УДК 531.36:62–50

© 2006 г. А. А. Незнахин

О ПОСТРОЕНИИ ЯДРА ВЫЖИВАЕМОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При наличии фазовых ограничений исследуется задача приближенного построения ядра выживаемости для обобщенной динамической системы, эволюция которой задается непосредственно множеством достижимости. Приведен попятный сеточный метод, основанный на подмене фазового пространства пикселями и рассмотрении "обратных" множеств достижимости. Доказана сходимость метода.

Обобщенные динамические системы – результат аксиоматического подхода к управляемым системам – интенсивно исследовались [1–6]. Исследования в теории управляемых систем могут быть распространены на обобщенные динамические системы [7–11][1].

Ниже в продолжение предыдущих исследований [12, 13] полученные ранее результаты [14] распространяются на обобщенные динамические системы.

1. Постановка задачи. Рассматривается обобщенная динамическая система (ОДС), поведение которой задается с помощью многозначного отображения

$$F(\cdot) : I \times I \times R^m \to 2^{R^m}, \tag{1.1}$$

где $I = [t_0, \theta]$ – конечный отрезок времени. Для заданных $(t_*, x_*) \in I \times R^m$ и $t^* \in [t_*, \theta]$ символ $F(t^*; t_*, x_*)$ означает множество достижимости ОДС из начальной позиции (t_*, x_*) в момент времени t^*. Будем предполагать, что многозначное отображение (1.1) удовлетворяет следующим условиям 1°–6°.

1°. Множество достижимости $F(t^*; t_*, x_*)$ определено для всех $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, $t^* \in [t_*, \theta]$ и является непустым компактом в пространстве R^m.

2°. Существует постоянная $M > 0$, такая, что для всех $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, $\delta \in [0, \theta - t_*]$ справедливо неравенство

$$\alpha(\{x_*\}, F(t_* + \delta; t_*, x_*)) \le M\delta.$$

Хаусдорфово расстояние между множествами $A \subset R^m$ и $C \subset R^m$ определяется как

$$\alpha(A, C) = \max\{\sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, C), \sup_{y \in C} \operatorname{dist}(y, A)\}; \quad \operatorname{dist}(x, C) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Здесь и ниже $\|\cdot\|$ означает евклидову норму.

3°. Для любых $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, t и t^* $(t_* \le t < t^* \le \theta)$ справедливо равенство

$$F(t^*; t_*, x_*) = \bigcup\{F(t^*; t, x) : x \in F(t; t_*, x_*)\}.$$

4°. Для заданных $(t^*, x^*) \in I \times R^m$ и $t_* \in [t_0, t^*]$ существует точка $x_* \in R^m$, такая, что $x^* \in F(t^*; t_*, x_*)$.

5°. Существует функция $\omega^*(\Delta)$, монотонно стремящаяся к нулю при $\Delta \downarrow 0$, и такая, что

[1] См. также: *Филиппова Т.Ф.* Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: Дис. …д-ра физ.-мат. наук; 01.01.02. Екатеринбург, 1992. 266 с.

$$\alpha(F(t_1+\delta;\ t_1,x_1)-x_1,\ F(t_2+\delta;\ t_2,x_2)-x_2)\le\delta\omega^*(|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|)$$

$$\forall(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in I\times R^m,\quad\forall\delta\in[0,\theta-\max(t_1,t_2)].$$

6°. Существует постоянная $L>0$, такая, что

$$\alpha(F(t_*+\delta;\ t_*,x_1)-x_1,\ F(t_*+\delta;\ t_*,x_2)-x_2)\le\delta L\|x_1-x_2\|$$

$$\forall(t_*,x_1),(t_*,x_2)\in I\times R^m,\quad\forall\delta\in[0,\theta-t_*].$$

Приведем утверждение, характеризующее некоторые свойства ОДС (1.1).

Утверждение 1.1. Для всех $(t_*, x_*)\in I\times R^m$:

1) справедливо равенство $F(t_*;\ t_*, x_*)=\{x_*\}$;

2) многозначное отображение $\delta\to F(t_*+\delta;\ t_*,x_*)$ на отрезке $[0,\theta-t_*]$ непрерывно в хаусдорфовой метрике и удовлетворяет неравенству

$$\alpha(F(t_*+\delta_1;\ t_*,x_*),\ F(t_*+\delta_2;\ t_*,x_*))\le M|\delta_1-\delta_2|,\quad\forall\delta_1,\delta_2\in[0,\theta-t_*].$$

Свойствам 1°–6° удовлетворяют, например, множества достижимости $F(t^*;\ t_*,\ x_*)$ дифференциального включения

$$\dot x\in\mathrm{co}\{f(t,x,u):u\in P\},\quad t\in I,\quad x\in R^m,\tag{1.2}$$

где P – компакт пространства управлений R^p, а вектор-функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных и существует постоянная $L_1\ge 0$, такая, что

$$\|f(t,x_1,u)-f(t,x_2,u)\|\le L_1\|x_1-x_2\|,\quad\forall(t,x_1,u),(t,x_2,u)\in I\times R^m\times P.$$

2) существует постоянная $M_1\ge 0$, такая, что

$$\|f(t,x,u)\|\le M_1,\quad\forall(t,x,u)\in I\times R^m\times P.$$

Определение 1.1 ([1, 2]). Любую функцию $x(\cdot)$: $[t_*,\theta]\to R^m$, $x(t_*)=x_*$, удовлетворяющую включению

$$x(t_2)\in F(t_2;\ t_1,x(t_1)),\quad\forall t_1,t_2\in I,\quad t_1<t_2$$

будем называть траекторией ОДС (1.1), выходящей из начальной позиции $(t_*, x_*)\in I\times R^m$. Совокупность таких траекторий обозначим символом $X(t_*, x_*)$.

Обозначим также

$$X(t;\ t_*,x_*)\ =\ \{x(t)\in R^m:x(\cdot)\in X(t_*,x_*)\}.$$

Известно [1, 2], что любая траектория $x(\cdot)\in X(t_*, x_*)$ непрерывна на отрезке $[t_*, \theta]$, множество $X(t_*, x_*)$ замкнуто и справедливы равенства

$$X(t;\ t_*,x_*)\ =\ F(t;\ t_*,x_*),\quad\forall(t_*,x_*)\in I\times R^m,\quad\forall t\in[t_*,\theta].$$

Пусть наряду с ОДС (1.1) задано замкнутое множество $\Phi\subset I\times R^m$, имеющее непустые сечения $\Phi(t)=\{x\in R^m:(t,x)\in\Phi\}$ $(t\in I)$. Пусть $\Phi(\theta)$ – компакт в R^m.

Будем говорить, что траектория $x(\cdot)\in X(t_*, x_*)$ является выживающей в множестве Φ, если включение $(t, x(t))\in\Phi$ выполнено при всех $t\in[t_*,\theta]$.

Определение 1.2. Ядром выживаемости Ω ОДС (1.1) в множестве Φ назовем множество всех точек $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, для которых существует траектория $x(\cdot) \in X(t_*, x_*)$, выживающая в Φ.

Очевидно, $\Omega \subset \Phi$.

Изучим вопрос о приближенном построении ядра Ω.

2. Дискретизация по времени. Будем подменять временной интервал I конечным набором моментов. Зададим последовательность $\{\Gamma_n\}$ разбиений

$$\Gamma_n = (t_0 = t^0, t^1, \ldots, t^n = \theta)$$

отрезка I с диаметром $\Delta_n = t^{i+1} - t^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, удовлетворяющим соотношению $\Delta_n = (\theta - t_0)/n$; при этом моменты t^i разбиений Γ_n свои для каждого n.

Полагаем

$$F^{-1}(t_*; t^*, x^*) = \{x_* \in R^m : x^* \in F(t^*; t_*, x_*)\}$$

$$\tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, x^*) = 2x^* - F(t^*; t_*, x^*), \quad \omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1+M)\Delta)$$

$$\tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \bigcup\{\tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, x) : x \in X^*\}.$$

Здесь $(t^*, x^*) \in I \times R^m$, $t_* \in [t_0, t^*]$, $\Delta > 0$, $X^* \subset R^m$.

Справедливы следующие два утверждения.

Утверждение 2.1. Справедливо включение

$$F^{-1}(t_*; t^*, x^*) \subset \tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, x^*)_{\omega(t^* - t_*)}, \quad \forall (t^*, x^*) \in I \times R^m, \quad \forall t_* \in [t_0, t^*].$$

Здесь и ниже F_ε при $\varepsilon \geq 0$ – замыкание ε-окрестности множества $F \subset R^m$.

Обратное включение $\tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, x^*) \subset F^{-1}(t_*, t^*, x^*)_\delta$, вообще говоря, неверно для любого $\delta > 0$.

Утверждение 2.2. Справедливо неравенство

$$\alpha(\tilde{F}^{-1}(t^* - \delta; t^*, x_1) - x_1, \tilde{F}^{-1}(t^* - \delta; t^*, x_2) - x_2) \leq \delta L\|x_1 - x_2\|$$

$$\forall (t^*, x_1), (t^*, x_2) \in I \times R^m, \quad \forall \delta \in [0, t^* - t_0].$$

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие последовательность $\{\tilde{\varepsilon}^i\}$ чисел, заданных рекуррентно:

$$\tilde{\varepsilon}^n = 0; \quad \tilde{\varepsilon}^i = \omega(\Delta_n) + (1 + L\Delta_n)\tilde{\varepsilon}^{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 0.$$

Символом $\tilde{\varepsilon}_n$ будем обозначать наибольшее из чисел этой последовательности.

Лемма 2.1. Справедливо предельное соотношение

$$\lim \tilde{\varepsilon}_n = 0.$$

Действительно, методом индукции можно показать справедливость оценки

$$\tilde{\varepsilon}^i \leq e^{(n-i)L\Delta_n}(n-i)\omega(\Delta_n), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

из которой следует неравенство

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}^0 \leq e^{L(\theta - t_0)}(\theta - t_0)\omega^*((1+M)\Delta_n),$$

доказывающее в силу предельных соотношений

$$\lim\Delta_n = 0, \quad \lim_{\Delta\to 0}\omega^*(\Delta) = 0$$

справедливость этой леммы.

Поставим в соответствие каждому разбиению Γ_n последовательность множеств $\tilde{\Omega}_n(t^i) \subset R^m$ ($t^i \in \Gamma_n$), заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t^n = \theta$.

Определение 2.1. Полагаем

$$\tilde{\Omega}_n(\theta) = \Phi(\theta)_{\tilde{\varepsilon}^n} = \Phi(\theta)$$

$$\tilde{\Omega}_n(t^i) = \Phi(t^i)_{\tilde{\varepsilon}^i} \cap \tilde{F}^{-1}(t^i; t^{i+1}, \tilde{\Omega}_n(t^{i+1})), \quad i = n-1, n-2, \ldots, 0.$$

Определим предел последовательности $\{\tilde{\Omega}_n(t^i)\}$, когда диаметр разбиения Γ_n стремится к нулю.

Определение 2.2. Полагаем $\tilde{\Omega}^0$ – множество всех точек $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, для которых найдется последовательность

$$\{(\eta_n, x_n) : \eta_n = t_n(t_*), x_n \in \tilde{\Omega}_n(\eta_n)\}$$

такая, что $(t_*, x_*) = \lim(\eta_n, x_n)$.

Здесь и ниже $t_n(t_*) = \min(t^i \in \Gamma_n : t_* \le t^i\}$; предел берется при $n \to \infty$, если не указано иное.

Из определения 2.2 следует включение $\tilde{\Omega}^0 \subset \Phi$.

Множество $\tilde{\Omega}^0$ непусто, поскольку справедливо равенство $\tilde{\Omega}_n(\theta) = \Phi(\theta)$, и, следовательно, сечение $\tilde{\Omega}^0(\theta) = \{x \in R^m : (\theta, x) \in \tilde{\Omega}^0\}$ множества $\tilde{\Omega}^0$ непусто.

Теорема 2.1. Множество $\tilde{\Omega}^0$ является ядром выживаемости ОДС (1.1) в множестве Φ.

Доказательство. Докажем сначала включение $\tilde{\Omega}^0 \subset \Omega$.

Зафиксируем произвольную точку $(t_*, x_*) \in \tilde{\Omega}^0$ при $t_* < \theta$. Найдется последовательность $\{(\eta_n, x_n) : \eta_n = t_n(t_*), x_n \in \tilde{\Omega}_n(\eta_n)\}$, такая, что

$$(t_*, x_*) = \lim(\eta_n, x_n).$$

Рассмотрим произвольный номер n. Покажем, что существует траектория

$$x_n(\cdot) \in X(\eta_n, x_n) \tag{2.1}$$

удовлетворяющая включениям

$$x_n(t^i) \in \tilde{\Omega}_n(t^i)_{\tilde{\varepsilon}^{n-i}}, \quad t^i \in \Gamma_n, \quad t^i \ge \eta_n \tag{2.2}$$

Верно включение (см. определение 2.1)

$$x_n \in \tilde{F}^{-1}(\eta_n; t^{j+1}, \tilde{x}^{j+1}),$$

где $t^{j+1} = \eta_n + \Delta_n \in \Gamma_n$, $\tilde{x}^{j+1} \in \tilde{\Omega}_n(t^{j+1})$. Из этого включения следует соотношение (см. определение множества $\tilde{F}^{-1}(\cdot)$)

$$\tilde{x}^{j+1} - x_n \in F(t^{j+1}; \eta_n, \tilde{x}^{j+1}) - \tilde{x}^{j+1}. \tag{2.3}$$

Из неравенства (см. свойство 5°)

$$\alpha(F(t^{j+1}; \eta_n, x_n) - x_n, F(t^{j+1}; \eta_n, \tilde{x}^{j+1}) - \tilde{x}^{j+1}) \le \omega(\Delta_n)$$

и соотношения (2.3) следует существование точки

$$x^{j+1} \in F(t^{j+1}; \eta_n, x_n),$$

удовлетворяющей неравенству

$$\|(x^{j+1} - x_n) - (\tilde{x}^{j+1} - x_n)\| \le \omega(\Delta_n),$$

а значит, и неравенству

$$\|x^{j+1} - \tilde{x}^{j+1}\| \le \omega(\Delta_n).$$

Таким образом, найдена точка $x^{j+1} \in F(t^{j+1}; \eta_n, x_n)$, удовлетворяющая включению

$$x^{j+1} \in \tilde{\Omega}_n(t^{j+1})_{\tilde{\varepsilon}^{n-(j+1)}}.$$

Заменив η_n на t^{j+1}, x_n – на $\tilde{x}^{j+1}$ и повторив предыдущие построения, получим точку

$$\bar{x}^{j+1} \in F(t^{j+2}; t^{j+1}, \tilde{x}^{j+1}),$$

удовлетворяющую неравенству

$$\|\bar{x}^{j+2} - \tilde{x}^{j+2}\| \le \omega(\Delta_n), \tag{2.4}$$

где $\tilde{x}^{j+2} \in \tilde{\Omega}_n(t^{j+2})$.

Из соотношения (см. свойство 6°)

$$\alpha(F(t^{j+2}; t^{j+1}, x^{j+1}) - x^{j+1}, F(t^{j+2}; t^{j+1}, \tilde{x}^{j+1}) - \tilde{x}^{j+1}) \le \Delta_n L \tilde{\varepsilon}^{n-(j+1)}$$

следует существование точки

$$x^{j+2} \in F(t^{j+2}; t^{j+1}, x^{j+1}),$$

удовлетворяющей неравенству

$$\|(x^{j+2} - x^{j+1}) - (\bar{x}^{j+2} - \tilde{x}^{j+1})\| \le \Delta_n L \tilde{\varepsilon}^{n-(j+1)},$$

а значит, и неравенству

$$\|x^{j+2} - \bar{x}^{j+2}\| \le (1 + L\Delta_n)\tilde{\varepsilon}^{n-(j+1)}.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (2.4), имеем

$$\|x^{j+2} - \tilde{x}^{j+2}\| \le \tilde{\varepsilon}^{n-(j+2)}.$$

Таким образом, найдена точка $x^{j+2} \in F(t^{j+2}; t^{j+1}, x^{j+1})$, удовлетворяющая включению

$$x^{j+2} \in \tilde{\Omega}_n(t^{j+2})_{\tilde{\varepsilon}^{n-(j+2)}}.$$

Продолжив этот процесс вплоть до момента $t^n = \theta$, получим оставшиеся точки $x^i \in F(t^i; t^{i-1}, x^{i-1})$, удовлетворяющие включениям

$$x^i \in \tilde{\Omega}_n(t^i)_{\tilde{\varepsilon}^{n-i}}, \quad i = j+3, j+4, \ldots, n.$$

Тем самым доказано существование искомой траектории (2.1), удовлетворяющей включениям (2.2).

Введем в рассмотрение функцию, являющуюся непрерывным продолжением найденной траектории на отрезок $[t_*, \theta]$. Пусть

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(\eta_n), & t_* \le t \le \eta_n \\ x_n(t), & \eta_n < t \le \theta. \end{cases}$$

При $n = 1, 2, \ldots$ из равноограниченной и равностепенно непрерывной последовательности $\{y_n(t)\}$ можно выделить равномерносходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что сама последовательность $\{y_n(t)\}$ сходится на $[t_*, \theta]$ равномерно к некоторой функции $x(t)$.

Нетрудно показать, что функция $x(\cdot)$ является траекторией ОДС (1.1): $x(\cdot) \in X(t_*, x_*)$.

Покажем, что траектория $x(\cdot)$ не покидает фазовые ограничения:

$$x(t) \in \Phi(t), \quad t \in [t_*, \theta]. \tag{2.5}$$

Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \theta]$. Обозначим $\tau_n = t_n(t)$ (всюду далее $n = 1$, $2, \ldots$). В силу включений (см. (2.2))

$$x_n(\tau_n) \in \tilde{\Omega}_n(\tau_n)_{\tilde{\varepsilon}_n}, \quad \tilde{\Omega}_n(\tau_n) \in \Phi(\tau_n)_{\tilde{\varepsilon}_n}$$

найдутся точки $\chi_n \in \Phi(\tau_n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|x_n(\tau_n) - \chi_n\| \le 2\tilde{\varepsilon}_n.$$

Следовательно, наряду с предельными соотношениями

$$x(t) = \lim y_n(t) = \lim y_n(\tau_n) = \lim x_n(\tau_n) \tag{2.6}$$

верно предельное соотношение (см. лемму 2.1)

$$\lim x_n(\tau_n) = \lim \chi_n. \tag{2.7}$$

Тогда из сходимости $\lim \tau_n = t$, ограниченности последовательности $\{x_n\}$ и замкнутости множества Φ следует предельное соотношение

$$\lim \chi_n \in \Phi(t). \tag{2.8}$$

В силу предельных соотношений (2.6)–(2.8) – включение (2.5) доказано.

Таким образом, для любой точки $(t_*, x_*) \in \tilde{\Omega}^0$ при $t_* < \theta$ найдется траектория $x(\cdot) \in$ $\in X(t_*, x_*)$, выживающая в Φ.

Очевидно также, что любая точка $(t_*, x_*) \in \tilde{\Omega}^0$ при $t_* = \theta$ удовлетворяет включению $(t_*, x_*) \in \Phi$.

Включение $\tilde{\Omega}^0 \subset \Omega$ доказано.

Докажем обратное включение $\Omega \subset \tilde{\Omega}^0$.

Рассмотрим разбиение Γ_n отрезка I и все те сечения $\Omega(t^i)$ ($t^i \in \Gamma_n$) множества Ω, которые непусты. Обозначим $T_n = \{t^i \in \Gamma_n : \Omega(t^i) \neq \varnothing\}$; очевидно, множество T_n обладает тем свойством, что если $t^i \in T_n$, то и $t^{i+1} \in T_n$.

Покажем справедливость включения

$$\Omega(t^i) \subset \tilde{\Omega}_n(t^i)_{\tilde{\varepsilon}^i}, \quad t^i \in T_n. \tag{2.9}$$

Доказательство проведем по индукции, начиная от конечного момента $t^n = \theta$.

В момент $t^n = \theta$ включение (2.9) выполнено в силу равенств $\Omega(\theta) = \Phi(\theta) = \tilde{\Omega}_n(\theta)_{\tilde{\varepsilon}^n}$.

Предположим, что в момент $t^{i+1} \in T_n$ включение $\Omega(t^{i+1}) \subset \tilde{\Omega}_n(t^{i+1})_{\tilde{\varepsilon}^{i+1}}$ выполнено.

Возьмем произвольную точку $x^i \in \Omega(t^i)$; ей соответствует точка

$$x^{i+1} \in \Omega(t^{i+1}), \quad x^{i+1} \in F(t^{i+1}; t^i, x^i).$$

Приняв точку $\tilde{x}^{i+1} \in \tilde{\Omega}_n(t^{i+1})$ ближайшей к x^{i+1}, в силу индукционного предположения имеем

$$\left\| x^{i+1} - \tilde{x}^{i+1} \right\| \leq \tilde{\varepsilon}^{i+1}.$$

Отсюда следует неравенство (см. утверждение 2.2)

$$\alpha(\tilde{F}^{-1}(t^i; t^{i+1}, x^{i+1}) - x^{i+1}, \tilde{F}^{-1}(t^i; t^{i+1}, \tilde{x}^{i+1}) - \tilde{x}^{i+1}) \leq \Delta_n L \tilde{\varepsilon}^{i+1}. \tag{2.10}$$

Возьмем точку

$$\bar{x}^i \in \tilde{F}^{-1}(t^i; t^{i+1}, x^{i+1})$$

как ближайшую к x^i; тогда верно неравенство (см. утверждение 2.1)

$$\left\| x^i - \bar{x}^i \right\| \leq \omega(\Delta_n). \tag{2.11}$$

Из неравенства (2.10) следует, что найдется точка

$$\tilde{x}^i \in \tilde{F}^{-1}(t^i; t^{i+1}, \tilde{x}^{i+1}),$$

удовлетворяющая неравенству

$$\left\| (\bar{x}^i - x^{i+1}) - (\tilde{x}^i - \tilde{x}^{i+1}) \right\| \leq \Delta_n L \tilde{\varepsilon}^{i+1},$$

а значит, и неравенству

$$\left\| \bar{x}^i - \tilde{x}^i \right\| \leq (1 + L\Delta_n)\tilde{\varepsilon}^{i+1}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство (2.11), имеем

$$\left\| x^i - \tilde{x}^i \right\| \leq \tilde{\varepsilon}^i.$$

Поскольку $x^i \in \Omega(t^i)$, верно включение $x^i \in \Phi(t^i)$; следовательно, $\tilde{x}^i \in \Phi(t_i)_{\tilde{\varepsilon}^i}$ и, значит, $\tilde{x}^i \in \tilde{\Omega}_n(t^i)$.

В силу произвольности выбора точки $x^i \in \Omega(t^i)$ включение $\Omega(t^i) \subset \tilde{\Omega}_n(t^i)_{\tilde{\varepsilon}^i}$ доказано.

Вместе с тем доказано включение (2.9).

Применим включение (2.9) к доказательству включения $\Omega \subset \tilde{\Omega}^0$.

При $t_* = \theta$ выполнены равенства $\Omega(t_*) = \Phi(\theta)$ и $\tilde{\Omega}^0(t_*) = \Phi(\theta)$. Следовательно, верно включение $\Omega(t_*) \subset \tilde{\Omega}^0(t_*)$.

При любом фиксированном $t_* < \theta$ выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega$. Ей соответствует выживающая в Φ траектория $x(t) \in X(t_*, x_*)$.

Зафиксируем номер n. Пусть $\eta_n = t_n(t_*)$. Из включений $x(\eta_n) \in \Omega(\eta_n)$ и (2.9) следует, что найдется точка $x_n \in \tilde{\Omega}_n(\eta_n)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|x(\eta_n) - x_n\| \le \tilde{\varepsilon}_n.$$

Тогда, используя неравенство

$$\|(t_*, x_*) - (\eta_n, x_n)\| \le |t_* - \eta_n| + \|x_* - x(\eta_n)\| + \|x(\eta_n) - x_n\|$$

имеем

$$\|(t_*, x_*) - (\eta_n, x_n)\| \le (1 + M)\Delta_n + \tilde{\varepsilon}_n$$

откуда в силу предельного соотношения $\lim\Delta_n = 0$ и леммы 2.1 получаем

$$(t_*, x_*) = \lim(\eta_n, x_n).$$

Следовательно, $(t_*, x_*) \in \tilde{\Omega}^0$.

При $t_* < \theta$ включение $\Omega(t_*) \subset \tilde{\Omega}^0(t_*)$ доказано.

Из соотношений $\Omega(\theta) \subset \tilde{\Omega}^0(\theta)$ и $\Omega(t_*) \subset \tilde{\Omega}^0(t_*)$ $(t_* < \theta)$ следует включение $\Omega \subset \tilde{\Omega}^0$.

Из включений $\tilde{\Omega}^0 \subset \Omega$, $\Omega \subset \tilde{\Omega}^0$ следует равенство $\Omega = \tilde{\Omega}^0$.

3. Дискретизация фазового пространства. Будем подменять фазовое пространство R^m некоторой γ-решеткой. Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие ряд конструкций.

А. Разобьем пространство R^m на m-мерные кубы B_j с центрами b_j и вершинами, отстоящими от центров на величину γ_n. Величину γ_n будем выбирать удовлетворяющей неравенству

$$\gamma_n \le \Delta_n^2.$$

Бесконечное множество центров b_j назовем γ_n-решеткой пространства R^m и обозначим $N^{\gamma_n}(R^m)$.

Пусть X_* – некоторый компакт в R^m. Выделим все кубы B_j $(j = 1, 2, \ldots, J_0)$, для которых $\mathrm{B}_j \cap X_* \neq \varnothing$; так как множество X_* ограничено, число J_0 конечно. Рассмотрим центры b_j $(j = 1, 2, \ldots, J_0)$ этих кубов. При $\varepsilon > 0$ полагаем

$$N^{\gamma_n}(X_*) = \{b_j : j = 1, 2, \ldots, J_0\}, \quad N_\varepsilon^{\gamma_n}(X_*) = N^{\gamma_n}(N^{\gamma_n}(X_*)_\varepsilon).$$

Отметим, что

$$\alpha(X_*, N^{\gamma_n}(X_*)) \le \gamma_n.$$

Б. Зададим на каждом множестве $F(t^*; t_*, x_*)$ $((t_*, x_*) \in I \times R^m$, $t^* \in [t_*, \theta])$ с помощью некоторого правила конечную δ_n-сеть

$$F_{\delta_n}(t^*; t_*, x_*) = \{f_k \in F(t^*; t_*, x_*) : k = 1, 2, \dots, K_0\}$$

такую, что

$$\alpha(F(t^*; t_*, x_*), F_{\delta_n}(t^*; t_*, x_*)) \le \delta_n.$$

Число δ_n будем выбирать любым, удовлетворяющим неравенству

$$\delta_n \le \Delta_n^2.$$

Полагаем

$$\tilde{F}_{\delta_n}^{-1}(t_*; t^*, x^*) = x^* - F_{\delta_n}(t^*; t_*, x^*)$$

$$\tilde{F}_{\delta_n}^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \bigcup\{\tilde{F}_{\delta_n}^{-1}(t_*; t^*, x^*) : x^* \in X^*\}, \quad X^* \subset R^m.$$

Отметим, что имеет место оценка

$$\alpha(\tilde{F}^{-1}(t_*; t^*, x^*), \tilde{F}_{\delta_n}^{-1}(t_*; t^*, x^*)) \le \delta_n.$$

В. Зададим рекуррентную последовательность $\{\bar{\varepsilon}^i\}$ чисел $\bar{\varepsilon}^i$:

$$\bar{\varepsilon}_n = \gamma_n; \quad \bar{\varepsilon}^i = 2\gamma_n + \omega(\Delta_n) + \delta_n + (1 + L\Delta_n)\bar{\varepsilon}^{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0.$$

Пусть $\bar{\varepsilon}_n$ – наибольшее из чисел $\{\bar{\varepsilon}^i\}$.

Лемма 3.1. Справедливо предельное соотношение

$$\lim \bar{\varepsilon}_n = 0.$$

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2.1 и здесь не приведено.

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие последовательность $\{\bar{\Omega}_n(t^i)\}$ множеств $\bar{\Omega}_n(t^i) \in N^{\gamma_n}(R^m)$ $(t^i \in \Gamma_n)$, заданную рекуррентно, начиная от конечного момента $t^n = \theta$.

Определение 3.1. Полагаем

$$\bar{\Omega}_n(\theta) = N_{\bar{\varepsilon}^n}^{\gamma_n}(\Phi(\theta)); \quad \bar{\Omega}_n(t^i) = N_{\bar{\varepsilon}^i}^{\gamma_n}(\Phi(t^i)) \cap N^{\gamma_n}(\tilde{F}_{\delta_n}^{-1}(t^i; t^{i+1}, \bar{\Omega}_n(t^{i+1}))),$$
$$i = n-1, n-2, \dots, 0.$$

Таким образом, последовательность $\{\bar{\Omega}_n(t^i)\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\bar{\Omega}_n(t^i)$ на решетке $N^{\gamma_n}(R^m)$. Определим предел этой последовательности, когда диаметр разбиения Γ_n стремится к нулю.

Определение 3.2. Полагаем $\overline{\Omega}^0$ – множество всех точек $(t_*, x_*) \in I \times R^m$, для которых найдется последовательность

$$\{(\eta_n, x_n) : \eta_n = t_n(t_*), x_n \in \overline{\Omega}_n(\eta_n)\}$$

такая, что $(t_*, x_*) = \lim(\eta_n, x_n)$.

Из определения 3.2 следует, что $\overline{\Omega}^0 \subset \Phi$.

Множество $\overline{\Omega}^0$ непусто, поскольку справедливо равенство $\overline{\Omega}_n(\theta) = N^{\gamma_n}_{\bar{\varepsilon}^n}(\Phi(\theta))$, и для сечения $\overline{\Omega}^0(\theta) = \{x \in R^m : (\theta, x) \in \overline{\Omega}^0\}$ нетрудно показать соотношение $\overline{\Omega}^0(\theta) = \Phi(\theta)$.

Теорема 3.1. Множество $\overline{\Omega}^0$ является ядром выживаемости ОДС (1.1) в множестве Ф.

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 2.1 (отличия, вызванные наличием конструкций из подразделов А и Б, имеют технический характер) и здесь не приведено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00601-а, 04-01-96099 Урал–а) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ – 8512.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е.А.* К теории обобщенных динамических систем // Уч. зап. МГУ. 1949. № 135. С. 110–133.
2. *Зубов В.И.* Метод Ляпунова и его применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. 241 с.
3. *Roxin E.* Stability in general control systems // J. Different. Equat. 1965. V. 1. № 2 . P. 115–150.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Байдосов В.А.* О подходе к определению динамически игр на языке обобщенных динамических систем // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С. 3–11.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
7. *Aubin J.-P., Clarke F.* Monotone invariant solutions to differential inclusions // J. London Math. Soc. 1977. V. 16. № 2. P. 357–366.
8. *Aubin J.-P.* Viability Theory. Berlin etc.: Birkhauser, 1991. 543 p.
9. *Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T.* Theoremes de viabilite mesurables et l'equation d'Hamilton–Jacobi–Bellman // C. r. Acad. Sc., Ser. 1. 1992. V. 315. № 2. P. 131–134.
10. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. Мат. Ин-та РАН, 1995. Т. 211. С. 304– 315.
11. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 179–187.
12. *Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.* Об инфинитиземальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 2. С. 157–165.
13. *Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.* Об инфинитиземальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. II // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 457–464.
14. *Незнахин А.А., Ушаков В.Н.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде: Сб. докл. Междунар. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 156–158.

Москва
e-mail: a.neznakhin@mail.ru

Поступила в редакцию
2.III.2006