость. Рассмотрим достаточно гладкую 2π-периодическую по t обратимую систему второго порядка

$$\dot{u} = U(u, \upsilon, t), \quad \dot{\upsilon} = V(u, \upsilon, t) \tag{1.1}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{u, \upsilon, t : \upsilon = 0, \sin t = 0\}$ [34]. В случае 2π-периодических по υ функций U, V неподвижным множеством будет $\mathbf{M}^* = \{u, \upsilon, t : \sin \upsilon = 0, \sin t = 0\}$ [34].

Для функций U, V могут выполнятся также условия

$$U(-u, \upsilon, -t) = U(u, \upsilon, t), \quad V(-u, \upsilon, -t) = -V(u, \upsilon, t).$$

Тогда система (1.1) имеет два неподвижных множества.

Решение $u = \varphi(t)$, $\upsilon = \psi(t)$ системы (1.1) назовем $2\pi k$-периодическим движением, $k \in \mathbb{N}$, если

$$\varphi(t + 2\pi k) = \varphi(t), \quad \psi(t + 2\pi k) = \psi(t) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Отметим, что в механических системах решение (1.2) описывает как колебательное ($m = 0$), так и вращательное ($m \neq 0$) движения [34]. При этом вращение может быть прямым ($m > 0$) и обратным ($m < 0$). Движение (1.2) в задаче о вращении спутника на эллиптической орбите (задача Белецкого [3]) названо[1] обобщенным периодическим решением (см. также [7]).

Система (1.1) может содержать параметр μ. Пусть при $\mu = 0$ система (1.1) превращается в автономную систему. Тогда при $\mu \neq 0$ получим задачу о периодических движениях (ПД) обратимой системы

$$\dot{u} = U_0(u, \upsilon) + \mu U_1(\mu, u, \upsilon, t), \quad \dot{\upsilon} = V_0(u, \upsilon) + \mu V_1(\mu, u, \upsilon, t) \tag{1.3}$$

близкой к автономной системе.

При $\mu = 0$ имеем порождающую систему, функции μU_1, μV_1 называются возмущениями.

В типичном случае ПД автономной системы образуют семейство [35]. Это является правилом [36] для симметричных относительно множества $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}^*$ в случае 2π-периодической по υ системе) движений обратимой системы. Соответствующие необходимые и достаточные существования движений (1.2) в автономной обратимой системе известны [34, 37].

Постановка задачи о продолжении по параметру ПД и метод ее решения принадлежат Пуанкаре [38]; метод продолжения по параметру, предложенный первоначально для задач небесной механики [38], был затем подробно разработан для аналитических систем общего вида [35]. При решении задачи возникают два случая [39]: а) грубый, когда свойство системы иметь ПД определяется только порождающей системой (она называется грубой в смысле ПД) и не зависит от конкретного вида возмущений, б) негрубый, когда для решения задачи необходимо привлекать к рассмотрению возмущения.

Несомненно, решение задачи зависит как от класса, к которому принадлежит порождающая система, так и класса возмущений; эти классы определяются содержанием конкретной задачи.

В задаче о продолжении по параметру $2\pi k$-периодического движения, выбранного из семейства ПД автономной системы, как правило, имеем негрубый случай.

---

[1] *Варин В.П.* Обобщенные периодические решения уравнений колебаний спутника. Препринт № 97, М.: Ин-т прикл. мат. РАН, 1997.

В простейшей гамильтоновой системе

$$\ddot{z} = \mu(1 + z^2)(1 + \cos^2 t) \qquad (1.4)$$

автономное порождающее уравнение $\ddot{z} = 0$ допускает семейство ПД $z = c$ (const). Однако при $\mu \neq 0$ ни одно решение уравнения (1.4) не является периодическим (для периодического решения правая часть уравнения (1.4) в некоторый момент t должна обращаться в нуль). Пример (1.4) приводит к важному выводу: автономная гамильтоновая система является негрубой в смысле ПД при рассмотрении возмущений, сохраняющих гамильтоновый характер системы.

Уравнение (1.4) также обратимо. Здесь семейство ПД $z = c$, $\dot{z} = 0$ принадлежит неподвижному множеству $\mathbf{M} = \{z, \dot{z}, t : \dot{z} = 0, \sin t = 0\}$. Однако ни одно ПД из $\mathbf{M}$ не продолжается по параметру μ.

Таким образом, обратимость также не является гарантией грубости порождающей системы в смысле ПД в классе возмущений, сохраняющих свойство обратимости.

С другой стороны, изучены [34] ПД обратимой системы, близкой к консервативной системе с одной степенью свободы, и установлена грубость порождающей консервативной системы в смысле ПД в классе обратимых возмущений. Был также рассмотрен [40] вопрос о грубости обратимой автономной порождающей системы в общей ситуации и получены необходимые условия грубости в смысле ПД для симметричных движений. Для системы второго порядка эти условия в общей ситуации оказываются также и достаточными.

Отметим, что в гамильтоновой системе аналога указанного утверждения нет (см. пример (1.4)), если система не является одновременно обратимой с соответствующим неподвижным множеством.

Следующая интересная задача состоит в исследовании устойчивости симметричных периодических движений(СПД) системы (1.3), найденных при малых μ. Согласно теореме Пуанкаре [38], при $\mu = 0$ один характеристический показатель равен нулю. Для обратимой системы (1.3) получим два таких показателя [41]. При этом в случае семейства СПД порождающей системы, имеем, как правило, жорданову клетку [40]. При малых $\mu \neq 0$ характеристические показатели $\pm\kappa$ близки к нулю. Действительные значения $\pm\kappa$ приводят к неустойчивости по первому приближению [42]. В случае чисто мнимых $\pm\kappa$, малых по модулю, исключены резонансы низших порядков, поэтому имеет место устойчивость по Ляпунову [43].

Ниже для определения чисел $\pm\kappa$ при малых $\mu \neq 0$ используем одно специально построенное приближенное решение для линейной системы и полученные ранее результаты [44].

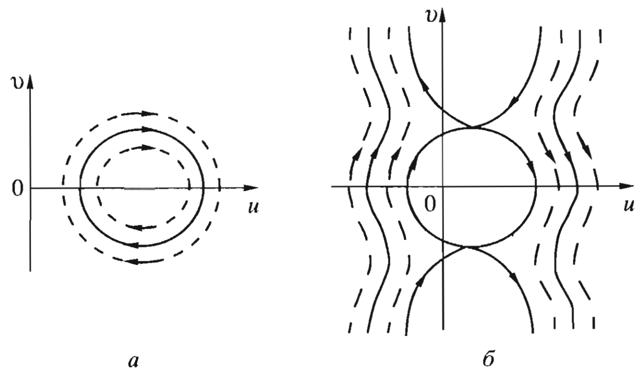
Если в системе (1.1) не выделять явно параметр, все СПД находятся описанным ранее методом [34]. Тогда устойчивость СПД исследуется на основе уравнений в вариациях

$$\delta\dot{u} = \frac{\partial U}{\partial u}\delta u + \frac{\partial U}{\partial \upsilon}\delta \upsilon, \quad \delta\dot{\upsilon} = \frac{\partial V}{\partial u}\delta u + \frac{\partial V}{\partial \upsilon}\delta \upsilon; \quad U = U(\varphi, \psi, t), \quad V = V(\varphi, \psi, t). \qquad (1.5)$$

В невырожденном случае из наличия чисто мнимых корней следует устойчивость по Ляпунову, если нет резонансов до четвертого порядка включительно [43, 45]. Резонансные случаи исследуются на основе известных результатов [46, 47].

Для численного определения характеристических показателей системы второго порядка (1.5) достаточно построить только одно решение задачи Коши с начальной точкой $\delta u_1(0) = 1$, $\delta\upsilon_1(0) = 0$ или $\delta u_2(0) = 0$, $\delta\upsilon_2(0) = 1$ на периоде $2\pi k$ [44]. Тогда

$$\pm\kappa = \frac{1}{2\pi k}\operatorname{arcch}\delta u_1(2\pi k) = \frac{1}{2\pi k}\operatorname{arcch}\delta \upsilon_2(2\pi k). \qquad (1.6)$$



Фиг. 1

Таким образом, построение и исследование устойчивости всех СПД обратимой системы (1.1) заключается в отыскании всех начальных точек для СПД описанным ранее методом [34], решения задачи Коши на периоде с известными теперь начальными условиями для совместной системы, состоящей из уравнений (1.1), (1.5), и вычисления показателей $\pm\kappa$ по формуле (1.6).

Отметим, что по этой схеме исследовались задачи о плоских движениях вокруг центра масс спутника на эллиптической орбите [23–28].

В ситуации, близкой к резонансной ситуации, в окрестности СПД рождаются циклы. Этот вопрос изучался недавно в случае автономной системы общего вида [48]. Ниже получены условия рождения цикла в окрестности СПД обратимой системы.

Отдельного внимания заслуживает исследование СПД в задаче Ситникова [2]. Этот вопрос подробно изучался в плане логически возможных ситуаций [20]. В приложении рассмотрена фотогравитационная постановка задачи Ситникова, в которой построены все 2π-периодические СПД и изучена их устойчивость. Отсюда как частный случай следуют результаты для задачи Ситникова.

2. Квазиавтономная система. Доказательство основного результата для квазиавтономной системы предварим леммой.

Лемма. Если гладкая обратимая система

$$\dot{u} = U_0(u, \upsilon), \quad \dot{\upsilon} = V_0(u, \upsilon); \quad U_0(u, -\upsilon) = -U_0(u, \upsilon), \quad V_0(u, -\upsilon) = V_0(u, \upsilon) \quad (2.1)$$

допускает СПД $(u(t), \upsilon(t))$ с периодом T, не совпадающее с положением равновесия, и $\upsilon(0) = 0$, то

$$\dot{\upsilon}(T/2) \neq 0.$$

Доказательство. Фазовой портрет обратимой системы (2.1) симметричен относительно оси Ou, и каждая траектория, пересекающая эту ось, описывается четной $u(t)$ и нечетной $\upsilon(t)$ функциями (фиг. 1; *а* – колебание, *б* – вращение). В окрестности такой траектории уравнения в вариациях обратимы [46] и имеют решение: $p(t) = \dot{u}(t)$, $q(t) = \dot{\upsilon}(t)$. Для T-периодического движения функции $p(t)$, $q(t)$ – T-периодические, причем $p(t)$ – нечетная, а $q(t)$ – четная функция. Поэтому

$$p(T/2) = \dot{u}(T/2) = 0, \quad q(T/2) = \dot{\upsilon}(T/2) \neq 0.$$

Теорема 1. Если порождающая автономная система, полученная из системы (1.3) при $\mu = 0$, обладает однопараметрическим (по параметру h), симметричным семейством ПД периода $T(h)$, $T(h^*) = 2\pi$, таким, что

$$dT(h^*) \neq 0, \tag{2.2}$$

то при малых $\mu \neq 0$ система (1.3) имеет единственное симметричное 2π-периодическое движение, рождающееся из 2π-периодического движения порождающей системы. Факт существования этого движения зависит только от свойств порождающей системы и не зависит от конкретного вида возмущений $\mu U_1, \mu V_1$.

Доказательство. Пусть $u(\mu, u^0, \upsilon^0, t)$, $\upsilon(\mu, u^0, \upsilon^0, t)$ – решение системы (1.3) с начальной точкой (u^0, υ^0) при $t = 0$. Необходимое и достаточное условие существования симметричного 2π-периодического движения имеет вид [34]

$$\upsilon(\mu, u^0, 0, \pi) = \upsilon(0, u^0, 0, \pi) + \mu\upsilon_1(\mu, u^0, 0, \pi) = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

$(u(0, u^0, 0, t), \upsilon(0, u^0, 0, t)$ – симметричное решение порождающей системы).

Пусть $\mu = 0$. Уравнение (2.3) допускает решение $u^0 = u^*$ (const).

Для порождающей автономной системы необходимые и достаточные условия существования симметричного 2τ-периодического движения запишутся так:

$$\upsilon(0, u^0, 0, \tau) = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

При этом, по предположению, уравнение (2.4) имеет семейство решений $u^0 = \chi(h)$, $\tau = T(h)/2$, т.е.

$$\upsilon(0, \chi(h), 0, T(h)/2) = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$(\chi(h^*) = u^*,\ T(h^*) = 2\pi)$. Дифференцируя это соотношение в точке $h = h^*$, используя условие (2.2) и неравенство $\partial\upsilon(0, u^*, 0, \pi)/\partial t \neq 0$, согласно лемме, заключаем, что $\partial\upsilon(0, u^*, 0, \pi)/\partial u^0 \neq 0$. Теперь применим теорему о неявной функции к уравнению (2.3) : существует интервал, содержащий нуль, и единственная непрерывная функция $\lambda(\mu)$, определенная на этом интервале, такая, что

$$\upsilon(\mu, \lambda(\mu), 0, \pi) = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lambda(0) = u^*.$$

Следовательно, для малых $|\mu| \neq 0$ решение системы (1.3), для которого $u^0 = \lambda(\mu)$, существует и имеет период 2π.

Укажем важный частный случай. Пусть система близка к консервативной системе с одной степенью свободы. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = \mu F(\mu, z, \dot{z}, t), \quad F(\mu, z, \dot{z}, t + 2\pi) = F(\mu, z, \dot{z}, t). \tag{2.5}$$

Здесь теорема 1 применима в двух случаях

1) $f(-z) = f(z), \quad F(\mu, -z, \dot{z}, -t) = -F(\mu, z, \dot{z}, t)$

2) $F(\mu, z, -\dot{z}, -t) = F(\mu, z, \dot{z}, t)$.

Для уравнения (2.5) результат теоремы 1 был установлен ранее в первом [34] и втором [40] случаях. Для вращений в системе (2.4) в первом случае получен результат [34], справедливый также при нарушении условия (2.2).

3. Построение СПД. Пусть порождающая автономная система, полученная из системы (1.3) при $\mu = 0$, допускает семейство СПД, зависящее от параметра h,

$$u = \varphi(h, t), \quad \upsilon = \psi(h, t); \quad \varphi(h, t) = \varphi(h, -t), \quad \psi(h, t) = -\psi(h, t). \tag{3.1}$$

При $h = h^*$ период решения $T(h^*)$ равен 2π. В невырожденном случае (выполнено условие (2.2) при $\mu \neq 0$) СПД периода 2π (теорема 1) представим так:

$$u = \varphi + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + o(\mu^2), \quad \upsilon = \psi + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + o(\mu^2) \tag{3.2}$$

(φ_j – четные, ψ_j – нечетные функции от t). Тогда, подставляя решение (3.2) в систему (1.3), получим

$$\dot\varphi_j = A_0^-(t)\varphi_j + A_0^+(t)\psi_j + f_j(t), \quad \dot\psi_j = B_0^+(t)\varphi_j + B_0^-(t)\psi_j + g_j(t); \quad j = 0, 1, 2$$

$$A_0^- = U_u(\varphi, \psi), \quad A_0^+ = U_\upsilon(\varphi, \psi), \quad B_0^+ = V_u(\varphi, \psi), \quad B_0^- = V_\upsilon(\varphi, \psi)$$
$$f_0 = g_0 = 0, \quad f_1 = U_1(0, \varphi, \psi, t), \quad g_1 = V_1(0, \varphi, \psi, t) \tag{3.3}$$

$$f_2 = U_{1\mu 0} + U_{1u0}\varphi_1 + U_{1\upsilon 0}\psi_1, \quad g_2 = V_{1\mu 0} + V_{1u0}\varphi_1 + V_{1\upsilon 0}\psi_1.$$

Индексы u, υ, μ означают частную производную по соответствующей переменной, нулевой индекс означает подстановку в частные производные вместо μ, u, υ величин 0, φ, ψ.

По теореме 1 каждая из систем (3.3) имеет единственное СПД периода 2π.

Система (3.3) имеет фундаментальную матрицу решений

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_h(h, t) & \dot\varphi(h, t) \\ \psi_h(h, t) & \dot\psi(h, t) \end{matrix} \right\| \quad \left(\chi_h = \frac{\partial \chi_h}{\partial h}\right)$$

с определителем

$$\Delta = \Delta(0)\exp\left(\int_0^t (A^- + B^-)dt\right)$$

Можно проверить, что замена

$$x = -\frac{1}{2\pi\Delta}T'(\varphi_j\dot\psi - \psi_j\dot\varphi), \quad y = \frac{1}{\Delta}[\varphi_j\eta(t) - \psi_j\xi(t)]; \quad j = 0, 1, 2 \quad \left(T' = \frac{dT(h^*)}{dh}\right) \tag{3.4}$$

(соответствующие четная ($\xi(t)$) и нечетная ($\eta(t)$) функции имеют период 2π) приводит систему (3.3) при $j = 0$ к системе

$$\dot x = 0, \quad \dot y = x.$$

В самом деле, имеем

$$\varphi_0 = C_1^0\dot\varphi + C_2^0\varphi_h, \quad \psi_0 = C_1^0\dot\psi + C_2^0\psi_h$$

(C_1^0, C_2^0 – постоянные), откуда получим

$$C_1^0 = \frac{1}{\Delta}(\varphi_0\psi_h - \psi_0\varphi_h), \quad C_2^0 = -\frac{1}{\Delta}(\varphi_0\dot\psi - \psi_0\dot\varphi). \tag{3.5}$$

Далее учитывая, что функции

$$\varphi\left(h, \frac{T(h)t}{2\pi}\right), \quad \psi\left(h, \frac{T(h)t}{2\pi}\right)$$

имеют не зависящий от h период, равный 2π, вычислим от них производные

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi}T't\dot\varphi(h^*, t) + \varphi_h(h^*, t), \quad \eta(t) = \frac{1}{2\pi}T't\dot\psi(h^*, t) + \psi_h(h^*, t). \tag{3.6}$$

Тогда из соотношений (3.5), (3.6) получим

$$C_1^0 = -\frac{1}{2\pi}T'tC_2^0 + \frac{1}{\Delta}(\varphi_0\eta - \psi_0\xi). \tag{3.7}$$

Наконец, за x выберем $(T'/(2\pi))C_2^0$. Тогда уравнение для y получим дифференцированием равенства (3.7).

В результате замены (3.4) система (3.3) примет вид

$$\dot{x} = -\frac{T'}{2\pi\Delta}(f_j\dot{\varphi} - g_j\dot{\psi}), \quad \dot{y} = x + \frac{1}{\Delta}[f_j\eta(t) - g_j\xi(t)]. \tag{3.8}$$

Отсюда легко вывести условия существования СПД

$$x(0) + \int_0^{\pi}\frac{1}{\Delta}[f_j\eta(t) - g_j\xi(t)]dt = 0 \tag{3.9}$$

и найти начальную точку $x(0)$ для этого СПД. Тогда взятием квадратуры решение строится в явном виде.

Отметим, что явные формулы, полученные из соотношения (3.7), позволяют конструктивно решать задачу построения СПД.

4. Устойчивость СПД. Составим систему уравнений в вариациях для СПД

$$\begin{gathered}\dot{p} = A^-(t,\mu)p + A^+(t,\mu)q, \quad \dot{q} = B^+(t,\mu)p + B^-(t,\mu)q \\ A^{\pm}(t,\mu) = A_0^{\pm}(t) + \mu A_1^{\pm}(t) + \mu^2 A_2^{\pm}(t) + o(\mu^2) \\ B^{\pm}(t,\mu) = B_0^{\pm}(t) + \mu B_1^{\pm}(t) + \mu^2 B_2^{\pm}(t) + o(\mu^2).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь

$$A_1^- = U_{uu*}\varphi_1 + U_{uv*}\psi_1 + U_{1u*}, \quad A_1^+ = U_{vu*}\varphi_1 + U_{vv*}\psi_1 + U_{1v*}$$

$$A_2^- = U_{1uu*}\varphi_2 + U_{1uv*}\psi_2 + (U_{uuu*}\varphi_1^2 + 2U_{uuv*}\varphi_1\psi_1 + U_{uvv*}\psi_1^2)/2$$

$$A_2^+ = U_{1vu*}\varphi_2 + U_{1vv*}\psi_2 + (U_{vuu*}\varphi_1^2 + 2U_{vvu*}\varphi_1\psi_1 + U_{vvv*}\psi_1^2)/2.$$

Выражения для B_k^+ (B_k^-) получаются из выражений для A_k^- (A_k^+) путем замены U на V. Верхний индекс плюс (минус) обозначает четные (нечетные) функции, а звездочка указывает на то, что в вычисленных частных производных положено

$$\mu = 0, \quad u = \varphi(h^*, t), \quad v = \psi(h^*, t).$$

Решение системы (4.1) ищем в виде

$$p = p_0(t) + \mu p_1(t) + \mu^2 p_2(t) + o(\mu^2), \quad q = q_0(t) + \mu q_1(t) + \mu^2 q_2(t) + o(\mu^2). \tag{4.2}$$

Тогда для функций $p_k(t)$, $q_k(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ имеем следующие системы уравнений:

$$\dot{p}_k = A_0^-(t)p_k + A_0^+(t)q_k + F_k(t), \quad \dot{q}_k = B_0^+(t)p_k + B_0^-(t)q_k + Q_k(t), \tag{4.3}$$

где

$$F_0 = Q_0 = 0, \quad F_1 = A_1^-(t)p_0 + A_1^+(t)q_0, \quad Q_1 = B_1^+(t)p_0 + B_1^-(t)q_0$$

$$F_2 = A_1^-(t)p_1 + A_1^+(t)q_1 + A_2^-(t)p_0 + A_2^+(t)q_0$$

$$Q_2 = B_1^+(t)p_1 + B_1^-(t)q_1 + B_2^+(t)p_0 + B_2^-(t)q_0.$$

Системы (4.3) позволяют последовательно найти решение вида (4.2), удовлетворяющее условиям

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 1. \tag{4.4}$$

Для этого по формулам, подобным (3.4):

$$x_k = -\frac{T'}{2\pi\Delta}(p_k\dot{\psi} - q_k\dot{\varphi}), \quad y_k = \frac{1}{\Delta}(p_k\eta - q_k\xi) \tag{4.5}$$

от систем (4.3) перейдем к следующим:

$$\dot{x}_k = -\frac{T'}{2\pi\Delta}(F_k\dot{\psi} - Q_k\dot{\varphi}), \quad \dot{y}_k = x_k + \frac{1}{\Delta}(F_k\eta - Q_k\xi). \tag{4.6}$$

Тогда обратное к (4.5) преобразование имеет вид

$$p_k = -\frac{2\pi}{T'}x_k\xi - y_k\dot{\varphi}, \quad q_k = -\frac{2\pi}{T'}x_k\eta - y_k\dot{\psi}. \tag{4.7}$$

В формулах (4.3), (4.5)–(4.7) индекс k пробегает значения 0, 1, 2.

Укажем, что из формул (4.5)–(4.7) следует, что нулевым значениям p_k, q_k отвечают нулевые значения x_k, y_k, а значениям (4.4) соответствуют $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 1$. Также отметим, что уравнения (4.6) интегрируются в явном виде в квадратурах.

Выпишем решения систем (4.6)

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{T'}{2\pi}\int\frac{1}{\Delta}(A_1^+\dot{\psi} - B_1^-\dot{\varphi})dt, \quad y_1 = \int\left[x_1 + \frac{1}{\Delta}(A_1^+\eta - B_1^-\xi)\right]dt \\ x_2 &= -\frac{T'}{2\pi}\int\frac{1}{\Delta}(F_2^*\dot{\psi} - Q_2^*\dot{\varphi})dt, \quad y_2 = \int\left[x_2 + \frac{1}{\Delta}(F_2^*\eta - Q_2^*\xi)\right]dt \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$F_2^* = A_1^-p_1 + A_1^+q_1 + A_2^+, \quad Q_2^* = B_1^+p_1 + B_1^-q_1 + B_2^-.$$

В выражении для x_1 под интегралом имеем четную периодическую функцию, причем $\dot{\varphi}(0) = 0$. Поэтому, представляя функции их рядами Фурье, вычислим неопределенный интеграл. Имеем

$$x_1(t) = -\frac{T'}{2\pi}[a_0t + \chi^-(t)], \quad a_0 = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\Delta}(A_1^+\dot{\psi} - B_1^-\dot{\varphi})dt \tag{4.9}$$

($\chi^-(t)$ – нечетная периодическая функция). Тогда для y_1, учитывая здесь нечетность подынтегральной функции, получим

$$y_1(t) = -\frac{T'}{2\pi}\left[\frac{a_0t^2}{2} + \theta^+(t)\right], \quad \theta^+(0) = 0 \tag{4.10}$$

($\theta^+(t)$ – четная периодическая функция).

Формулы (4.7), (4.9), (4.10) позволяют вычислить

$$q_1(2\pi) = a_0^* = T'\pi a_0\dot{\psi}(h^*, 0). \tag{4.11}$$

Далее в случае $a_0 = 0$ формулы (4.7), (4.9), (4.10) дают

$$p_1(t) = \chi^-(t)\xi + \frac{T'}{2\pi}\theta^+(t)\dot{\varphi}, \quad q_1 = \chi^-(t)\eta + \frac{T'}{2\pi}\theta^+(t)\dot{\psi}. \tag{4.12}$$

Подставляя выражения (4.12) в соотношения (4.8) для x_2 и y_2 и рассуждая так же, как для x_1 и y_1, получим

$$q_2(2\pi) = a_1^* = T'\pi a_1\dot{\psi}(h^*, 0), \quad a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\Delta}(F_2^*\dot{\psi} - Q_2^*\dot{\varphi})dt. \tag{4.13}$$

Таким образом, вычисления дают

$$q(2\pi) = 1 + \mu q_1(2\pi) + \mu^2 q_2(2\pi) + o(\mu^2)$$

(числа $q_1(2\pi)$, $q_2(2\pi)$ определяются формулами (4.11), (4.13)). Отсюда следует [44], что при $\mu a_0^* > 0$ характеристические показатели $\pm\kappa$ будут чисто мнимыми, а при $\mu a_0^* < 0$ – действительными, противоположного знака. В случае $a_0 = 0$ знак числа a_1^* дает чисто мнимые ($a_1^* < 0$) или действительные ($a_1^* > 0$) показатели κ.

При малых $|\mu| > 0$ характеристические показатели также близки к нулю. В случае чисто мнимых чисел в системе не реализуются резонансы низших порядков. Значит, из чисто мнимых показателей в невырожденном случае следует устойчивость по Ляпунову СПД, существование которого установлено в теореме 1. Невырожденность означает неравенство нулю действительного коэффициента C в нормальной форме, записанной в комплексно-сопряженных переменных z, $\bar{z}$:

$$\dot{z} = \kappa z + iCz^2\bar{z} + \dots$$

Теорема 2. В невырожденном случае ($C \neq 0$, $a_0^* \neq 0$) необходимым и достаточным условием устойчивости по Ляпунову СПД (3.2) является выполнение неравенства $\mu a_0^* < 0$. При $a_0^* = 0$, $a_1^* \neq 0$, $C \neq 0$ таким условием будет неравенство $a_1^* < 0$.

5. Один специальный случай. Пусть в системе (1.3) $U_0 = 0$, $V_0 = u$. Тогда порождающая система допускает единственное нулевое положение равновесия, принадлежащее неподвижному множеству $\{u, v : v = 0\}$. При малых $\mu \neq 0$ имеем задачу о СПД в окрестности равновесия.

К системе

$$\dot{u} = \mu U_1(\mu, u, v, t), \quad \dot{v} = u + \mu V_1(\mu, u, v, t) \tag{5.1}$$

теорема 1 неприменима; порождающая система не допускает нужного семейства. Запишем необходимые и достаточные условия существования 2π-периодического, симметричного решения в виде [37]

$$v(\mu, u^0, 0, \pi) = 0. \tag{5.2}$$

При $\mu = 0$ равенство (5.2) получается путем интегрирования линейной системы и имеет вид $u^0\pi = 0$. Поэтому при $\mu \neq 0$ уравнение (5.2) всегда имеет единственное решение $u^0 = u^0(\mu)$. Этот вывод не зависит от вида конкретных возмущений U_1, V_1.

Таким образом, в окрестности точки $u = v = 0$ обратимая система (5.1) всегда, независимо от вида конкретных возмущений U_1, V_1, имеет единственное СПД [39]

$$u = \mu u_1(t) + o(\mu), \quad v = \mu v_1(t) + o(\mu)$$

$$u_1(t) = u^* + \int_0^t U_1(0, 0, 0, t)dt, \quad u_* = \text{const} \tag{5.3}$$

$$v_1(t) = \int_0^t \left[u^* + \int_0^\tau U_1(0, 0, 0, \nu)d\nu + V_1(0, 0, 0, \tau)\right]d\tau,$$

а постоянная u^* определяется из условия периодичности функции $v_1(t) : v_1(\pi) = 0$.

В системе уравнений в вариациях (4.1) имеем

$$A_0^-(t) \equiv 0, \quad A_0^+(t) \equiv 0, \quad B_0^+(t) \equiv 1, \quad B_0^-(t) \equiv 0.$$

Поэтому система (4.3) интегрируется без предварительного перехода к переменным x_k, y_k. Получим

$$p_1 = \int A_1^+(t)dt, \quad q_1 = \int [p_1(t) + B_1^-(t)]dt$$

$$p_2 = \int [A_1^-(t)p_1 + A_1^+(t)q_1 + A_2^+(t)]dt, \quad q_2 = \int [p_2 + B_1^+p_1 + B_1^-q_1 + B_2^-]dt.$$

Теперь, представляя функции $A_1^+(t)$ и $B_1^-(t)$ их рядами Фурье, вычислим

$$p_1 = a_0 t + \chi^-(t), \quad q_1 = \frac{a_0 t^2}{2} + \theta^+(t); \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_1^+(t)dt, \quad \theta^+(0) = 0 \tag{5.4}$$

($\chi^-(t)$, $\theta^+(t)$ – соответственно нечетная и четная периодические функции).

В случае $a_0 = 0$ формулы для p_2 и q_2 аналогичны (5.4). Только здесь среднее значение

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [A_1^-(t)\chi^-(t) + A_1^+(t)\theta^+(t) + A_2^+(t)]dt.$$

Теорема 3. Обратимая система (5.1) всегда имеет СПД, притом единственное. СПД устойчиво при $\mu a_0 < 0$ и неустойчиво при $\mu a_0 > 0$. При $a_0 = 0$ свойство устойчивости СПД определяется знаком числа a_1: устойчивость при $a_1 < 0$ и неустойчивость при $a_1 > 0$.

Пример. Рассмотрим частный случай хорошо известной задачи – маятник с вибрирующей точкой подвеса при отсутствии силы тяжести

$$\ddot{z} = -\mu \cos t \sin z.$$

Очевидно, при любом μ маятник допускает два положения равновесия: $z = 0$ и $z = \pi$. Эти периодические движения и обнаруживаются при малых μ по теореме 3.

Исследуем устойчивость равновесия. Из формул (4.1) имеем

$$A_1^-(t) = 0, \quad A_1^+(t) = -\cos t$$

$$B_1^+(t) = B_1^-(t) = A_2^-(t) = A_2^+(t) = B_2^+(t) = B_2^-(t) \equiv 0.$$

Поэтому

$$p_1 = t\sin t + \cos t - 1, \quad q_1 = -t(1 + \cos t) + 2\sin t; \quad a_0 = 0, \quad a_0' = -\pi < 0,$$

и равновесие устойчиво.

При $\mu = 0$ маятник допускает равномерное 2π-периодическое вращение $z = nt$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $z = nt + \theta$. Тогда для θ получим уравнение

$$\ddot{\theta} = -\mu\cos t\sin(nt+\theta).$$

Согласно теореме 3, при малых $\mu \neq 0$ на равномерные вращения накладываются 2π-периодические колебания, задаваемые формулами (5.3):

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2}\left[\dfrac{\sin(n+1)t}{(n+1)^2} + \dfrac{\sin(n-1)t}{(n-1)^2}\right] + o(\mu), & n > 1 \\ -\dfrac{\mu}{4}\sin 2t + o(\mu), & n = 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Исследуем устойчивость движений (5.5). Из всех функций (4.1) не равна тождественному нулю только функция

$$A_1^+(t) = \begin{cases} -\cos^2 t, & n = 1 \\ -\dfrac{1}{2}[\cos(n-1)t + \cos(n+1)t], & n > 1. \end{cases}$$

При $n = 1$ вычислим $a_0 = -\pi < 0$. Значит, при $\mu \geq 0$ ($\mu < 0$) вращение, близкое к равномерному с $n = 1$, устойчиво (неустойчиво).

При $n > 1$ имеем $a_0 = 0$. Введем обозначения

$$s_{\alpha\beta}^{\pm}(t) = \frac{\sin^{\alpha}(n\pm 1)t}{2(n\pm 1)^{\beta}}, \quad c_{\alpha\beta}^{\pm}(t) = \frac{\cos^{\alpha}(n\pm 1)t}{2(n\pm 1)^{\beta}}.$$

Вычислим

$$p_1 = -(s_{11}^- + s_{11}^+)t - (c_{12}^- + c_{12}^+) + b$$

$$q_1 = (c_{12}^- + c_{12}^+)t + (s_{13}^- + s_{13}^+) + bt$$

$$b = \frac{(n^2+1)}{(n-1)^2(n+1)^2}, \quad a_1 = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^2(n-1)t}{(n-1)^2} + \frac{\cos^2(n+1)t}{(n+1)^2}\right]dt < 0.$$

Отсюда следует устойчивость движений (5.3) при $n > 1$; очевидно, свойство устойчивости не зависит от знака μ.

6. Рождение цикла в окрестности СПД “почти” резонансной системы. Результатам разд. 2–4 можно дать и такую трактовку. Рассматривается однопараметрическое (μ – параметр) семейство систем (1.3). При $\mu = 0$ система (1.3) допускает семейство СПД, в окрестности которого при $\mu \neq 0$ в общей ситуации рождаются циклы. Устойчивость этих циклов зависит от знака μ.

Аналогично трактуется результат и разд. 5. Только здесь, вместо семейства СПД имеем положение равновесия, принадлежащее неподвижному множеству.

Цикл в системе может возникнуть также в окрестности “опорного” СПД, если последнее “почти” резонансное. Здесь имеется в виду, что система (1.1) зависит от параметра ε и допускает семейство по параметру ε СПД, а при $\varepsilon = 0$ СПД резонансно. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ имеем изолированное, “почти” резонансное СПД. В окрестности “опорного” (нулевого) СПД имеем “почти” резонансную систему.

Близкая задача рассматривалась ранее для автономной системы [48, 49].

При рассмотрении цикла в "почти" резонансной системе используем общее утверждение о существовании периодических движений в обратимой системе с малым параметром ([49], теорема 1), а также нормальную форму. Укажем, что полученная нормальная форма позволяет провести "полную" классификацию фазовых портретов для системы в "общем положении", что требует отдельного рассмотрения. Для гамильтоновых систем классификация известна [50].

В окрестности выбранного СПД система также имеет вид (1.1), с тем лишь уточнением, что $U(0, 0, t) = V(0, 0, t) = 0$. Это означает, что система имеет нулевое СПД.

Будем полагать, что характеристические показатели $\pm\lambda$ чисто мнимые, а система "почти" резонансна

$$\lambda = \lambda_0 + i\varepsilon, \quad P\lambda_0 = iq, \quad P \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Z}; \quad \lambda_0 = \text{const}. \tag{6.1}$$

Тогда нормальная форма зависит от ε, а также от вида резонанса. Используем нормализующее преобразование, непрерывное по ε [51].

После этих предварительных замечаний перейдем к анализу отдельных случаев резонанса.

1°. $P > 4$. В этом случае нормальная форма в первом нелинейном приближении не зависит от порядка резонанса. В комплексно-сопряженных переменных η, $\bar{\eta}$ имеем

$$\dot{\eta} = \lambda\eta + iC_{11}(\varepsilon)\eta^2\bar{\eta} + H(\varepsilon, \eta, \bar{\eta}, t)$$

(C_{11} – действительное число). Выполним замену

$$\eta = w\exp(\lambda_0 t), \quad \bar{\eta} = \bar{w}\exp(-\lambda_0 t).$$

Тогда

$$\dot{w} = i\varepsilon w + iC_{11}(\varepsilon)w^2\bar{w} + W(\varepsilon, w, \bar{w}, t).$$

Наконец, в переменных радиус – угол запишем

$$\dot{r} = R(\varepsilon, t, \theta, t), \quad \dot{\theta} = \varepsilon + C_{11}(\varepsilon)r^2 + H(\varepsilon, r, \varphi, t).$$

Изменим масштаб и применим известный результат ([49], теорема 1). Тогда цикл определяется из амплитудного уравнения

$$\varepsilon + C_{11}(0)r^{0^2} = 0, \quad r^0 = \text{const}$$

и представляет СПД. Это СПД изолировано и существует, если только $\varepsilon C_{11}(0) > 0$.

Таким образом, при $P > 4$ всегда существует цикл, притом единственный. Период этого СПД равен $2\pi P$.

2°. $P = 4$ (резонанс четвертого порядка). Запишем нормальную форму в комплексно-сопряженных переменных w, $\bar{w}$ [46]

$$\dot{w} = i\varepsilon w + i[C_{11}(\varepsilon)w^2\bar{w} + C_{-1,3}(\varepsilon)\bar{w}^3] + W(\varepsilon, w, \bar{w}, t)$$

(C_{11}, $C_{-1,3}$ – постоянные). Тогда соответствующее амплитудное уравнение имеет вид

$$\varepsilon + (C_{11}^0 + C_{-1,3}^0\cos 4\theta^0)r^0 = 0, \quad \sin 4\theta^0 = 0 \tag{6.2}$$

(здесь и ниже верхний нулевой индекс указывает, что значение коэффициента берется при $\varepsilon = 0$). При $|C_{11}^0| \neq |C_{-1,3}^0|$ система всегда допускает циклы. Циклы представляют изолированные СПД с периодом 8π.

Из уравнения (6.2) видно, что в окрестности устойчивого опорного нулевого СПД ($|C_{11}^0| > |C_{-1,3}^0|$ [46]) при $\varepsilon \neq 0$ рождается 8 циклов, в противном случае 4 цикла при $\varepsilon C_{11}(0) > 0$ и остальные 4 цикла при $\varepsilon C_{11}^0 < 0$.

3°. $P = 3$ (резонанс третьего порядка). В рассматриваемом случае нормальная форма имеет простой вид [46]

$$\dot{w} = i\varepsilon w + iC(\varepsilon)\bar{w}^2 + W(\varepsilon, w, \bar{w}, t),$$

а амплитудное уравнение

$$\varepsilon + C^0\cos 3\theta^0\sqrt{r_1^0} = 0, \quad \sin 3\theta^0 = 0.$$

Опорное СПД неустойчиво [46], в окрестности опорного СПД рождаются 6 циклов с периодом 6π (3 цикла при $\varepsilon > 0$ и 3 цикла при $\varepsilon < 0$).

4°. $P = 2$, $|q|$ – нечетное число (параметрический резонанс). В этом случае опорное СПД, как правило, неустойчиво по первому приближению. Нормальная форма в переменных w, $\bar{w}$ имеет вид

$$\dot{w} = i\varepsilon\bar{w} + i[C_{20}(\varepsilon)w^2 + C_{02}(\varepsilon)\bar{w}^2 + C_{11}(\varepsilon)w\bar{w} + C_{-1,3}(\varepsilon)w^{-1}\bar{w}^3]w + W(\varepsilon, w, \bar{w}, t)$$

(C_{jk} – действительные постоянные). Перейдем к переменным радиус – угол

$$\dot{r} = 2\varepsilon r\sin 2\theta + 2(C_-\sin 2\theta - C_{-1,3}\sin 4\theta)r^2 + R(\varepsilon, r, \theta, t)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon\cos 2\theta + (C_{11} + C_+\cos 2\theta + C_{-1,3}\cos 4\theta)r + H(\varepsilon, r, \theta, t) \tag{6.3}$$

$$C_\pm = C_{02} \pm C_{20}.$$

Тогда существование СПД в виде цикла обнаруживается по амплитудному уравнению

$$\varepsilon\cos 2\theta^0 + (C_{11}^0 + C_+^0\cos 2\theta^0 + C_{-1,3}\cos 4\theta^0)r^0 = 0 \tag{6.4}$$

($\sin 2\theta^0 = 0$). Отсюда получим

$$r^0 = -\frac{\varepsilon}{C_{11}^0 \pm C_+^0 + C_{-1,3}}.$$

Знак плюс отвечает циклу $\theta^0 = 0, \pi$, а минус – циклу $\theta^0 = \pi/2, 3\pi/4$.

Видно, что при каждом знаке ε рождаются по 2 цикла, эти циклы СПД имеют период 4π.

Особенность рассматриваемого резонанса – существование несимметричного цикла. Составим систему амплитудных уравнений [48] для системы (6.3). Одним из этих уравнений будет (6.4). Другое уравнение такое:

$$\varepsilon + (C_- - 2C_{-1,3}\cos 2\theta^0)r^0 = 0. \tag{6.5}$$

Выразим отсюда ε и подставим в уравнение (6.4). Получим квадратное уравнение

$$C_{11}^0 - C_{-1,3}^0 + (C_+^0 - C_-^0)\cos 2\theta^0 + 4C_{-1,3}\cos^2 2\theta^0 = 0, \tag{6.6}$$

из которого определим один или два значения $\cos 2\theta^0$, удовлетворяющие условию $|\cos 2\theta^0| < 1$.

Таким образом, при выполнении очевидных условий, накладываемых на коэффициенты уравнений (6.5), (6.6), система имеет 4 или 8 несимметричных циклов с периодом 4π.

5°. $P = 1$ (главный резонанс). Нормальная форма при этом резонансе отличается от случая $P = 2$ нелинейными членами и имеет вид

$$\dot{w} = i\varepsilon\bar{w} + i(C_{10}w^2 + C_{01}w\bar{w} + C_{-1,2}\bar{w}^2) + W(\varepsilon, w, \bar{w}, t).$$

Тогда в переменных радиус – угол получим

$$\dot{r} = 2\varepsilon r\sin 2\theta + 2(C_{-}\sin 2\theta - C_{-1,2}\sin 3\theta)r\sqrt{r} + R(\varepsilon, w, \bar{w}, t)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon\cos 2\theta + (C_{+}\cos\theta + C_{-1,2}\cos 3\theta)\sqrt{r} + H(\varepsilon, w, \bar{w}, t)$$

$$C_{\pm} = C_{01} \pm C_{10}.$$

Составим систему амплитудных уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon\sin 2\theta^0 + (C_{-}^0\sin\theta^0 + C_{-1,2}^0\sin 3\theta^0)\sqrt{r^0} = 0 \\ &\varepsilon\cos 2\theta^0 + (C_{+}^0\cos\theta^0 + C_{-1,2}^0\cos 3\theta^0)\sqrt{r^0} = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Решения системы (6.7), когда $\sin\theta^0 = 0$, определяют симметричные циклы

$$r^0 = \left(\frac{\mp\varepsilon}{C_{+}^0 + C_{-1,2}}\right)^2, \quad \cos\theta^0 = \pm 1.$$

Очевидно, что при $C_{+}^0 \neq C_{-1,2}^0$ цикл – единственный. Цикл представляет СПД с периодом 2π.

Простые корни системы (6.7), на которых $\sin\theta^0 \neq 0$, определяют несимметричные циклы

$$r^0 = \left[\frac{-2\varepsilon\cos\theta^0}{C_{-}^0 + C_{-1,2}^0(1 + 2\cos 2\theta^0)}\right]^2, \quad \cos 2\theta^0 = \frac{C_{-}^0 - C_{+}^0}{C_{+}^0 - C_{-1,2}^0}. \tag{6.8}$$

Таких циклов четыре. Период движения по ним равен 2π.

Суммируем выводы разд. 6.

Теорема 4. В почти резонансной системе (6.1) всегда рождаются циклы, представляющие СПД с периодом $2P\pi$. В случае параметрического ($P = 2$) и главного ($P = 1$) резонанса вместе с симметричным циклом рождаются также несимметричные циклы.

7. Возможные сценарии рождения циклов.

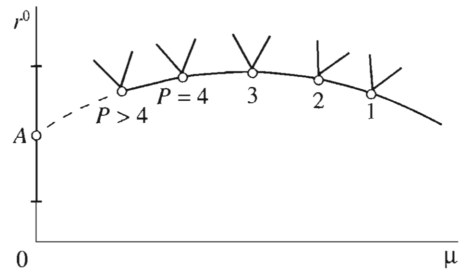
1°. Равновесие автономной системы устойчиво в линейном приближении, система "почти" резонансна. При $\mu \neq 0$ (периодические возмущения) возникают симметричные циклы, а в случае $P = 1, 2$ также и несимметричные циклы (теорема 4).

2°. То же самое справедливо для окрестности СПД периодической системы (теорема 4).

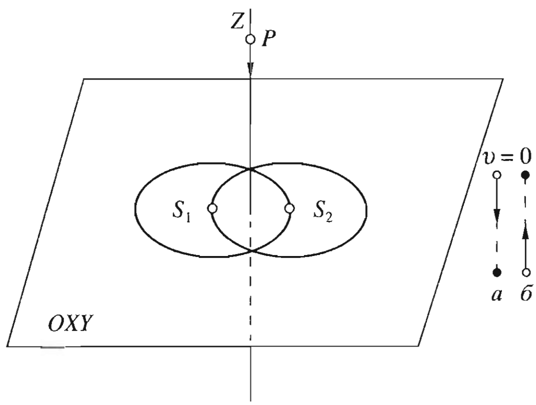
3°. Автономная система имеет единственное равновесие, принадлежащее неподвижному множеству. При $\mu \neq 0$ возникает единственный цикл (теорема 3).

4°. Порождающая автономная система имеет семейство СПД, на котором период $T(h)$ зависит от параметра h. При $\mu \neq 0$ возникает единственный цикл, если возмущения 2π – периодические, $dT(2\pi) \neq 0$.

Приведем диаграмму, отражающую рождение циклов в системе с параметром μ. При $\mu = 0$ система автономна и имеет семейство СПД с периодом $T(h)$ (выделено на фиг. 2 отрезком на оси r^0). В точке A выполняется условие $dT(2\pi) \neq 0$. При малых $\mu > 0$ возникают



Фиг. 2



Фиг. 3

циклы, зависящие от параметра μ. При малых μ характеристические показатели $\pm\kappa$ близки к нулю. На ветви, отвечающей устойчивым опорным СПД (после показанного штрихом участка кривой), светлые точки отражают резонансные ситуации, здесь возникают циклы (период $2P\pi$). Монотонную зависимость $\pm\kappa$ от μ отражают последовательно расположенные точки резонансов.

8. Один специальный вариант фотогравитационной задачи трех тел (задача Ситникова). Рассмотрим движение частицы **P** вдоль неподвижной прямой OZ в гравитационно-репульсивном поле двух идентичных притягивающих и одновременно излучающих тел $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ (двойная звезда). Основные тела $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ обращаются друг относительно друга по эллиптическим орбитам в плоскости OXY, а прямая OZ проходит через их центр масс O перпендикулярно плоскости OXY (фиг. 3)

Движение частицы **P** описывается периодическим уравнением второго порядка [22]

$$z'' + \frac{z}{1 + e\cos\upsilon}\left(e\cos\upsilon + \frac{Q}{R^3}\right) = 0, \quad R^2 = \frac{1}{4} + z^2 \qquad (8.1)$$

(e и υ – эксцентриситет и истинная аномалия в задаче двух тел $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$, Q – коэффициент редукции, характеризующий излучающее действие двойной звезды на частицу ($Q \leq 1$), z – расстояние частицы от центра масс, штрих означает производную по υ). Уравнение (8.1) обратимо в смысле инвариантности относительно замен $(z, z', \upsilon) \to (\pm z, \mp z', -\upsilon)$ и имеет два неподвижных множества.

Укажем, что уравнения движения фотогравитационной задачи трех тел [52, 53] допускают интегральное многообразие, на котором $x = y = 0$, а координата z меняется в соответствии с уравнением (8.1) [22].

При $Q = 1$ основные тела не излучают. В этой задаче К.А. Ситников [2] доказал существование осциллирующих движений, а В.М. Алексеев нашел "возможность применения методов символической динамики" [4] и решил проблему Шази финальных движений в задаче трех тел [4, 54]. С другой стороны, уравнение (8.1) – пример простейшей интегрируемой системы, богатой содержанием во всех отношениях. Поэтому исследованию уравнения (8.1) посвящены многочисленные работы (краткий обзор см. в [8]), которые продолжают появляться [17–22]. Задачу (8.1) при $Q = 1$ называют задачей Ситникова [8, 17–21].

Цель дальнейшего рассмотрения – исследовать всевозможные СПД в задаче (8.1) с произвольным физически допустимым параметром Q ($Q \le 1$). При этом систематически применяется теория, развитая в разд. 2–6.

1°. *Круговая задача* ($e = 0$). В этом случае имеем консервативную систему с одной степенью свободы и интегралом энергии

$$z'^2 = 2\left(h + \frac{Q}{R}\right), \quad h = \text{const}.$$

Значит, при $Q > 0$ (сила ньютоновского притяжения превосходит силу светового давления) частица совершает симметричные относительно точки O колебания вдоль прямой OZ, если $h < 0$; при $h \ge 0$ все движения частицы – уходящие, как при $t \to +\infty$.

В случае $Q < 0$ имеем $h > 0$. Получим три типа движений:

1) частица приходит из точки $z = +\infty(-\infty)$, приближается на конечное расстояние к точке O и уходит на $+\infty(-\infty)$,

2) частица движется от $+\infty(-\infty)$ к $-\infty(+\infty)$,

3) частица входит в точку O при $t \to +\infty(-\infty)$.

Представим теперь ансамбль частиц $\mathbf{P}_j$, расположенных на оси OZ. Так как коэффициент редукции Q в фотогравитационной задаче трех тел зависит не только от излучающих свойств тел $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$, но также от характеристик индивидуальной частицы $\mathbf{P}_j$, то в рассматриваемом ансамбле частица $\mathbf{P}_j$ движется в соответствие с уравнением (8.1), каждая со своим коэффициентом редукции Q_j. Энергия частицы h_j случайным образом определяется начальными условиями. В результате "наблюдается" ансамбль хаотически движущихся частиц. Такое впечатление создают частицы, некоторые из которых колеблются, каждая со своей частотой, другие движутся к плоскости OXY, а иные удаляются от этой плоскости, каждая неравномерно, с индивидуальной скоростью.

2°. *Слабоэллиптическая задача* ($0 < e \ll 1$). Здесь при анализе симметричных периодических орбит частицы используем выводы теорем 1, 2.

Сначала сделаем одно существенное замечание. Обратимое уравнение (8.1) имеет два неподвижных множества. Поэтому оно может допускать движения, симметричные относительно множества $\mathbf{M}_1 = \{z, \dot{z}, \upsilon : \dot{z} = 0, \sin\upsilon = 0\}$ или $\mathbf{M}_2 = \{\dot{z}, \upsilon : z = 0, \sin\upsilon = 0\}$. Некоторые из этих движений могут быть симметричными одновременно относительно обоих множеств – двоякосимметричные движения (см. также [20]). Укажем, что семейство колебаний в круговой задаче состоит из двоякосимметричных движений.

Вычислим период колебательных движений при $e = 0$

$$T = 4\int\limits_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{2(h + Q/R)}}, \quad z_0^2 = \frac{h^2}{Q^2} - \frac{1}{4}, \quad h < 0, \quad Q > 0$$

(z_0 – амплитуда колебаний). Положим

$$2z = \operatorname{tg}\theta, \quad 2z_0 = \operatorname{tg}\theta_0 \quad (0 < \theta, \theta_0 < \pi/2).$$

Тогда

$$T = \frac{1}{\sqrt{Q}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Теперь выполним замену

$$\sin\frac{\theta}{2} = ku, \quad \sin\frac{\theta_0}{2} = k, \quad \cos\theta - \cos\theta_0 = 2k(1-u^2), \quad d\theta = \frac{2kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}}.$$

В результате имеем следующее окончательное выражение:

$$T = \sqrt{\frac{2}{Q}}\int_0^1\frac{du}{f(k,u)}; \quad f(k,u) = (1-2k^2u^2)^2\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{8.2}$$

которое дает явную зависимость $T = T(Q, k)$

Период T – функция амплитуды колебаний(параметра k). Из выражения (8.2) видно, что всегда $dT/dk > 0$. Кроме того, $T(Q, k) \to \infty$ при $k \to \sqrt{2}/2$. В соответствии с теоремой 1 при $e > 0$ в слабоэллиптической задаче при каждом $q \in \mathbb{N}$ рождаются два СПД периода $2\pi q$. Одно из них симметрично относительно множества $\mathbf{M}_1$, другое – относительно множества $\mathbf{M}_2$.

Теорема 5. В слабоэллиптической задаче Ситникова (8.1) с $Q > 0$ при каждом $q \in \mathbf{N}$ рождаются два СПД периода $2\pi q$. При $\upsilon = 0$ на первом движении имеем $z(0) = z_0 \neq 0$, $z'(0) = 0$ (фиг. 3, случай а), на втором – $z(0) = 0$, $z'(0) = z_0' \neq 0$ (фиг. 3, случай б).

3°. Устойчивость положения равновесия. Уравнение (8.1) допускает очевидное – нулевое равновесие. В исходной фотогравитационной задаче трех тел [52, 53] это решение отвечает внутренней коллинеарной точке либрации.

Уравнение (8.1) приводится к простому виду

$$\ddot{\zeta} = -\frac{fmQ\zeta}{(\zeta^2 + r^2)^{3/2}}, \quad \zeta = rz \tag{8.3}$$

(r – расстояние между телами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ в эллиптическом движении, точка означает дифференцирование по времени t, m – суммарная масса тел, f – гравитационная постоянная). Отсюда следует неустойчивость положения равновесия при $Q < 0$.

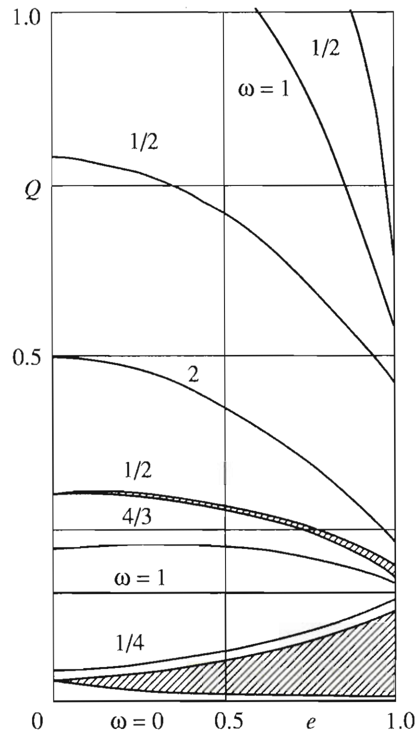
При $Q > 0$ равновесие устойчиво в слабоэллиптической задаче, если нет параметрического резонанса. Частота колебаний в круговой задаче равна $\omega = 2\sqrt{2Q}$; значит, при $Q = 1/32$ частота становится резонансной ($2\omega = 1$).

В окрестности равновесия получим уравнение Матье вида

$$z'' + [\omega^2 - (\omega^2 - 1)e\cos\upsilon]z = 0.$$

Поэтому параметрический резонанс приводит к неустойчивости.

Исследуем устойчивость положения равновесия в эллиптической задаче. Для этого построим одно решение задачи Коши на отрезке $\upsilon \in [0, 2\pi]$ и по формуле (1.6) вычислим характеристические показатели. Далее применим теорему об устойчивости для невырожденных ситуаций [43]. В результате на плоскости (e, Q) выделяются области устойчивости (неустойчивости) и резонансные кривые (фиг. 4)



Фиг. 4

4°. *СПД в эллиптической задаче.* Теорема 5 гарантирует существование при малых e двух СПД периода $2\pi q$ ($q \in \mathbf{N}$). Из выражения (8.2) следует условие $2\sqrt{2Q}\,q \geq 1$, определяющее нижнюю границу Q возникновения СПД. Так, СПД периода 2π имеются в задаче только при $Q \geq 1/8$.

Периодические движения, найденные в слабоэллиптической задаче, можно продолжить численно на конечные значения эксцентриситета e. Однако здесь предпочтительнее использовать метод [34], позволяющий построить все СПД задачи. При учете наличия двух неподвижных множеств в уравнении (8.1) использование указанного метода приводит к построению при каждом фиксированном $q \in \mathbf{N}$ двух семейств СПД от параметра e.

Отметим, что метод [34] дает возможность не только продолжить СПД, установленные в теореме 5, но и найти все другие СПД.

Необходимые и достаточные условия существования первого семейства СПД имеют вид

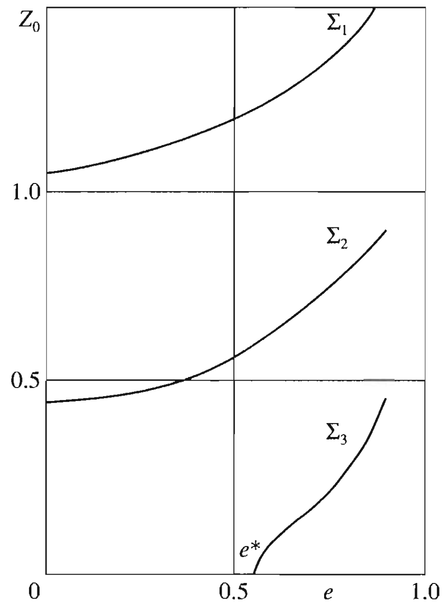
$$z(0) = z_0\ (\mathrm{const}), \quad z'(0) = 0, \quad z'(\pi q) = 0. \tag{8.4}$$

На втором семействе получим

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = z_0'\ (\mathrm{const}), \quad z(\pi q) = 0. \tag{8.5}$$

При $z_0 = z_0' = 0$ имеем тривиальное СПД (равновесие).

Рассмотрим процесс построения движения, удовлетворяющего условиям (8.4). Разобьем отрезок $[0, a]$ оси z точками z_{0k} ($k = 0, 1, \ldots, l$): $0 = z_{00} < z_{01} < \ldots < z_{0l} = a$. Выпустим из каждой точки z_{0k} при $\upsilon = 0$ траекторию со скоростью $z_k'(0) = 0$. Тогда при $\upsilon = \pi q$ концы этих траекторий принадлежат кривой Γ, причем точки $\Gamma_k = \{z_k(\pi k), z_k'(\pi k)\} \subset \Gamma$, $\Gamma_0 = \{0, 0\}$.



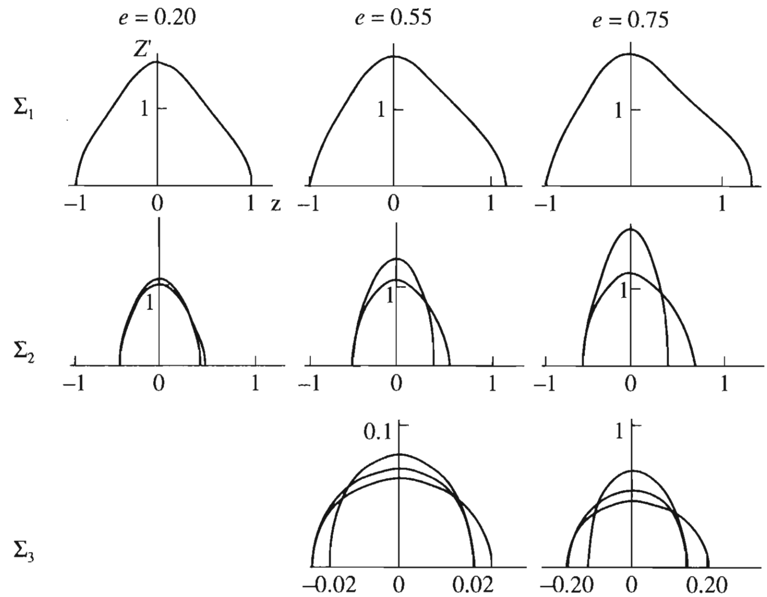
Фиг. 5

Если A – точка пересечения кривой Γ с осью z, то в соседних с ней точках Γ_k и Γ_j имеем $z_k'(\pi k)z_j'(\pi k) < 0$. Это условие устанавливает сам факт существования СПД. Точность построения СПД определяется выбранным методом решения задачи Коши. Выбор точек z_{0k} проведен методом золотого сечения. Схема исследования устойчивости СПД изложена в разд. 1.

Результаты исследования СПД периода 2π приведены для $Q = 1$ (задача Ситникова). На фиг. 5 даны начальные точки z_0 (см. фиг. 3, случай а) для движений (8.4), образующих семейство Σ по параметру e. Это семейство состоит из трех подсемейств Σ_1, Σ_2, Σ_3. Подсемейство Σ_1 рождается при $e = 0$ из СПД периода 2π круговой задачи при $e > 0$ и устойчиво до тех пор, пока $e < e_* < 0.55$. В дальнейшем происходит смена устойчивости, и при $e > e_*$ СПД подсемейства Σ_1 становятся неустойчивыми. Подсемейство Σ_2 при $e = 0$ рождается из СПД периода $2\pi/3$, при $e > 0$ состоит из неустойчивых СПД. Смена устойчивости СПД на Σ_2 происходит также в точке $e = e_*$. Третье подсемейство, Σ_3, рождается при $e = e_*$ из локальных СПД и неустойчиво.

На кривых семейства Σ справедлив закон смены устойчивости при фиксированном значении e. При $e < e_*$ знак устойчивости на кривых Σ_1, Σ_2 разный (семейство Σ_1 устойчиво, Σ_2 неустойчиво), при $e = e_*$ рождается подсемейство Σ_3, и при $e > e_*$ имеем: семейство Σ_1 неустойчиво, Σ_2 устойчиво.

Интересным представляется вопрос о двоякосимметричности построенных СПД; он обсуждался [20] с точки зрения существования логически возможных СПД. На фиг. 6 при характерных значениях e приведены фазовые кривые для СПД в полуплоскости $z' \geq 0$. Подсемейства Σ_1, Σ_2 состоят из СПД, симметричных относительно только оси z (неподвижного множества $\mathbf{M}_1$), в то время как СПД на кривой Σ_3 симметричны относительно как оси z, так и оси z' (множеств $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$). Это и неудивительно, ибо теорема 1 гарантирует единственность продолжения подсемейств Σ_1 и Σ_2, которые не имеют точек ветвления. Что касается подсемейства S_3, то оно рождается при $e = e_* \neq 0$ из двоякосимметричного СПД и остается таковым.



Фиг. 6

Интересно сравнить результаты для семейства Σ с результатами для семейства Σ*, которое удовлетворяет условиям (8.5). Эти результаты также получены и опущены за недостатком места.

Задача об исследовании всех СПД периода $2\pi q$ ($q > 1$) интересна в связи с возможными бифуркациями, а также в связи с неустойчивыми СПД, имеющими начальные точки, близкие к начальным точкам для осциллирующих движений [2].

Наконец, представляет интерес изучение всех СПД в фотогравитационном варианте задачи Ситникова ($0 < Q < 1$).

Автор благодарит В.В. Румянцева и редакцию ПММ за поддержку, а Ю.Д. Глухих и Н.В. Тхая за проведенные расчеты и помощь при оформлении рукописи статьи. Автор благодарит рецензента за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00052), программы Минобразования России (Т02-14.0-1804) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ"(НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stoker J.J.* Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. N.Y.: Intersci., 1950 = *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 264 с.
2. *Ситников К.А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
3. *Белецкий В.В.* О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1959. № 3. С. 13–31.
4. *Алексеев В.М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики // Девятая летняя матем. школа. Сб. трудов. Киев: Наук. думка, 1976. С. 212–341.
5. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа “маятник”. Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.

6. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 223 с.
7. *Брюно А.Д.* Семейства периодических решений уравнения Белецкого // Космич. исследования. 2002. Т. 40. № 3. С. 295–316.
8. *Dvorak R.,Vrabec F., Wodnar K.* The Sitnikov Problem: A Short Review // Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative- Dinamica del Volo Spaziale. Eds A. Celetti and E. Rerozzi. Università di L'Aquila, 1993. P. 16–22.
9. *Журавлев В.Ф.* Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 16–23.
10. *Морозов А.Д.* К задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 590–598.
11. *Холостова О.В.* Некоторые задачи о движении маятника при горизонтальных вибрациях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 581–589.
12. *Бардин Б.С., Маркеев А.П.* Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
13. *Холостова О.В.* О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–800.
14. *Холостова О.В.* Об устойчивости "спящего" волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 858–868.
15. *Levi M.* Stability of the inverted pendulum – a topological explanation// SIAM Review. 1988. V. 30. № 4. P. 639–644.
16. *Broer H.W., Hoveijn I., van Noort M.* A reversible bifurcation analysis of inverted pendulum // Physica D. 1998. V. 112. № 1–2. P. 50–63.
17. *Chesley S.R.* A global analysis of the generalized Sitnikov problem // Celestial Mech. and Dynam. Astronomy. 1999. V.73. № 1/4. P. 291–302.
18. *Dvorak R., Sun Yi Sui.* The phase space structure of the extended Sitnikov–problem // Celestial Mech. and Dynam. Astronomy. 1997. V. 67. № 1. P. 87–106.
19. *Jalali M.A., Pourtakdoust S.H.* Regular and chaotic solutions of the Sitnikov problem near the 3/2 commensurability // Celestial Mech. and Dynam. Astronomy. 1997. V. 68. № 2. P. 151–162.
20. *Corbera M., Llibre J.* Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincaré map // Celestial Mech. and Dynam. Astronomy. 2000. V. 77. № 4. P. 273–303.
21. *Jiménez-Lara L., Escalona-Buendia A.* Symmetries and bifurcations in the Sitnikov problem // Celestial Mech. and Dynam. Astronomy. 2001. V. 79. № 2. P. 97–117.
22. *Тхай В.Н.* Прямолинейные движения частицы в поле двойной звезды// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2001. Ч. 1. С. 30–36.
23. *Гродман Д.Л., Тхай В.Н.* Вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационных сил и светового давления // Моделирование и исследование сложных систем. М.: Изд-во МГАПиИ, 1998. Ч. 3. С. 376–385.
24. *Гродман Д.Л., Тхай В.Н.* Численное исследование периодических движений спутника на эллиптической орбите под действием гравитационных сил и светового давления // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 107–116.
25. *Глухих Ю.Д., Тхай В.Н.* 2π-периодические вращательные движения спутника под действием гравитационных и аэродинамических моментов // Моделирование и исследование сложных систем. М.: Изд-во МГАПиИ, 1998. Ч. 3. С. 363–375.
26. *Глухих Ю.Д., Тхай В.Н.* Периодические движения механической системы с одной степенью свободы // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.:ВЦ РАН, 1999. С. 100–112.
27. *Глухих Ю.Д., Гриханова Т.В.* Об устойчивости 2π-периодических вращательных движений спутника в плоскости эллиптической орбиты в пространтсвенной задаче // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.:ВЦ РАН, 2000. Ч. 2. С. 142–148.
28. *Бучин В.О., Глухих Ю.Д.* Исследование вращений спутника в плоскости эллиптической орбиты // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2001. Ч. 1. С. 95–99.

29. *Глухих Ю.Д., Тхай В.Н.* Колебания спутника в плоскости слабоэллиптической под действием гравитационных и аэродинамических моментов // Третьи поляховские чтения. Сб.трудов. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПб ун-та, 2003. С. 137–142.
30. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems:A survey // Physica D. 1998. V. 112. № 1–2. P. 1–39.
31. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
32. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Вторые Поляховские чтения. Избр. тр. СПб: Изд-во НИИ Химии СПб ун-та, 2000. С. 115–127.
33. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. М.:Физматлит, 2001. С. 131–146.
34. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 179–195.
35. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Готехиздат. 1956. 491 с.
36. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
37. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
38. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. V.1. Paris: Gauthie-Villars, 1892 = *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
39. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова – Пуанкаре в теории периодических движений// ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 38–50.
40. *Тхай В.Н.* Периодические движения системы, близкой к автономной обратимой системе // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 661–680.
41. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
42. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–267.
43. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 143 с.
44. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
45. *Матвеев М.В.* Устойчивость по Ляпунову положений равновесия обратимой системы // Мат. заметки 1995. Т. 57. Вып. 1. С. 90–104.
46. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
47. *Тхай В.Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
48. *Тхай В.Н.* Цикл в системе, близкой к резонансной системе // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 252–272.
49. *Тхай В.Н.* Резонансные ляпуновские семейства периодических движений обратимых систем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. 384–401.
50. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
51. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
52. *Радзиевский В.В.* Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрономич. ж. 1950. Т. 27. Вып. 4. С. 249–258.
53. *Kunitsyn A.L. and Polyakhova E.N.* The restricted photogravitational three-body problem: The modern state // Astron. and Astrophys. Trans. 1995. V. 6. № 4. P. 283–293.
54. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 4. С. 161–175.

Москва
e-mail: tkhai@ipu.rssi.ru

Поступила в редакцию
25.II.2004