

УДК 531.36:62–50

© 2006 г. М. С. Ефремов, А. Е. Поляков, В. В. Стрыгин

АЛГОРИТМ АКТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ВЯЗКОУПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предлагается основанный на релейной обратной связи с запаздыванием алгоритм стабилизации углового положения космического аппарата с упругими динамическими элементами, обладающими диссипативными свойствами. Управление осуществляется в условиях неопределенности. Точность управления демонстрируется на численном примере.

Задача об управлении твердым телом с гибкими элементами активно исследовалась в последней четверти прошлого века. В рамках линейной теории рассматривался вопрос синтеза управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость решений системы, а также оптимальность управлений [1–3]. Исследовалось влияние вязкого демпфирования на устойчивость процесса управления [4]. В задачах механики космического полета решался вопрос о стабилизации спутников с вязкоупругими панелями солнечных батарей [5, 6].

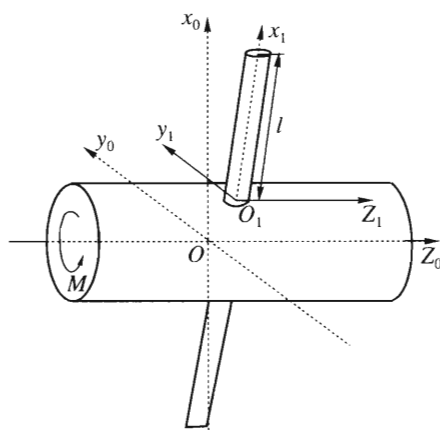
В последнее время определился и значительно расширился круг задач механики космического полета, решаемых на большом временном отрезке, учитывающих параметрическую неопределенность, неизвестные внешние возмущения, неопределенное время запаздывания в исполнительных и наблюдательных элементах, неполную наблюдаемость системы, дискретность современных цифровых систем управления, необходимость гашения колебаний упругих элементов, быстрые и медленные переменные для систем с бесконечным числом степеней свободы, влияние гравитационных сил.

Недавно была предложена [7] новая удачная схема управления космическим аппаратом (КА) в условиях параметрической неопределенности, слабого собственного демпфирования упругих колебаний конструкции, дискретного измерения только доступных координат и наличия запаздывания при формировании управления. Был разработан [8] релейный профильный алгоритм управления, обеспечивающий уменьшение амплитуды колебаний упругих элементов при ориентации КА. Исследована эволюция движения спутника с вязкоупругими стержнями на круговой орбите при учете влияния гравитационных сил [9].

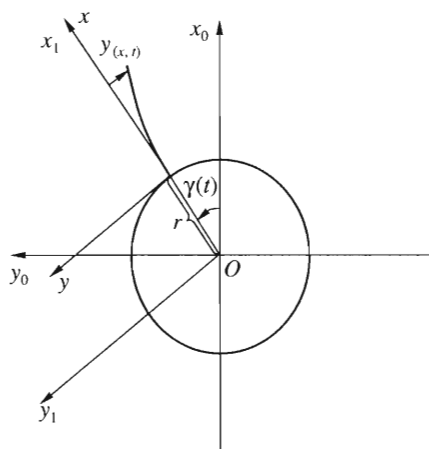
Ниже рассматривается задача стабилизации углового положения КА с двумя упругими динамическими элементами относительно его центра масс с помощью газореактивных двигателей, обладающих неизвестным запаздыванием. Предлагаются два новых релейных алгоритма управления КА с учетом неопределенного запаздывания и внешних возмущений. Один алгоритм получен путем синтеза традиционного двухимпульсного оптимального управления и локального релейного алгоритма стабилизации [10]. Другой алгоритм обеспечивает нелокальную стабилизацию системы [11]. Аналогичные вопросы рассматривались ранее [10–14].

1. Постановка задачи. Рассмотрим космический аппарат (КА), представляющий собой твердое тело с двумя упругими динамическими элементами (стержнями) (фиг. 1). Предполагается, что идентичные вязкоупругие стержни закреплены симметрично и колебания упругой конструкции малы. Будем рассматривать управляемое движение только вокруг продольной оси КА. Пусть стержни совершают антисимметричные колебания, поэтому можно ограничиться рассмотрением только одного стержня, а эффект их воздействия на основное тело удвоить. Подобная задача уже рассматривалась в литературе (см., например [2]).

Введем следующие обозначения: r – расстояние от продольной оси до точки крепления стержня, l – длина стержня; EI – изгибная жесткость стержня, χ – коэффициент



Фиг. 1



Фиг. 2

внутреннего вязкого трения, m – погонная масса стержня, J_0 – момент инерции КА относительно оси OZ , M – управляющий момент, приложенный к КА.

Пусть первые три системы координат определены следующим образом: $Ox_0y_0z_0$ – инерциальная система координат с началом O в центре масс механической системы, $Ox_1y_1z_1$ – система координат, жестко связанная с КА, с началом в точке O , а $O_1x_0y_0z_0$ – система координат, связанная с недеформированным стержнем, с началом в точке O_1 .

Положение системы $Ox_1y_1z_1$ определяется углом $\gamma(t)$ поворота КА. Отклонение стержня от оси O_1x обозначим через $y(x, t)$ (фиг. 2).

Рассматривая интеграл действия и считая его вариацию, стандартными методами получим уравнения свободных колебаний системы

$$J\ddot{\gamma}(t) + 2 \int_0^l m(x+r) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = 0, \quad J = J_0 + 2 \int_0^l m(x+r)^2 dx$$

$$m(x+r)\ddot{y} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0$$

с граничными условиями

$$y(0,t) = \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0.$$

Здесь J – момент инерции всей системы.

Если управление осуществляется моментом $u(t-h(t))$, приложенным к телу, стержни обладают диссипативными свойствами и на твердое тело действуют внешние возмущения f , то уравнения свободных колебаний системы примут вид

$$J\ddot{y}(t) + 2 \int_0^l m(x+r) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = u(t-h(t)) + f \tag{1.1}$$

$$m(x+r)\ddot{y} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + EI\chi \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t \partial x^4} = 0. \tag{1.2}$$

Используя метод Бубнова, можно считать приближенно, что

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^k q_i(t) \Phi_i(x), \tag{1.3}$$

где $\Phi_i(x)$ – собственная форма, соответствующая положительному собственному значению λ_i положительного самосопряженного оператора

$$L\Phi(x) = \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4}, \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(l) = \Phi'''(l) = 0,$$

причем

$$\frac{d^4 \Phi_i(x)}{dx^4} \equiv \lambda_i \Phi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Подставим представление (1.3) в уравнения (1.1), (1.2). Затем уравнение, полученное при подстановке в уравнение (1.2), умножим на $\Phi_i(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$, используя свойство ортогональности собственных функций. В результате имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения γ и q_i

$$J\ddot{\gamma} + 2 \sum_{i=1}^k p_i \ddot{q}_i = u(t-h(t)) + f \tag{1.4}$$

$$p_i \ddot{\gamma} + a_i \ddot{q}_i + b_i \dot{q}_i + c_i q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{1.5}$$

где

$$p_i = \int_0^l m(x+r) \Phi_i(x) dx, \quad a_i = m\kappa_i, \quad b_i = \lambda_i EI \chi \kappa_i, \quad c_i = \lambda_i EI \kappa_i; \quad \kappa_i = \int_0^l \Phi_i^2(x) dx,$$

а величина f теперь характеризует не только внешние возмущения, но и неточности модели, связанные с приближенным представлением $y(x, t)$.

Обозначим

$$\beta = J\gamma + 2 \sum_{i=1}^k p_i q_i.$$

В этом случае система (1.4), (1.5) эквивалентна системе

$$\ddot{\beta} = u(t - h(t)) + f, \quad (JA - 2\mathbf{p}\mathbf{p}^T)\dot{\mathbf{q}} + JB\dot{\mathbf{q}} + JC\mathbf{q} = -\mathbf{p}(u(t - h(t)) + f), \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)^T, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)^T$$

$$A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_k\}, \quad B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_k\}, \quad C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_k\}.$$

Важно отметить, что здесь переменные β и \mathbf{q} разделены.

Пусть симметрическая матрица $JA - 2\mathbf{p}\mathbf{p}^T$ положительно определена. Можно показать, что невозмущенная разомкнутая система для системы (1.6) без учета диссипации имеет спектр, состоящий из одного нулевого корня кратности 2 и k комплексно сопряженных пар, лежащих на мнимой оси. (Для этого достаточно воспользоваться некоторыми утверждениями из линейной алгебры о регулярных пучках квадратичных форм [15]). В случае малой диссипации в упругих элементах комплексно-сопряженные пары сместятся в левую комплексную полуплоскость, обеспечив тем самым устойчивость подсистемы, соответствующей упругим элементам, а нулевой кратный корень по-прежнему не изменится.

Будем строить управление, обеспечивающее стабилизацию величины β . В силу устойчивости подсистемы для упругих элементов при малых возмущениях и малом управлении для больших времен колебания упругих элементов будут малы.

Следует отметить, что зачастую величины q_i напрямую ненаблюдаемы, поэтому для синтеза управления с обратной связью по переменной β может потребоваться построение наблюдателя.

2. Притягивающее управление. Обозначим $v = \dot{\beta}$ и в фазовой плоскости (β, v) исследуем динамический поток

$$\dot{\beta} = v, \quad \dot{v} = u, \quad (2.1)$$

где u может принимать только два значения: $+1, -1$. Пусть на некотором временном отрезке $[t_0, t_1]$ справедливо тождество $u \equiv 1$. Тогда система (2.1) имеет вид

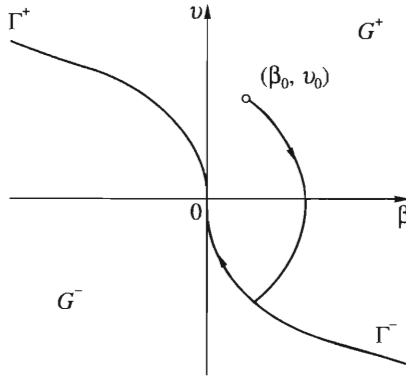
$$d\beta/dt = v, \quad dv/dt = 1.$$

Отсюда вытекает, что $v^2 - 2\beta = c_1$. При $u = -1$ на отрезке $[t_0, t_1]$ имеем

$$d\beta/dt = v, \quad dv/dt = -1, \quad v^2 + 2\beta = c_2.$$

Таким образом, в фазовой плоскости (β, v) движение реализуется по двум семействам парабол

$$v^2 - 2\beta = c_1, \quad u = 1; \quad v^2 + 2\beta = c_2, \quad u = -1.$$



Фиг. 3

Выделим две ветви парабол

$$\Gamma^+ : v^2 + 2\beta = 0, \quad v \geq 0; \quad \Gamma^- : v^2 - 2\beta = 0, \quad v \leq 0.$$

Наконец, в фазовой плоскости (β, v) определим две области начальных данных

$$G^+ = \begin{cases} v^2 + 2\beta \geq 0, & v \geq 0 \\ v^2 - 2\beta < 0, & \beta > 0, \end{cases} \quad G^- = \begin{cases} v^2 + 2\beta \leq 0, & \beta \leq 0 \\ v^2 - 2\beta > 0, & v < 0. \end{cases}$$

Притягивающее управление u будет определяться лишь принадлежностью начальной точки (β_0, v_0) областям G^+ или G^- . Пусть $(\beta_0, v_0) \in G^+$ (фиг. 3). Тогда точка $(\beta(t), v(t))$ на первоначальном временном интервале $(0, T_1)$ движется по параболе

$$v^2 + 2\beta = \gamma_0; \quad \gamma_0 = v_0^2 + 2\beta_0$$

до момента T_1 встречи с кривой Γ^- в точке (β_1, v_1) . Простой подсчет показывает, что

$$\beta_1 = \gamma_0/4, \quad v_1 = -\sqrt{\gamma_0/2}.$$

При этом $T_1 = v_0 + \sqrt{\gamma_0/2}$. На втором интервале (T_1, T_2) фазовая траектория движется по кривой Γ^- влево и приходит в начало координат за время $T_2 - T_1$; здесь $T_2 = v_0 + 2\sqrt{\gamma_0/2}$.

В дальнейшем следует положить $u = 0$. Таким образом, для $(\beta_0, v_0) \in G^+$

$$u = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_1 \\ -1, & T_1 < t \leq T_2 \\ 0, & t > T_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Качественная картина для случая $(\beta_0, v_0) \in G^-$ аналогична.

3. Локальная стабилизация. Поскольку управление u обладает некоторым запаздыванием и на систему действуют неизвестные внешние возмущения, то при малых $h(t)$ и $f(t)$, используя управление (2.2), системе удастся притянуть не строго в начало координат, а в некоторую малую его окрестность. Поэтому для случая удерживающего управ-

ления можно считать, что начальная точка (β_0, v_0) находится вблизи начала координат, и рассматривать систему

$$\dot{\beta} = v, \quad \dot{v} = u(t - h(t)) + f(t), \quad t > t_0 = T_2. \quad (3.1)$$

Управление u будем искать в виде

$$u(t - h(t)) = -p \operatorname{sign}[c\beta(t - h(t)) + v(t - h(t))].$$

Параметры $p, c > 0$ будут указаны ниже.

Сделаем в системе (3.1) замену переменных [16] $s = c\beta + v$, будем иметь

$$\dot{\beta} = -c\beta + s, \quad \dot{s} = cs - p \operatorname{sign}[s(t - h(t))] - c^2\beta + f(t). \quad (3.2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, определяющее радиус окрестности начала координат, в которой необходимо удержать решение. Будем считать, что $0 < h(t) < h_0$ и параметры c, p выбраны следующим образом:

$$0 < c < \frac{1}{h_0} \ln \frac{6}{5}, \quad p = \frac{3}{2} c^2 \varepsilon.$$

Теорема 1. Если

$$|\beta_0| < \varepsilon/4, \quad |c\beta_0 + v_0| < \delta_0 = c\varepsilon(6 - 5e^{ch_0})/(4e^{ch_0}), \quad |f(t)| < c^2\varepsilon/4,$$

то $|\beta(t)| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 = c\varepsilon/2$, тогда

$$\delta_0 = \varepsilon_0(6 - 5e^{ch_0})/(2e^{ch_0}).$$

Подставим величину

$$\beta(t) = \beta_0 e^{-c(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-c(t-\tau)} s(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

во второе уравнение (3.2). Покажем сначала, что $|s(t)| < \varepsilon_0$ при любых $t > t_0$. Действительно, предположим противное. Тогда существует момент времени $T > t_0$, такой, что $|s(T)| = \varepsilon_0$. Очевидно,

$$|s(t_0)| = |c\beta_0 + v_0| < \delta_0 < \varepsilon_0$$

и поэтому существует последний момент времени $t^* \in [t_0, T]$, в который $s(t^*) = \delta_0$ и $\delta_0 < s(t) < \varepsilon_0$ при всех $t \in [t^*, T]$. Докажем, что в этом случае $T - t^* > h_0$. Для этого сначала оценим правую часть второго уравнения (3.2) на отрезке $[t_0, T]$. Имеем

$$\dot{s} \leq cs + p + |f(t)| + c^2 \left(|\beta_0| + \int_{t_0}^t e^{-c(t-\tau)} |s(\tau)| d\tau \right) \leq cs + 5c\varepsilon_0.$$

Отсюда

$$s(t) \leq (\delta_0 + 5\varepsilon_0) e^{c(t-t^*)} - 5\varepsilon_0, \quad t \geq t_0.$$

Поэтому для $t = T$, учитывая, что

$$\delta_0 < \varepsilon_0(6 - 5e^{ch_0})/e^{ch_0}$$

получим

$$T - t^* > \frac{1}{c} \ln \frac{6\epsilon_0}{\delta_0 + 5\epsilon_0} > h_0.$$

Тогда при $t \in [t^* + h_0, T)$ имеем $\text{sign}[s(t - h(t))] = 1$, и значит

$$\dot{s} \leq cs - p + 2c\epsilon_0 \leq c\epsilon_0 - p + 2c\epsilon_0 = 0.$$

Поэтому для всех $t > t_0$ выполняется неравенство $|s(t)| < \epsilon_0$. Осталось лишь заметить, что $|\beta(t)| < |\beta_0| + \epsilon_0/c < \epsilon$.

Необходимо отметить, что теорема 1 не дает представления о качественном поведении решения системы в ϵ – окрестности нуля. Будет ли решение асимптотически стремиться к некоторому положению равновесия или будет возникать предельный цикл или странный аттрактор неизвестно. Однако численные результаты показывают, что зачастую подобные системы имеют колебательные решения, причем амплитуда колебаний существенно зависит от коэффициента p перед релейным элементом.

4. Нелокальная стабилизация.

Идея алгоритма нелокальной стабилизации. Для уравнения

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) - p_0 \text{sign}[x(t - h_0)]; \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h_0, t_0], \tag{4.1}$$

где $x \in R$ – переменная состояния, $\lambda, p_0 > 0$ – параметры системы, $h_0 > 0$ – время запаздывания, были установлены некоторые важные свойства его решения [17]: система (4.1) стабилизируема, если $\lambda h_0 < \ln 2$, все ненулевые устойчивые решения системы (4.1) колебательные, радиус окрестности устойчивых колебаний пропорционален коэффициенту усиления p_0 .

Эти свойства приводят к выводу о том, что можно попробовать предложить алгоритм адаптации коэффициента p_0 перед релейным элементом, который позволил бы расширить область начальных данных и повысить точность управления.

Было предложено выбирать [12, 13]

$$p_0 = -p \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N 3^{n-1} H_n(|x(t - h(t))|) \right); \quad H_n(\varrho) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varrho \geq v_n \\ 0, & \text{если } \varrho < v_n, \end{cases} \quad v_n > 0$$

где p, N – параметры управления, $H_n(\varrho)$ – функция Хевисайда.

Применительно к задаче управления КА такое управление можно интерпретировать как возможность работы в нескольких режимах газореактивного двигателя, либо как наличие у КА нескольких двигателей разной мощности.

Синтез релейного управления для нелокального случая. Вернемся к системе (3.1) и попытаемся модернизировать управление $u(t - h(t))$, исходя из предложенных выше рассуждений. Выберем произвольные R и ϵ ($R > \epsilon > 0$). Будем считать, что $|\beta_0| < R$ и $|v_0| < R$. Требуется построить управление, обеспечивающее стабилизацию решения системы (3.1) в ϵ -окрестности нуля, $|\beta(t)| < \epsilon$, $|v(t)| < \epsilon$ для всех $t > T$, где T – некоторое положительное число.

Будем строить управление по следующему алгоритму.

1°. Определим параметры c, γ и p так, чтобы выполнялись соотношения

$$0 < ch_0 < \ln \frac{15}{14}, \quad \frac{e^{ch_0}}{10 - 9e^{ch_0}} < \gamma < 3, \quad p = \frac{15}{4} c^2 \epsilon \gamma.$$

2°. Зафиксируем

$$\epsilon_0 = 3c\epsilon/4, \quad R_0 = (c+1)R.$$

3°. Выберем целое число N так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$\log_3(R_0/\epsilon_0) \leq N < \log_3(R_0/\epsilon_0) + 1.$$

4°. Определим последовательность $v_1 < v_2 < \dots < v_{N+1}$ по формуле

$$v_n = 3^{n-1} \gamma \epsilon_0.$$

5°. Наконец, выберем управление в виде

$$u(t-h(t)) = -A_N \operatorname{sign}[c\beta(t-h(t)) + v(t-h(t))] \quad (4.2)$$

$$A_N = p \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N 3^{n-1} H_n(|c\beta(t-h(t)) + v(t-h(t))|) \right].$$

Теорема 2. Для любых начальных данных $|\beta_0| < R$ и $|v_0| < R$ и любого ограниченного возмущения $|f(t)| < v_1 c/2$ управление u вида (4.2) будет гарантировать существование момента времени $T_\epsilon > t_0$, начиная с которого будут выполнены неравенства

$$|\beta(t)| < \epsilon, \quad |v(t)| < \epsilon.$$

Доказательство. Используем несколько свойств решения системы

$$\dot{\beta} = -c\beta + s, \quad \dot{s} = cs + u(t-h(t)) - c^2\beta + f(t) \quad (4.3)$$

с управлением вида (4.2), доказательства которых приведены в приложении.

Свойство 1. Введем в рассмотрение функцию

$$I(t) = Re^{-c(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-c(t-\tau)} |s(\tau)| d\tau.$$

Если $|s(t)| < \rho$ для всех t , больших некоторого t_ρ , то существует момент времени $\bar{t}_\rho > t_\rho$, такой, что $I(t) < (7\rho)/(6c)$ при $t > \bar{t}_\rho$.

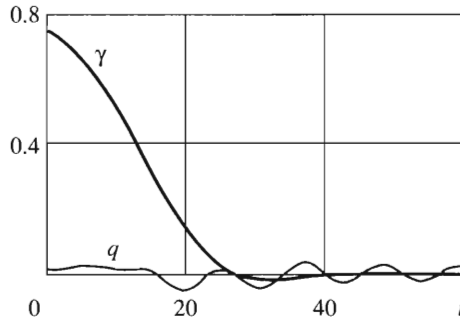
Свойство 2. Если в некоторый момент времени $T_k > t_0$ для решения системы (4.3) выполнены неравенства $|s(T_k)| < v_k \gamma$, $|s(t)| < v_k$ при $t \in [T_k - h_0, T_k]$ и $I(t) < (7v_{k+1})/(6c)$ при $t > T_k$, то $|s(t)| < v_k$ для любого $t > T_k$.

Свойство 3. Для любого конечного $T > t_0$ найдется $T_0 > T$, такое, что $s(T_0) = 0$.

Свойство 4. Если $|s(t)| < v_k$ для всех $t > T_k$, то существует момент времени $T_{k-1} \geq T_k$, такой, что $|s(t)| < v_{k-1}$ для всех $t > T_{k-1}$, где $k = 2, 3, \dots, N+1$.

Так как $|\beta_0| < R$ и $|v_0| < R$, то $|s(0)| = |c\beta_0 + v_0| < R_0$. Поэтому в силу свойства 3 получаем $|s(t)| < v_{N+1}$ для всех $t > 0$. Согласно свойству 4 существует такой момент времени $t = T_N$, что кривая $s(t)$ остается в v_N -окрестности нуля при всех $t > T_N$, и т.д. На N -м шаге получим, что существует момент времени $T_1 > 0$, такой, что $|s(t)| < v_1$ для всех $t > T_1$.

Покажем, что найдется $T_\epsilon > T_1$, такое, что $|s(t)| < \epsilon_0$ при всех $t > T_\epsilon$. Из свойства 2 вытекает, что существует $T_0 > T_1$, такое, что $s(T_0) = 0$. Покажем, что $|s(t)| < \epsilon_0$ при всех $t > T_0$. Если бы это было не так, то в некоторый момент времени $T' > T_0$ выполнялось бы равенство $|s(T')| = \epsilon_0$. Пусть T' – первый такой момент времени. Нетрудно видеть, что в этом случае $T' - T_0 > h_0$, а значит $|s(t)| < \epsilon_0$ при $t > T_0$. Так как



Фиг. 4

$$\beta(t) = \beta(0)e^{-ct} + \int_0^t e^{-c(t-\tau)} s(\tau) d\tau,$$

то согласно свойству 1 существует $T_\epsilon > T_0$, для которого $|\beta(t)| < 4c\epsilon_0/3 = \epsilon$ при $t > T_\epsilon$.

Следует отметить, что величина T_ϵ зависит от параметров R, ϵ и c .

Видно, что предложенное выше управление при больших t будет иметь порядок ϵ , а следовательно, при больших t координаты $q_i(t)$ имеют тот же порядок.

5. Пример. Рассмотрим КА существенно нежесткой конструкции при малой диссипации в упругих элементах, учитывая один тон колебаний. Примем, что

$$J_0 = 30, \quad EI = 3.5, \quad m = 0.53, \quad l = 7.5, \quad r = 3, \quad k = 0.001.$$

Соответствующая расщепленная система имеет вид

$$1183.24\ddot{\gamma} + 44.67\ddot{q} = u(t - h(t)) + f(t), \quad 22.33\dot{\gamma} + 11.06\ddot{q} + 0.72\dot{q} + 38.83q = 0. \quad (5.1)$$

Будем полагать, что управление обладает запаздыванием $h(t) = 0.2$ и на систему действуют малые внешние возмущения $f(t) = 0.001 \sin(t)$. Можно проверить, что для начальных условий

$$\gamma(0) = 0.7, \quad \dot{\gamma}(0) = -0.01, \quad q(0) = 0.1, \quad \dot{q}(0) = 0$$

притягивающее управление будет таким:

$$u = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 13.3 \\ -1, & 13.3 < t \leq 30.9. \end{cases}$$

Стабилизирующее управление определим в виде (4.2) с параметрами

$$p = 0.007, \quad c = 0.31, \quad \gamma = 2.76, \quad N = 4, \quad v_i = 0.0045 \cdot 3^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Данные параметры управления выбирались из следующего предположения: притягивающее управление в силу запаздывания и внешних возмущений может отработать с ошибкой $R \leq 0.1$, а допустимая ошибка стабилизации $\epsilon = 0.007$.

На фиг. 4 представлены результаты моделирования для системы (5.1) с предложенным управлением.

6. Приложение. Доказательство свойств 1–4.

Свойство 1 очевидно.

Доказательство свойства 2. Предположим противное. Тогда существуют моменты времени $T^* > T_k$: $s(T^*) = v_k$ и t^* : $T_k < t^* < T^*$, для которых

$$s(t^*) = v_k/\gamma; \quad v_k/\gamma < s(t) < v_k \quad \text{при } t \in (t^*, T^*).$$

Покажем сначала, что $T^* - t^* > h_0$. Заметим, что

$$\dot{s} \leq cs + p3^{k-1} + 7cv_{k+1}/6 + cv_1/2 \leq cs + 9cv_k; \quad s(t^*) = v_k/\gamma.$$

Используя лемму Гронуола, заключаем, что

$$s(T^*) = v_k \leq (v_k/\gamma + 9v_k)e^{c(T-t^*)} - 9v_k.$$

Это приводит к неравенству

$$T^* - t^* \geq \frac{1}{c} \ln \frac{10}{1/\gamma + 9}.$$

Учитывая, что $\gamma < 3$ и $ch_0 < \ln(15/14)$, получаем $T^* - t^* > h_0$. Тогда при $t \in [t^* + h_0, T^*]$ будем иметь $\text{sign}[s(t - h(t))] = 1$ и

$$\dot{s} \leq cs - p3^{k-1} + 7cv_{k+1}/6 + v_1c/2 \leq cv_k - 5cv_k + 4cv_k = 0.$$

Следовательно, s не может достигнуть границы v_k .

Отсюда, в частности, легко получить, что если $\beta_0 < R$ и $s(0) < R_0$, то $|s(t)| < v_{N+1}$ при $t > t_0$.

Доказательство свойства 3. Допустим противное. Тогда существует такое $T^* > t_0$, что $s(t) > 0$ для всех $t > T^*$. Очевидно, что в этом случае $\text{sign}[s(t - h(t))] = 1$ при $t > T^* + h_0$. Тогда можно показать, что

$$\dot{s} \leq cs - \tilde{p} + c^2 e^{-ct} \left(R e^{ct_0} + \int_{t_0}^{T^*} e^{c\tau} |s(\tau)| d\tau \right) + \frac{v_1 c}{2}; \quad \tilde{p} = p \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N H_n(|s(t - h)|) \right).$$

Значит при достаточно больших $t > T_0$ будем иметь

$$\dot{s} \leq cs - \tilde{p} + 2cv_1$$

и, следовательно, $s(t) > v_1$, поскольку в противном случае получили бы

$$\dot{s} < cv_1 - 5cv_1 + 2cv_1 = -2v_1c < 0$$

и нашелся бы момент времени $t_0 > T$, такой, что $s(t_0) = 0$. Рассуждая подобным образом, получим на $(N+1)$ -м шаге $s(t) > v_{N+1}$, что невозможно в силу свойства 2.

Доказательство свойства 4. Согласно свойству 1 найдется момент времени $\bar{t}_k \geq T_k$, такой, что $I(t) < 7v_k/(6c)$ для всех $t > \bar{t}_k$. Тогда из свойства 3 вытекает, что существует $T_{k-1} \geq \bar{t}_k + h_0$ со свойством $s(T_{k-1}) = 0$.

Покажем теперь, что $|s(t)| < v_{k-1}$ для всех $t > T_{k-1}$.

Допустим противное. Тогда существует такой момент времени $\bar{T} > T_{k-1}$, что $|s(\bar{T})| = v_{k-1}$. Рассмотрим два возможных случая.

1°. Справедливо неравенство $|s(t)| < v_{k-1}$ при всех $t \in [t, T_{k-1}]$. В этом случае согласно свойству 2 справедлива оценка $|s(t)| < v_{k-1}$ при всех $t > \bar{t}$.

2°. Существует $t^* : \bar{t}_k \leq t^* < T_{k-1}$, для которого $|s(t^*)| = v_{k-1}$. Пусть t^* – последний такой момент времени. Другими словами, $0 < |s(t)| < v_{k-1}$ при $t \in (t_k^*, T_{k-1})$. Так как $s(T_{k-1}) = 0$ и $|s(\bar{T})| = v_{k-1}$, то существует $T^* \in [T_{k-1}, \bar{T}]$, для которого $|s(T^*)| = v_{k-1}/\gamma$. Докажем, что $T^* - t^* > h_0$. Действительно, обозначим через $D(|s(t)|)$ правую производную от $|s(t)|$. Тогда на отрезке $[t^*, T_{k-1}]$ имеем

$$D(|s(t)|) \geq c|s(t)| - 5cv_k - 4cv_k/3; \quad |s(t^*)| = v_{k-1}.$$

Используя лемму Гронуола и полагая $t = T_{k-1}$, получим

$$(v_{k-1} - 19v_k/3)e^{c(T_{k-1}-t^*)} + 19v_k/3 \leq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$T_{k-1} - t^* \geq c^{-1} \ln(19/18).$$

Аналогичным образом найдем оценку $|s(t)|$ сверху

$$D(|s(t)|) \leq c|s(t)| + 5cv_k + 4cv_k/3; \quad |s(T_{k-1})| = 0, \quad T_{k-1} < t < T^*.$$

Из последнего дифференциального неравенства получаем

$$|s(t)| \leq 19v_k e^{c(t-T_k)}/3 - 19v_k/3, \quad T_{k-1} < t < T^*.$$

При $t = T^*$ получим

$$|s(T^*)| = v_{k-1}/\gamma \leq 19v_k e^{c(T^*-T_{k-1})}/3 - 19v_k/3.$$

Отсюда вытекает, что

$$T^* - T_{k-1} \geq c^{-1} \ln((19 + 1/\gamma)/19).$$

Далее

$$\begin{aligned} T^* - t^* &= T^* - T_{k-1} + T_{k-1} - t^* \geq \\ &\geq c^{-1} \ln(19/18) + c^{-1} \ln((19 + 1/\gamma)/19) = c^{-1} \ln((19 + 1/\gamma)/18). \end{aligned}$$

Неравенства $\gamma < 3$ и $ch_0 < \ln(15/14)$ влекут $T^* - t^* > h_0$. А значит, согласно свойству 2 $|s(\bar{T})| < v_{k-1}$, пришли к противоречию. Следовательно, $|s(t)| < v_{k-1}$ для всех $t > T_{k-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные работы. Динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Дегтярев Г.Л., Ризаев И.С. Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1991. 304 с.
3. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О стабилизации углового положения упругого стержня // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 115–123.
4. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Управление упругим звеном манипулятора при помощи обратной связи по положению и скорости груза // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 51–60.
5. Злочевский С.И., Кубышкин Е.П. О влиянии колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника // Косм. исследования. 1987. Т. 25. № 4. С. 537–544.

6. Злочевский С.И., Кубышкин Е.П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями // Косм. исследования. 1991. Т. 29. № 6. С. 828–839.
7. Сомов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. 124–143.
8. Бурый А.С., Крылов Ю.И., Мацыкин С.В. Синтез субоптимального релейного профилированного управления ориентацией космического аппарата с упругодеформируемыми элементами конструкции с учетом двух тонов колебаний // Автоматика и телемеханика. 2002. № 4. С. 36–46.
9. Шатина А.В. Быстрая и медленная диссипативная эволюция в механических системах, содержащих вязкоупругие элементы // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 14–23.
10. Стрыгин В.В., Фридман Л.М., Поляков А.Е. Локальная стабилизация релейных систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 5. С. 603–605.
11. Fridman L., Strygin V.M., Polyakov A. Nonlocal stabilization via delayed relay control rejecting uncertainty in time delay // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2004. V. 14. № 1. P. 15–37.
12. Fridman L., Strygin V., Polyakov A. Stabilization of oscillations amplitudes via relay delay control // Intern. J. Control. 2003. V. 76. № 8. P. 770–780.
13. Fridman L., Strygin V., Polyakov A. Semiglobal stabilization of linear uncertain system via delayed relay control // Variable Structure Systems: From Principles to Implementation / Eds. A. Sabanovic et al. L.: IEE, 2004. P. 377–400.
14. Ефремов М.С., Поляков А.Е., Стрыгин В.В. Новый алгоритм слежения для некоторых механических систем // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 30–41.
15. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
16. Utkin V., Guldner J., Shi J. Sliding modes in electromechanical systems / Ed. V. Utkin et al. L.: Taylor and Francis, 1999. 344 p.
17. Fridman L., Fridman E., Shustin E. Steady modes in an autonomous systems with break and delay // Different. Equations. 1993. V. 29. № 8. P. 1161–1166.