ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 70. Вып. 5, 2006**

УДК 531.36

© 2006 г. С. В. Чайкин

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ГИРОСТАТА С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

В ограниченной постановке изучается движение по круговой кеплеровой орбите в центральном ньютоновском поле сил гиростата, рассматриваемого как твердое тело, в котором расположен равномерно вращающийся, статически и динамически уравновешенный маховик. К твердому телу – корпусу гиростата жестко присоединен однородный упругий элемент, подвергающийся в процессе движения системы малым деформациям. Проводится дискретизация задачи без усечения соответствующих бесконечных рядов на основе модального анализа или с использованием некоторой заданной системы функций, например предполагаемых форм колебаний, зависящих от пространственных координат и удовлетворяющих соответствующим краевым задачам линейной теории упругости. Конкретизация упругого элемента (стержень, пластина и др.), его массовых, жесткостных характеристик и вида закрепления и определяют выбор упомянутой системы функций. Нетривиальные относительные равновесия системы (состояния покоя относительно орбитальной системы координат при деформированном упругом элементе) предполагается отыскивать приближенно на основании сходящегося итерационного метода, указанного автором ранее. С использованием теоремы Рауса показано, что за счет соответствующего выбора гиростатического момента и при выполнении определенных условий, налагаемых на параметры системы, можно стабилизировать указанные равновесия (обеспечить их устойчивость).

Известно, что режим стабилизации космического аппарата на орбите требует наименьших энергозатрат при его стабилизации в одном из возможных положений относительного равновесия. Этот факт определяет важность вопросов, связанных с отысканием относительных равновесий и исследованием условий их устойчивости. Распространенной моделью реальных космических аппаратов является гиростат, представляющий собой твердое тело с расположенными в нем статически и динамически уравновешенными маховиками и присоединенными к нему разнообразными упругими элементами. Наличие тривиальных относительных равновесий аппарата – состояний покоя относительно орбитальной системы координат (ОСК) при недеформированных элементах – проверяется подстановкой в уравнения равновесия нулевых значений переменных задачи, определяющих деформации, и является исключительным случаем. Опубликованные результаты исследований посвящены изучению в основном именно устойчивости гиростата с упругими элементами в таком равновесии, см. например [1].

В более общих случаях необходимо уметь отыскивать нетривиальные относительные равновесия, хотя бы приближенно (при этом речь не идет о численном моделировании), и исследовать условия их устойчивости, которые будут зависеть от найденных равновесий. В таких исследованиях дискретизация задачи [2], под которой в работе понимается представление вектора перемещения произвольной точки упругого звена системы в результате деформации в виде бесконечного ряда по некоторой заданной системе функций, зависящих от пространственных координат, с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени, становится необходимой, так как определяется современными аналитическими методами решения краевых задач уравнений в частных производных (метод Фурье, метод Релея–Ритца и др.). Как правило, после дискретизации еще выполняется априорная редукция задачи: в указанном бесконечном ряде сохраняется с самого начала конечное число членов. Тем самым вопросы отыскания нетривиальных равновесий и исследования их устойчивости сводились к тем же вопросам, но для механической системы с конечным числом степеней свободы (см., например, [3]).

Подобная практика, хотя и была вынужденной и определялась имеющимися методами исследований этих вопросов, часто подвергалась критике ([4], с. 120), так как не давала ясных критериев выбора конечного числа членов бесконечного ряда, удерживаемых при усечении, а если усечение не проводилось, то в этом случае не давалось ясных критериев для определенной положительности соответствующей квадратичной формы от бесконечного числа переменных.

В данной работе с использованием дискретизации задачи и без усечения соответствующих бесконечных рядов на основе теоремы Рауса [5, 6] изучается возможность стабилизации нетривиальных равновесий относительно ОСК рассматриваемой системы при ее движении по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил притяжения за счет выбора гиростатического момента и при выполнении определенных условий, налагаемых на другие параметры системы.

Следует отметить, что ранее [7] рассматривалось в том же силовом поле, что и здесь, и при аналогичных предположениях в ограниченной постановке движение по круговой кеплеровой орбите гиростата с однородным прямолинейным упругим стержнем, ось которого в естественном состоянии расположена в какой-либо главной центральной плоскости инерции гиростата; при этом удавалось получить точные аналитические выражения, определяющие два однопараметрических семейства нетривиальных равновесных одноосных ориентаций на притягивающий центр гиростата с упругим стержнем и условия их устойчивости. В предлагаемой работе, вообще говоря, оказалось, что можно лишь приближенно отыскать равновесия системы относительно ОСК, но зато удалось привести неизвестные ранее точные достаточные условия их устойчивости. В обоих исследованиях, хотя и касающихся изучения разных стационарных движений гиростата с разными упругими элементами, характерны дискретизация задачи без априорного усечения соответствующих бесконечных рядов, нахождение и изучение устойчивости стационарных движений механической системы со счетным числом степеней свободы на основе теоремы Рауса, укладывающейся в рамки прямого метода Ляпунова.

1. Постановка задачи. Нетривиальные относительные равновесия. Пусть в корпусе гиростата, который моделируется твердым телом с расположенным в нем равномерно вращающимся, статически и динамически уравновешенным маховиком, жестко закреплено по некоторой области Г с мерой, отличной от нуля, однородное упругое звено произвольной формы. В процессе движения упругое звено подвергается малым деформациям. Система движется в центральном ньютоновском поле сил притяжения так, что ее мгновенный центр масс O равномерно перемещается по кеплеровой круговой орбите вокруг притягивающего центра, ω – орбитальная угловая скорость системы, $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\beta}$, $\omega \equiv |\boldsymbol{\omega}|$. Движение системы рассматривается в ограниченной постановке [8].

Введем в рассмотрение следующие правые прямоугольные декартовы оси координат: орбитальная система координат (ОСК) Oy_k ($k = 1, 2, 3$) с полюсом в мгновенном центре масс системы и ортами осей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно; орт $\boldsymbol{\beta}$ направлен по нормали к плоскости орбиты, $\boldsymbol{\gamma}$ – по радиусу-вектору мгновенного центра масс относительно притягивающего центра; трехгранник O_1x_k ($k = 1, 2, 3$) с ортами осей $\mathbf{i}_k$ жестко связан с корпусом гиростата, O_1 – центр масс недеформированной системы, а координатные оси совмещены с ее главными центральными осями инерции. Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость связанной системы координат (ССК) O_1x_k относительно ОСК; υ_2 – область, занимаемая точками недеформированного упругого элемента, υ_1 – область точек гиростата, $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$; m_1 – масса гиростата, m_2 – масса упругого звена, ρ – плотность масс, $m = m_1 + m_2$.

Радиус-вектор относительно центра масс O произвольной точки системы, определяемой до деформации относительно точки O_1 вектором $\mathbf{r}$, после деформации будет даваться выражением $(\mathbf{r} + \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – вектор упругого перемещения,

$\mathbf{r}_0 = m^{-1}\int\limits_{\upsilon_2}\rho\,\mathbf{u}(t, \mathbf{r})d\upsilon$ – радиус-вектор мгновенного центра масс O относительно O_1, $\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \in \upsilon_1$. В дальнейшем будем пренебрегать величиной $\mathbf{r}_0$, т.е. точки O_1 и O совпадают.

Сформулируем предположения, при которых проводятся дальнейшие рассуждения. (Всюду далее, если не оговорено иное, индексы n, m, p принимают значения 1, 2, …; суммирование по указанному индексу ведется от единицы до бесконечности, а интегрирование ведется по области υ.)

1°. Вектор упругого перемещения представим следующим образом:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_n \tilde{q}_n(t)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(\mathbf{r}), \tag{1.1}$$

где неизвестные величины $\tilde{q}_n(t)$ следует рассматривать как лагранжевы координаты, определяющие деформацию упругого звена; заданные функции $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(\mathbf{r})$ удовлетворяют определенным однородным уравнениям теории упругости, для определенности, краевым условиям жесткой заделки упругого элемента по поверхности Γ и отсутствию распределенных сил и моментов на его свободной поверхности. Кроме того считаем, что функции $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n$ ортонормированы:

$$(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_m) \equiv \int\limits_{\upsilon_2}\rho\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_m d\upsilon = \delta_{nm}$$

и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \in \upsilon_1$. Например [7], в случае, когда упругий элемент – стержень, в качестве $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(\mathbf{r})$ можно использовать балочные функции Крылова.

2°. Потенциальная энергия упругих деформаций определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{n,\,p}\tilde{c}_{np}\tilde{q}_n\tilde{q}_p, \quad \tilde{c}_{np} = \Lambda_n^2\delta_{np}, \quad 0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots, \tag{1.2}$$

где, в свою очередь, величины Λ_n определяются с помощью решений соответствующего трансцендентного уравнения (ср. с ситуацией, рассмотренной ранее [7]). Чрезвычайно плодотворно для дальнейшего анализа – введение новых переменных $q_n(t) \equiv (\tilde{c}_{nn})^{1/2}\tilde{q}_n(t)$ и соответственно с представлением (1.1) новых функций $\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{r}) \equiv (\tilde{c}_{nn})^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(\mathbf{r})$, $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m) = \Lambda_n^{-2}\delta_{nm}$. Из естественного, физически оправданного предположения об ограниченности энергии упругих деформаций, следует, что $q(t) \equiv (q_1, q_2, \ldots)$ принадлежит гильбертову пространству l_2 бесконечных последовательностей [9], ограниченных по норме $\|q\| \equiv \left(\sum_n |q_n|^2\right)^{1/2}$.

3°. Потенциальная энергия гравитационных сил (с точностью до известной постоянной) дается выражением

$$\Pi_g = \frac{1}{2}\omega^2(3\boldsymbol{\gamma}\mathbf{J}\boldsymbol{\gamma} - \mathrm{tr}\mathbf{J}), \tag{1.3}$$

где, при учете выражения (1.1) и формулы для q_n, тензор инерции системы относительно ее центра масс имеет вид

$$\mathbf{J}(q) \equiv \int \rho((\mathbf{r}+\mathbf{u})^2 E - (\mathbf{r}+\mathbf{u}) : (\mathbf{r}+\mathbf{u}))dv = \mathbf{I}_0 + \sum_n q_n \mathbf{J}_n + \sum_{n,m} q_n q_m \mathbf{J}_{nm}.$$

Здесь и далее E (E_∞) – единичная матрица размера 3×3 ($\infty \times \infty$), двоеточие означает диадное произведение векторов.

Тензор инерции недеформированной системы $\mathbf{I}_0$ ($I_0 = \mathrm{diag}(I_0^1, I_0^2, I_0^3)$ – его матрица компонент в ССК) и тензоры $\mathbf{J}_n$ и $\mathbf{J}_{nm}$ записываются следующим образом:

$$\mathbf{I}_0 \equiv \int \rho(\mathbf{r}^2 E - \mathbf{r} : \mathbf{r})dv, \quad \mathbf{J}_n \equiv \int \rho(2\mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}_n E - \mathbf{r} : \boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_n : \mathbf{r})dv$$

$$\mathbf{J}_{nm} \equiv \int \rho(\boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_m E - (\boldsymbol{\varphi}_n : \boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\varphi}_m : \boldsymbol{\varphi}_n)/2)dv$$

$I_n = [I_n^{ij}]$, $I_{nm} = [I_{nm}^{ij}]$ – симметричные матрицы компонент тензоров $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{J}_{nm}$ в ССК.

4°. Центральный эллипсоид инерции недеформированной системы не является фигурой вращения.

Уравнения движения системы в рассматриваемом случае, которые можно получать разными способами [2], здесь не используются. Известно, что они, кроме интегралов направляющих косинусов U_i ($i = 1, 2, 3$), допускают интеграл типа Якоби U. Имеем

$$\begin{aligned} &U_1 \equiv \boldsymbol{\gamma\gamma} - 1 = 0, \quad U_2 \equiv \boldsymbol{\beta\beta} - 1 = 0, \quad U_3 \equiv \boldsymbol{\gamma\beta} = 0 \\ &U \equiv T_r + \Pi + \Pi_g - 1/2\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}(q)\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{k} = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где T_r – кинетическая энергия относительного движения системы с остановленным маховиком [1], $\mathbf{k}$ – гиростатический момент. При $\boldsymbol{\Omega} = 0$, $\dot{q}(t) \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots) = 0$ величина T_r обращается в нуль; имеется оценка

$$\exists \varepsilon_T > 0 : T_r > \varepsilon_t \left(\boldsymbol{\Omega}^2 + \sum_n \dot{q}_n^2 \right).$$

Точкой обозначена производная по времени.

Для отыскания относительных равновесий системы воспользуемся теоремой Рауса (см. также [10, 11]). Введем в рассмотрение функционал – связку измененной потенциальной энергии системы и интегралов направляющих косинусов

$$V_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, q, \lambda, \sigma, \nu) \equiv \left(\Pi + \Pi_g - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}(q)\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}\boldsymbol{\omega} \right) + 3\omega^2 \lambda U_3 + \omega^2 \nu U_3 - \frac{3}{2}\omega^2 \sigma U_1,$$

где λ, σ, ν – неопределенные множители Лагранжа. Приравнивая нулю первую вариацию функционала V_1, получаем следующую систему уравнений для определения относительных равновесий системы (здесь и далее $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0$, $\hat{q} = 0$):

$$(\mathbf{J}(\hat{q}) - \sigma E)\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda \hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \lambda = -\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &(\nu E - \mathbf{J}(\hat{q}))\hat{\boldsymbol{\beta}} + 3\lambda\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\eta} = 0 \Leftrightarrow \nu = \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\nu} \\ &\hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\eta}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\eta}/4 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\hat{q}_n + \omega^2(3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \mathrm{tr}\mathbf{J}'_n(\hat{q}) - \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}})/2 = 0. \tag{1.7}$$

Введены обозначения

$$\hat{\nu} \equiv \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{k}/\omega, \quad \mathbf{J}'_n \equiv \mathbf{J}_n + 2\sum_p q_p \mathbf{J}_{np}.$$

Переменные с крышкой определяют невозмущенное движение – относительное равновесие системы; малые возмущения соответствующих переменных обозначаются $\delta\boldsymbol{\Omega}$, $\delta\dot{q} \equiv (\delta\dot{q}_1, \delta\dot{q}_2, \ldots)$ и т.д.

Для реализации нетривиальных положений относительного равновесия системы, которые будут определяться существованием ненулевых решений счетной системы уравнений (1.7) [12], гиростатический момент $\mathbf{k}$ следует выбирать так, чтобы его проекции на оси $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$ орбитальной системы координат были равны нулю, т.е. в уравнениях (1.5), (1.6) $\hat{\boldsymbol{\gamma}}\,\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}\,\boldsymbol{\eta} = 0$. Проекция гиростатического момента на нормаль к плоскости орбиты, определяемой относительно ССК направляющими косинусами орта $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, остается пока неопределенной – не определена величина $\hat{\nu} \equiv \hat{\boldsymbol{\beta}}\,\boldsymbol{\eta}$. Этим можно воспользоваться для обеспечения устойчивости относительных равновесий. Подобная ситуация типична и в вопросах устойчивости относительных равновесий гиростата без упругого элемента.

Если предположить, что нетривиальные относительные равновесия системы существуют, то в проекциях на главные центральные оси инерции системы ($\mathbf{e}_j(\hat{q})$ – орты соответствующих осей, $j = 1, 2, 3$, а матрица компонент тензора $\mathbf{J}(\hat{q})$ в этих осях диагональна: $J = \mathrm{diag}(J_0^1, J_0^2, J_0^3)$), построенные для данного равновесия, будем иметь [12]

$$\begin{aligned}
&\hat{\gamma} \equiv (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3), \quad \hat{\gamma}_i = \pm\delta_{im}; \quad \sigma \equiv \hat{\gamma} J \hat{\gamma}^T = J_0^m \\
&\hat{\beta} \equiv (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3), \quad \hat{\beta}_i = \pm\delta_{ik}; \quad \nu \equiv J_0^k + \hat{\beta}_k|\boldsymbol{\eta}|, \quad \lambda = 0, \quad \boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0, \\
&\forall k, m \in \{1, 2, 3\}, \quad k \neq m,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

т.е. в относительном равновесии орты $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ коллинеарны ортам $\mathbf{e}_j(\hat{q})$, а величины $\hat{q}_n$ будут определяться из уравнений

$$\hat{q}_n + \omega^2\left[3\left(J_n^{mm} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{mm}\right) - \mathrm{tr}J'_n - J_n^{kk} - 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{kk}\right]/2 = 0. \tag{1.9}$$

Здесь $J_n = [J_n^{ij}]$, $J_{np} = [J_{np}^{ij}]$ и т.п. – симметричные матрицы компонент соответствующих тензоров в осях $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, т.е. матрицы компонент тензоров обозначены теми же буквами, но без выделения жирным шрифтом.

Точное решение уравнений (1.5)–(1.7) крайне затруднительно. Был предложен [12] метод приближенного отыскания нетривиальных относительных равновесий для системы, состоящей из твердого тела (гиростат с остановленным маховиком) и произвольного однородного упругого звена. В рассматриваемом случае он полностью применим: приближенно, в виде степенного ряда по $\hat{q}_n$, находятся собственные значения $J_0^j(\hat{q})$ и собственные единичные векторы $\mathbf{e}_i(\hat{q})$ тензора $\mathbf{J}(\hat{q})$

$$J_0^j(\hat{q}) = I_0^j + \sum_n \hat{q}_n I_n^{jj} + \ldots, \quad \mathbf{e}_j(\hat{q}) = \mathbf{i}_j + \sum_n \hat{q}_n\left(\mathbf{i}_m \frac{I_n^{jm}}{I_0^j - I_0^m} + \mathbf{i}_k \frac{I_n^{jk}}{I_0^j - I_0^k}\right) + \ldots \tag{1.10}$$

$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall m, k \in \{1, 2, 3\}, \quad m \neq k \neq j.$

Зная выражения для $\mathbf{e}_j$, матрицу перехода $P(\hat{q})$ от ССК с ортами $\{\mathbf{i}_j\}$ к системе координат с ортами $\{\mathbf{e}_j(\hat{q})\}$ можно записать следующим образом:

$$P(\hat{q}) \equiv (e_1(\hat{q}), e_2(\hat{q}), e_3(\hat{q})) = E + \sum_n \hat{q}_n P_n + \ldots,$$

где кососимметричная матрица $P_n = [(\delta_{ij} - 1) I_n^{ij} / (I_0^i - I_0^j)]$, $e_j(\hat{q})$ – столбец компонент $\mathbf{e}_j$ в ССК ($i, j = 1, 2, 3$).

На основании теоремы о преобразовании матриц компонент тензоров при переходе к другой системе координат можно записать $J_n = P(\hat{q}) I_n P^T(\hat{q})$, $J_{np} = P I_{np} P^T$ и т.п. Пренебрегая нелинейными по $\hat{q}_n$ членами в уравнениях (1.9), получим линеаризованную систему для нахождения $\hat{q}_n$

$$\hat{q}_n + \omega^2 \sum_p \left(2 I_{np}^{mm} - 2 I_{np}^{kk} - I_{np}^{ll} + 4 \frac{I_n^{km} I_p^{km}}{I_0^k - I_0^m} + 3 \frac{I_n^{lm} I_p^{lm}}{I_0^l - I_0^m} + \frac{I_n^{kl} I_p^{kl}}{I_0^k - I_0^l} \right) \hat{q}_p = I_n^{kk} - I_n^{mm} + \frac{I_n^{ll}}{2}. \tag{1.11}$$

Здесь и далее k, m уже фиксированы в соответствии с выбором в соотношениях (1.8) $l \in \{1, 2, 3\}$, $l \neq k \neq m$.

Бесконечную систему уравнений (1.11) предлагается решать методом редукции [9], относительно сходимости которого доказано соответствующее утверждение [12]; при этом, если выполнить предварительную нормализацию, решение системы (1.11) будет принадлежать единичному шару в l_2, т.е. $\|\hat{q}\| \leq 1$.

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу

$$C = [\delta_{np}/\omega^2 + 2 I_{np}^{mm} - 2 I_{np}^{kk} - I_{np}^{ll}] \tag{1.12}$$

и потребуем ее определенной положительности:

$$\exists \varepsilon_C > 0 : \forall q \in l_2 \quad q C q^T \geq \varepsilon_C \|q\|^2 \tag{1.13}$$

(ниже, в разд. 2, приведены условия, обеспечивающие это требование).

Теперь утверждение о сходимости метода редукции, сводящегося к последовательному решению "усеченных" уравнений (1.11) (т.е. когда для фиксированного N ($n = 1, 2, \ldots, N$) суммирование по p в соотношениях (1.11) проводится от 1 до N и $N \to \infty$) можно сформулировать следующим образом [12].

Утверждение 1. Метод редукции решения бесконечной системы уравнений (1.11) будет сходящимся, если бесконечная последовательность $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$, выполнено условие (1.13) и

$$\min_{i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j} |I_0^i - I_0^j| \geq (\varepsilon_C \pi)^{-1} \left(\sum_{n, p} (4 |I_n^{km} I_p^{km}| + 3 |I_n^{lm} I_p^{lm}| + |I_n^{kl} I_p^{kl}|)^2 \right)^{1/2}, \tag{1.14}$$

где произвольная величина $\pi \in (0, 1)$.

Отметим, что ряд в правой части неравенства (1.14) сходится, например, при $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$ и за счет соответствующего выбора моментов инерции собственно гиростата это условие можно выполнить.

2. Условия стабилизации нетривиальных относительных равновесий системы. В соответствии с теоремой Рауса требования, налагаемые на параметры задачи и обеспечивающие при наличии линейных связей, стесняющих возмущения, определенную положительность второй вариации $\delta^2 V_1(0)$ функционала V_1, вычисленной на невозмущенном движении – на равновесии (1.8), (1.9), будут гарантировать его устойчивость в смысле Ляпунова (при учете определенной положительности T_r) по норме для возмущений $(\delta\boldsymbol{\Omega}\delta\boldsymbol{\Omega} + \|\delta\dot{q}\|^2 + \delta\boldsymbol{\gamma}\delta\boldsymbol{\gamma} + \delta\boldsymbol{\beta}\delta\boldsymbol{\beta} + \|q\|^2)^{1/2}$.

Пусть для удобства

$$w_1 \equiv \delta\gamma_1, \quad w_2 \equiv \delta\beta_1, \quad w_3 \equiv \delta\gamma_2, \quad w_4 \equiv \delta\beta_2, \quad w_5 \equiv \delta\gamma_3, \quad w_6 \equiv \delta\beta_3; \quad w \equiv (w_1, \ldots, w_6).$$

Считаем, что $(w, \delta q) \in l_2$. Линейные связи, накладываемые на возмущения, получаем из условий

$$\begin{aligned}
&\delta U_1(0) \equiv \hat{\gamma}_1 w_1 + \hat{\gamma}_2 w_3 + \hat{\gamma}_3 w_5 = 0 \\
&\delta U_2(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_6 = 0 \\
&\delta U_3(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_1 + \hat{\gamma}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_3 + \hat{\gamma}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_5 + \hat{\gamma}_3 w_6 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Вторая вариация функционала записывается следующим образом (ср. [13]):

$$\delta^2 V_1(0) = \omega^2 (w, \delta q) \begin{Vmatrix} A & B \\ B^T & C \end{Vmatrix} (w, \delta q)^T, \tag{2.2}$$

где при условии, что тензоры и векторы задаются своими компонентами в осях $\{\mathbf{e}_i(\hat{q})\}$,

$$A \equiv \operatorname{diag}(3(J_0^1 - \sigma), (\nu - J_0^1), 3(J_0^2 - \sigma), (\nu - J_0^2), 3(J_0^3 - \sigma), (\nu - J_0^3)), \tag{2.3}$$

а прямоугольная матрица B состоит из шести строк $b_i \equiv (b_{i1}, b_{i2}, \ldots)$ $(i = 1, \ldots, 6)$ бесконечной длины, их компоненты

$$\begin{aligned}
&b_{2j-1,n} = 3\left(J_n^{jm} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{jm}\right)\hat{\gamma}_m \\
&b_{2j,n} = -\left(J_n^{jk} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{jk}\right)\hat{\beta}_k; \quad j = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Матрица C совпадает с введенной выше (формула (1.12)).

С использованием неравенства Коши–Буняковского, выражений для матриц J_n, J_{np} компонент тензоров $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{J}_{np}$ и условий нормировки функций $\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{r})$ можно показать, что $b_i \in l_2$ $(i = 1, \ldots, 6)$ при $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$, $\hat{q} \in l_2$.

Для матрицы C, определяемой формулой (1.12), доказано [13] следующее утверждение.

Утверждение 2. Ограниченная квадратичная форма переменных из l_2 с матрицей C будет определенно положительной, т.е. условие (1.13) будет выполнено, если бесконечная последовательность $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_1$ и выполнено неравенство

$$\omega^{-2} > 3\Lambda_1^{-2} + 8\Lambda_1^{-1}\sum_{p=2}^{\infty}\Lambda_p^{-1}. \tag{2.5}$$

Отметим, что в качестве ε_C из условия (1.13) может быть взята любая величина, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \varepsilon_C < \omega^{-2} - \left(3\Lambda_1^{-2} + 8\Lambda_1^{-1}\sum_{p=2}^{\infty}\Lambda_p^{-1}\right).$$

Пусть произвольная величина $\varepsilon \in (0, \varepsilon_C)$. Выражение (2.2) представим следующим образом:

$$\omega^{-2}\delta^2 V_1(0) = w(A - \varepsilon BB^T)w^T + \delta q(C - \varepsilon^2 E_\infty)\delta q^T + (\varepsilon^{-1}wB + \varepsilon\delta q)^2.$$

Видно, что для определенной положительности $\delta^2 V_1(0)$ достаточно при выполнении требований утверждения 2, чтобы была определенно положительной квадратичная форма переменных w с матрицей $(A - \varepsilon^{-2}BB^T)$ при выполнении линейных связей (2.1), накладываемых на w [14].

Введем в рассмотрение величины

$$\Delta \equiv 3(J_0^l - J_0^m) - d_{11} > 0$$

$$a \equiv 4(J_0^k - J_0^m) - d_{22} - d_{12}^2/\Delta, \quad b \equiv J_0^k - J_0^l - d_{33} - d_{13}^2/\Delta, \quad c \equiv d_{23} + d_{12}d_{13}/\Delta,$$

где

$$d_{ij} \equiv \varepsilon^{-2} d_i d_j^T, \quad d_i \equiv (d_{i1}, d_{i2}, \ldots), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При этом компоненты бесконечных строк

$$d_{1n} \equiv 3\left(J_n^{lm} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{lm}\right), \quad d_{2n} \equiv 4\left(J_n^{km} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{km}\right), \quad d_{3n} \equiv J_n^{kl} + 2\sum_p \hat{q}_p J_{np}^{kl}.$$

Очевидно, что $d_i \in l_2$ $(i = 1, 2, 3)$, как и строки $b_1, \ldots, b_6$.

Теперь можно сформировать утверждение о стабилизации нетривиальных относительных равновесий системы как условия, обеспечивающие их устойчивость. Опуская промежуточные, достаточно понятные, но громоздкие вычисления, получаем

Утверждение 3. Для того чтобы нетривиальное относительное равновесие системы (1.8), (1.9) было устойчиво, достаточно выполнения следующих условий:

$$\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_1, \quad \omega^{-2} > 3\Lambda_1^{-2} + 8\Lambda_1^{-1}\sum_{p=2}^{\infty}\Lambda_p^{-1} \tag{2.6}$$

$$\Delta \equiv 3(J_0^l - J_0^m) - d_{11} > 0 \tag{2.7}$$

$$|\boldsymbol{\eta}|\hat{\beta}_k \equiv \hat{\nu} > -(4(J_0^k - J_0^m) - d_{22}) + d_{12}^2/\Delta \tag{2.8}$$

и одновременно с условием (2.8)

$$2\hat{\nu} > -(a + b) + ((b - a)^2 + 4c^2)^{1/2} \quad \text{или} \quad 2\hat{\nu} < -(a + b) - ((b - a)^2 + 4c^2)^{1/2}. \tag{2.9}$$

Заметим, что все величины, входящие в выражения (2.6)–(2.9), конечны, а J_0^i $(i = 1, 2, 3)$ представляют собой моменты инерции относительно осей $\{\mathbf{e}_i(\hat{q})\}$ "замороженной" в нетривиальном равновесии системы. Очевидно, в эти величины входят моменты инерции гиростата, за счет соответствующего выбора которых можно обеспечить выполнение условия (2.7). Если в качестве J_0^i $(i = 1, 2, 3)$ использовать, например, представление (1.10) и выполнить оценки, аналогичные проведенным ранее [7], то это легко доказывается.

Условия (2.8), (2.9) можно удовлетворить соответствующим выбором гиростатического момента, компоненты которого в ССК получаются с помощью матрицы $P(\hat{q})$.

Условия (2.6) накладывают ограничения на жесткость упругого элемента и свойства функций $\{\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{r})\}$. За счет увеличения жесткости упругого элемента неравенство в (2.6) также может быть выполнено. Например [7], если упругий элемент системы – стержень и его изгибные деформации соответствуют гипотезам Кирхгофа, то $\Lambda_n^2 = EI\beta_n^4/\rho$, где β_n – соответствующие корни уравнения

$$\cos\beta \operatorname{ch}\beta + 1 = 0$$

(можно показать, что $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_1$ [12]), а EI – жесткость стержня на изгиб. В качестве $\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{r})$, как отмечалось ранее, используются балочные функции Крылова.

При $\Lambda_1 \to \infty$ (тогда $d_{ij} \to 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$) соотношения (2.6)–(2.9) переходят в известные условия устойчивости относительных равновесий гиростата, когда гиростатический момент расположен по одной из главных центральных осей его эллипсоида инерции и направлен по нормали к плоскости орбиты [14].

Следует отметить, что условия (2.6)–(2.9) более жесткие, чем условия устойчивости системы, "затвердевшей" в положении относительного равновесия, когда в них формально надо положить $d_{ij} = 0$ и совсем отказаться от условий (2.6). На дестабилизирующий эффект упругих элементов в вопросах устойчивости относительных равновесий сложных механических систем указывалось ранее [1, 2, 4, 15].

Автор благодарит В.В. Белецкого за критическое внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00898, 05-01-00623а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Набиуллин М.К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, 1990. 217 с.
2. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
3. *Meirovitch L.* Liapunov stability of hybrid dynamical systems in the neighborhood of nontrivial equilibrium // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 7. С. 889–898.
4. *Рубановский В.Н.* Устойчивость установившихся движений сложных механичесих систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 5. С. 62–134.
5. *Routh E. J.* The Advanced part of a Treatise on the Dynamis of a System of Rigid Bodies. L.: Macmillan, 1884. 343 с.
6. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1997. 216 с.
7. *Чайкин С.В.* Устойчивость семейств нетривиальных равновесных ориентаций на притягивающий центр гиростата с упругим стержнем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 971–983.
8. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

9. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
10. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения фнукции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
11. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
12. *Chaikin S.V.* Approximate finding of the nontrivial relative equilibriums of an elastic satellite // Acta Astronautica. 1998. V. 43. № 7–8. P. 355–367.
13. *Chaikin S.V.* Equilibria stability of the satellite as a system with a countable number of degrees of freedom // Acta Austronautica. 2001. V. 48. № 4. P. 193–203.
14. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1998. 304 с.
15. *Морозов В.М., Рубановский В.Н., Румянцев В.В., Самсонов В.А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 387–399.

Иркутск
e-mail: schaik@yandex.ru

Поступила в редакцию
29.IV.2005