УДК 531.36:62-50

© 2006 г. В. И. Максимов

УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается динамическая система под действием внешних возмущений. Предполагается, что производятся наблюдения фазового состояния системы (или его части) с некоторыми ошибками. Ставится задача построения дифференциальных уравнений оценивания (реконструкции) возмущений по данным измерений. В отличие от работ, в которых анализируются случаи дискретных моментов наблюдений, обсуждается непрерывный случай, для него выводятся дифференциальные уравнения вспомогательной системы, управления в которой являются приближениями неизвестного входа. Общие конструкции иллюстрируются на примере.

1. Введение. Постановка задачи. Задана динамическая система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где t – время, $x \in R^n$ – фазовый вектор системы, $u(t) \in R^m$ – возмущение, B – $(n \times m)$-мерная матрица, f – $(n \times n)$-мерная матричная функция, непрерывная по t и липшицевая по x. Траектория системы $x(\cdot)$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия (возмущения) $u(\cdot)$. Это воздействие, как и траектория, заранее не заданы. Предполагается, что непрерывно производятся наблюдения (измерения) фазового состояния системы (1.1), в результате чего определяются векторы $\xi^h(t) \in R^{n_1}$, $n_1 \le n$ со свойствами

$$\left|\xi^h(t) - \{x(t)\}_{n_1}\right|_{n_1} \le h, \quad t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

Величина $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения, $\{x\}_{n_1}$ – вектор, составленный из первых n_1 координат вектора x, а $|\cdot|_n$ – евклидова норма в пространстве R^n.

Задача непрерывного оценивания заключается в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$, обладающего свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения неизвестного возмущения вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости – что приближение сколь угодно точно при достаточной малости ошибки в канале наблюдения. При этом в момент t разрешается использовать результаты наблюдений $\xi^h(t)$ на отрезке $[0, t]$.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем. Подобные задачи исследовались ранее (например [1–3]). Был предложен [4] подход к решению проблемы динамического восстановления входа конечномерной системы вида (1.1) в случае, когда задано выпуклое, ограниченное и замкнутое множество $P \subset R^m$ (множество "мгновенных" ограничений) со свойством $u(t) \in P$ при п. в. $t \in [0, T]$. Этот подход, получивший дальнейшее развитие в ряде работ (по поводу этих работ см. монографии [5–7] и обзорную статью [8]), основывается на комбинации известного в теории гарантированного управления принципа позиционного управления с моделью [9], а также одном из основополагающих методов теории некорректных задач [10] –

методе сглаживающего функционала (методе Тихонова). Заметим, что задачи динамической реконструкции входов в рамках подхода, развитого Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [5], изучались для случая наблюдения фазового состояния в дискретные моменты времени [5–7, 11]. Ниже, в соответствии с известными идеями [1, 4, 11], указывается алгоритм решения задачи оценивания (реконструкции) в случае непрерывного измерения.

2. Уравнения оценивания. Случай измерения всех координат. Сначала обратимся к случаю измерения всех фазовых координат системы (1.1). Именно будем считать $n_1 = n$. Следовательно, результаты наблюдений – n-мерные векторы $\xi^h(t)$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \le h, \quad t \in [0, T].$$

Пусть L – постоянная Липшица функции f, т.е.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_n \le L|x_1 - x_2|_n, \quad \forall t \in [0, T], \quad x_1, x_2 \in R^n.$$

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h) \in (0, 1)$, обладающую следующим свойством:

$$\alpha(h) \to 0, \quad h^{2/3}\alpha^{-1}(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{2.1}$$

Эта функция играет роль регуляризатора. В качестве уравнения непрерывного оценивания, как видно из приведенной ниже теоремы 1, можно взять управляемую систему вида

$$\dot{w}^h(t) = f(t, w^h(t)) + B\upsilon^h(t) + \nu^h(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.2}$$

с начальным состоянием $w^h(0) = \xi^h(0)$.

Введем обозначения

$$\Delta^h(t) = \xi^h(t) - w^h(t), \quad \Delta_*(t) = u_*(t) - \upsilon^h(t).$$

Управления $\upsilon^h(t)$ и $\nu^h(t)$ в системе (2.2) зададим следующим образом:

$$\upsilon^h(t) = \alpha^{-1}B'\Delta^h(t), \quad \nu^h(t) = L\Delta^h(t). \tag{2.3}$$

Штрих означает транспонирование.

Пусть $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ – элемент множества $U(x(\cdot))$ минимальной $L_2([0, T]; R^m)$-нормы, $U(x(\cdot))$ – множество всех управлений $u(\cdot)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$, т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2([0, T]; R^m)\}:$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \{f(\tau, x(\tau)) + Bu(\tau)\}d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Заметим, что множество $U(x(\cdot))$ выпукло и замкнуто в $L_2([0; T]; R^m)$. Поэтому элемент $u_*(\cdot)$ определен и единствен.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2.1). Тогда имеет место сходимость

$$\upsilon^h(\cdot) \to u_*(\cdot) \text{ в } L_2([0, T]; R^m) \text{ при } h \to 0.$$

В силу известной теоремы ([7], теорема 2.1) для доказательства теоремы 1 достаточно установить справедливость сформулированной далее леммы.

Предварительно введем обозначения

$$I_{km}(t) = \int_0^t |\upsilon^h(\tau)|_m^k d\tau, \quad J_{km}(t) = \int_0^t |u_*(\tau)|_m^k d\tau$$

$$K_{kn}(t) = \int_0^t |\mu_h(\tau)|_n^k d\tau, \quad \mu_h(t) = x(t) - w^h(t).$$

Лемма 1. Можно указать (в явном виде) постоянные d_0, d_1, такие, что справедливы неравенства

$$|\mu_h(t)|_n^2 \le d_0(h^{2/3} + \alpha), \quad t \in [0, T]; \quad I_{2m}(T) \le J_{2m}(T) + d_1 h^{2/3}\alpha^{-1}; \quad \alpha = \alpha(h).$$

Доказательство. В силу соотношений (1.2), (2.3) справедливо неравенство

$$|\upsilon^h(t)|_m^2 \le 2b^2\alpha^{-2}(h^2 + |\mu_h(t)|_n^2), \quad t \in [0, T],$$

где $b = |B'|$ – евклидова норма матрицы B'. В таком случае

$$I_{2m}(t) \le 2b^2\alpha^{-2}K_{2n}(t) + c_1 h^2\alpha^{-2}. \tag{2.4}$$

Видно также, что верно неравенство

$$(B\Delta_*(t), \mu_h(t))_n \le (B\Delta_*(t), \Delta^h(t))_n + bh\varrho_h(t) \text{ при п.в. } t \in [0, T]$$

$$\varrho_h(t) = |u_*(t)|_m + |\upsilon^h(t)|_m.$$

Символ $(\cdot, \cdot)_n$ означает скалярное произведение в R^n.

Далее, умножив на $\mu_h(t)$ правую и левую части равенства

$$\dot{x}(t) - \dot{w}^h(t) = f(t, x(t)) - f(t, w^h(t)) + B\Delta_*(t) - \nu^h(t)$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d|\mu_h(t)|_n^2}{dt} \le (B\Delta_*(t), \mu_h(t))_n + L|\mu_h(t)|_n^2 - L(\Delta^h(t), \mu_h(t))_n \le$$

$$\le (B\Delta_*(t), \Delta^h(t))_n + bh\varrho_h(t) + L|\mu_h(t)|_n^2 - L(\Delta^h(t), \mu_h(t))_n.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\frac{d|\mu_h(t)|_n^2}{dt} + \alpha\left\{|\upsilon^h(t)|_m^2 - |u_*(t)|_m^2\right\} \le -2(\upsilon^h(t), B'\Delta^h(t))_m + \alpha|\upsilon^h(t)|_m^2 + \\ + 2(u_*(t), B'\Delta^h(t))_m - \alpha|u_*(t)|_m^2 + 2bh\,\varrho_h(t) + 2Lh|\mu_h(t)|_n.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Заметим, что управление $\upsilon^h(t)$ вида (2.3) таково:

$$\upsilon^h(t) = \arg\min\{\alpha|\upsilon|_m^2 - 2(B'\Delta^h(t), \upsilon)_m : \upsilon \in R^m\}. \tag{2.6}$$

Из соотношения (2.5) в силу равенства (2.6) получаем

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(0) + 2bh\int_0^t \varrho_h(\tau)d\tau + 2LhK_{1n}(t), \tag{2.7}$$

где

$$\varepsilon_h(t) = |\mu_h(t)|_n^2 + \alpha(I_{2m}(t) - J_{2m}(t)).$$

Ввиду включения $u_*(\cdot) \in L_2([0, T]; R^m)$ имеем

$$\int_0^T 2bh|u_*(\tau)|_m d\tau \le c_2 h.$$

Кроме того

$$2LhK_{1n}(t) \le L^2 h^{2-\gamma} + h^{\gamma} t K_{2n}(t), \quad \gamma \in (0, 1).$$

В таком случае отсюда и из неравенства (2.7) получаем

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(0) + c_3(h + h^{\beta} + h^{2-\gamma} + h^{2-\beta} I_{2m}(t)) + h^{\gamma} t K_{2n}(t), \quad \beta \in (0, 1). \tag{2.8}$$

В свою очередь, из соотношения (2.8) в силу неравенства (2.4) выводим (так как $\varepsilon_h(0) = h^2$, $h^{2-\gamma} \le h^{\beta}$)

$$\varepsilon_h(t) \le c_4 F_1(\alpha) + c_5 F_2(\alpha) K_{2n}(t), \tag{2.9}$$

где

$$F_1(\alpha) = h^{\beta} + h^{4-\beta}\alpha^{-2}, \quad F_2(\alpha) = h^{\gamma} + h^{2-\beta}\alpha^{-2}.$$

Поэтому из неравенства (2.9) следует оценка

$$\begin{gathered} |\mu_h(t)|_n^2 \le c_6(F_1(\alpha) + \alpha) + c_5 F_2(\alpha) K_{2n}(t) \le c_6(F_1(\alpha) + \alpha)\exp\{c_5 t F_2(\alpha)\}, \\ t \in [0, T] \end{gathered} \tag{2.10}$$

(использована лемма Гронуолла).

Пусть $\beta \in (0, 1)$ – постоянная, такая, что

$$h^{2-\beta}\alpha^{-2} \le \text{const}, \quad h \in (0, 1). \tag{2.11}$$

Тогда

$$|\mu_h(t)|_n^2 \le c_7(h^{\beta} + \alpha). \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.9), (2.11), (2.12) выводим

$$\varepsilon_h(t) \le c_4 F_1(\alpha) + c_8 F_2(\alpha)(h^{\beta} + \alpha) \le c_9(F_3(\alpha) + h^{\beta+\gamma} + h^{\gamma}\alpha),$$

где

$$F_3(\alpha) = h^{\beta} + h^{2-\beta}\alpha^{-1} + h^2\alpha^{-2}.$$

Положив $\gamma = \beta$, из последнего неравенства получим

$$\varepsilon_h(t) \le c_{11} F_3(\alpha). \tag{2.13}$$

В таком случае

$$\alpha I_{2m}(t) \le \alpha J_{2m}(t) + c_{11} F_3(\alpha). \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14), считая $\beta = 2/3$, $h^{2/3}\alpha^{-1} \in (0, 1)$, получаем

$$I_{2m}(T) \le J_{2m}(T) + c_{12}\alpha^{-1} F_3(\alpha) \le J_{2m}(T) + c_{13} h^{2/3}\alpha^{-1}. \tag{2.15}$$

Справедливость леммы следует из неравенств (2.12), (2.15).

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости (см. ниже лемму 3). При обосновании этой оценки потребуется

Лемма 2 [5]. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty([0; T]; R^n)$, $\upsilon(\cdot)$ – функция ограниченной вариации и

$$\left|\int_0^t u(\tau)d\tau\right|_n \le \varepsilon, \quad |\upsilon(t)|_n \le K, \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда

$$\left|\int_0^t (u(\tau),\ \upsilon(\tau))_n d\tau\right| \le \varepsilon(K + \mathrm{var}([0,T];\ \upsilon(\cdot))), \quad \forall t \in [0, T]$$

($\mathrm{var}([0, T];\ \upsilon(\cdot))$ – вариация функции $\upsilon(\cdot)$ на отрезке $[0, T]$).

Лемма 3. Пусть $m = n$, B – обратимая $(n \times n)$-матрица и $u_*(\cdot)$ – функция ограниченной вариации. Тогда справедлива оценка скорости сходимости алгоритма

$$|u_*(\cdot) - \upsilon^h(\cdot)|^2_{L_2([0,T];\ R^n)} \le K\{h^{1/3} + h^{2/3}\alpha^{-1} + \alpha^{1/2}\}; \quad \alpha = \alpha(h).$$

Доказательство. Заметим, что для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ верно неравенство

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} B\Delta_*(t)dt\right|_n = \left|\int_{t_1}^{t_2} [\dot{x}(\tau) - \dot{w}^h(\tau) - f(\tau, x(\tau)) + f(\tau, w^h(\tau)) - \nu^h(\tau)]d\tau\right|_n \le$$

$$\le |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_n + K_1\int_{t_1}^{t_2}(h + |\mu_h(\tau)|_n)d\tau,$$

где, как и выше, $\mu_h(t) = x(t) - w^h(t)$. Кроме того, в силу леммы 1

$$|\mu_h(t)|_n \le K_2(h^{2/3} + \alpha)^{1/2}.$$

Отсюда выводим

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} B\Delta_*(t)dt\right|_n \le K_3(h^{2/3} + \alpha)^{1/2}.$$

Воспользовавшись леммой 2, а также соотношением (2.15), получаем

$$|\Delta_*(\cdot)|^2_{L_2([0,T];\ R^n)} \le 2|u_*(\cdot)|^2_{L_2([0,T];\ R^n)} - 2\int_0^T (u_*(\tau),\ \upsilon^h(\tau))_n d\tau + c_{13}h^{2/3}\alpha^{-1} =$$

$$= 2\int_0^T ((B')^{-1}u_*(\tau),\ B\Delta_*(\tau))_n d\tau + c_{13}h^{2/3}\alpha^{-1} \le K\{(h^{2/3} + \alpha)^{1/2} + h^{2/3}\alpha^{-1}\}.$$

Замечания. 1°. Если положить $\alpha = \alpha(h) = h^{4/9}$, то при выполнении условий леммы 3 имеем

$$\sup_{t \in [0,T]} |\mu_h(t)|_n \le K_0 h^{2/9}, \quad |\Delta_*(\cdot)|_{L_2([0;\ T];\ R^n)} \le K_1 h^{1/9}.$$

2°. Аналогично известному подходу [12] устанавливается, что утверждение леммы 3 также верно, если $m < n$ и ранг матрицы B равен m.

3. Уравнения оценивания. Случай измерения части координат. Рассмотрим случай измерения части координат фазового вектора ($n_1 < n$). Пусть y – вектор, составленный из n_1 первых координат вектора x, а z – вектор, составленный из оставшихся $n - n_1$ координат вектора x. Таким образом, $x = (y, z)$. Пусть

$$f(t, x) = f(t, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) + Cz \\ f_2(t, y, z) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix},$$

причем $n_1 > n/2$ и ранг $(n_1 \times (n - n_1))$-мерной матрицы C равен $n - n_1$, а матрица D имеет размерность $(n - n_1) \times m$. В этом случае систему (1.1) можно переписать в виде

$$\dot{y}(t) = f_1(t, y(t)) + Cz(t), \quad \dot{z}(t) = f_2(t, y(t), z(t)) + Du(t). \tag{3.1}$$

При этом неравенства (1.2) примут вид

$$\left|\xi^h(t) - y(t)\right|_{n_1} \le h, \quad t \in T, \quad \xi^h(t) \in R^{n_1}. \tag{3.2}$$

Заметим, что линейность по z в первом уравнении системы (3.1) принципиально важна, так как описанная в предыдущем разделе методика позволяет восстанавливать линейный вход. В то же время, аналогично указанному ранее [4, 5], можно рассмотреть случай, когда матрица C зависит от y.

Будем считать также, что в начальный момент времени измеряется все начальное состояние системы, т.е. определяется вектор $\xi_0^h = (\xi^h(0), \xi_1^h(0)) \in R^n$, такой, что $|\xi_0^h - x(0)|_n \le h$. В качестве уравнения непрерывного оценивания возьмем систему

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^h(t) &= f_1(t, w_1^h(t)) + C\upsilon_1^h(t) + \nu_1^h(t) \\ \dot{w}_2^h(t) &= f_2(t, w_1^h(t), w_2^h(t)) + D\upsilon_2^h(t) + \nu_2^h(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

с управлениями вида

$$\begin{aligned} \upsilon_1^h(t) &= h^{-4/9}C'\Delta_1^h(t), \quad \nu_1^h(t) = L\Delta_1^h(t) \\ \upsilon_2^h(t) &= \alpha^{-1}D'\Delta_2^h(t), \quad \nu_2^h(t) = 2L\Delta_2^h(t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_1^h(t) = \xi^h(t) - w_1^h(t), \quad \Delta_2^h(t) = \upsilon_1^h(t) - w_2^h(t)$$

$\alpha = \alpha(h)$ – вспомогательный параметр. За начальное состояние системы (3.3) примем ξ_0^h, т.е.

$$w_1^h(0) = \xi^h(0), \quad w_2^h(0) = \xi_1^h(0).$$

Теорема 2. Пусть

$$\alpha = \alpha(h) = h^{1/18} \tag{3.5}$$

в выражениях (3.4). Тогда имеют место сходимости

$$\upsilon_1^h(\cdot) \to z(\cdot) \text{ в } L_2([0, T]; R^{n_1}) \tag{3.6}$$

$$\upsilon_2^h(\cdot) \to u_*(\cdot) \text{ в } L_2([0, T]; R^{n - n_1}) \text{ при } h \to 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу замечаний 1° и 2° верны оценки

$$\sup_{t \in [0, T]}\left|y(t) - w_1^h(t)\right|_{n_1} \le \nu^2(h), \quad \left|\upsilon_1^h(\cdot) - z(\cdot)\right|_{L_2([0, T];\, R^{n_1})} \le \nu(h) = Kh^{1/9}, \tag{3.8}$$

из которых следует соотношение (3.6). Таким образом, для доказательства теоремы надо установить сходимость (3.7). Для этого, в свою очередь, достаточно получить оценки, аналогичные оценкам из леммы 1. Проверим, что при выполнении соотношения (3.5) имеют место неравенства

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| z(t) - w_2^h(t) \right|_{n-n_1}^2 \le d_0 h^{1/18}, \quad I_{2m}^{(2)}(T) \le J_{2m}(T) + d_1 h^{1/36}$$
$$I_{2m}^{(2)}(T) = \int_0^T \left| \upsilon_2^h(\tau) \right|_m^2 d\tau. \tag{3.9}$$

В силу выражений (3.4) справедливо соотношение

$$\left| \upsilon_2^h(t) \right|_m^2 \le 2d^2\alpha^{-2}(\varphi_h^2(t) + \nu_2^h(t)), \tag{3.10}$$

где

$$\varphi_h(t) = \left| \upsilon_1^h(t) - z(t) \right|_{n_1}, \quad \mu^h(t) = z(t) - w_2^h(t), \quad \nu_h(t) = \left| \mu^h(t) \right|_{n-n_1}$$

$d = |D'|$ – евклидова норма матрицы D'. В таком случае

$$I_{2m}^{(2)}(t) \le 2d^2 a^{-2} \int_0^t \{ \nu_h^2(\tau) + \varphi_h^2(\tau) \} d\tau. \tag{3.11}$$

Очевидно также, что верно неравенство

$$(D\psi(t), \mu^h(t))_{n-n_1} \le (D\psi(t), \Delta_2^h(t))_{n-n_1} + d\varphi_h(t)\psi_1(t) \text{ при п.в. } t \in [0, T],$$

где

$$\psi(t) = u_*(t) - \upsilon_2^h(t), \quad \psi_1(t) = |u_*(t)|_m + \left| \upsilon_2^h(t) \right|_m.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d\nu_h^2(t)}{dt} \le (D\psi(t), \mu^h(t))_{n-n_1} + L\nu_h^2(t) + L\nu_h(t)\left| y(t) - w_1^h(t) \right|_{n_1} - 2L(\Delta_2^h(t), \mu^h(t))_{n-n_1} \le$$
$$\le (D\psi(t), \Delta_2^h(t))_{n-n_1} + d\varphi_h(t)\psi_1(t) + \frac{3}{2}L\nu_h^2(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}L\left| y(t) - w_1^h(t) \right|_{n_1}^2 - 2L\nu_2^h(t) + 2L\varphi_h(t)\nu_2^h(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d\nu_h^2(t)}{dt} + \alpha\{ \left| \upsilon_2^h(t) \right|_m^2 - |u_*(t)|_m^2 \} \le \alpha \left| \upsilon_2^h(t) \right|_m^2 - 2(\upsilon_2^h(t), D'\Delta_2^h(t))_m - \alpha |u_*(t)|_m^2 +$$
$$+ 2(u_*(t), D'\Delta_2^h(t))_m + 2d\varphi_h(t)\psi_1(t) + L\nu^4(h) + 4L\varphi_h^2(t). \tag{3.12}$$

В дальнейшем, не нарушая общности, считаем $\nu(h) \in (0, 1)$. Тогда, учитывая правило определения управления $\upsilon_2^h(\cdot)$ (см. соотношения (3.4)), из неравенства (3.12) выводим

$$\varepsilon^h(t) \le \varepsilon^h(0) + 2d\int_0^t \varphi_h(\tau)\psi_1(\tau)d\tau + L(t+4)\nu^2(h), \tag{3.13}$$

где

$$\varepsilon^h(t) = \nu_h^2(t) + \alpha\{I_{2m}^{(2)}(t) - J_{2m}(t)\}.$$

Заметим, что в силу оценок (3.8) верны неравенства

$$\int_0^T \varphi_h(\tau)|u_*(\tau)|_m d\tau \le c_0\nu(\tau)$$

$$2\int_0^T \varphi_h(\tau)\left|\upsilon_2^h(\tau)\right|_m d\tau \le 2\nu(h)\sqrt{I_{2m}^{(2)}(T)} \le \nu^\beta(h) + \nu^{2-\beta}(h)I_{2m}^{(2)}(T).$$

В таком случае отсюда и из неравенства (3.13) получаем

$$\varepsilon^h(t) \le \varepsilon^h(0) + c_1(\nu(h) + \nu^2(h) + \nu^\beta(h)) + \nu^{2-\beta}(h)I_{2m}^{(2)}(t) \tag{3.14}$$

В свою очередь, из неравенства (3.14) в силу оценки (3.11) выводим неравенство

$$\varepsilon^h(t) \le \varepsilon^h(0) + c_2\nu^{2-\beta}(h)\alpha^{-2}\int_0^t \nu_h^2(\tau)d\tau + c_3G(\alpha), \tag{3.15}$$

где

$$G(\alpha) = \nu^\beta(h) + \nu^{4-\beta}(h)\alpha^{-2},$$

из которого следует, что

$$\begin{gathered}\nu_h^2(t) \le c_4(\varepsilon^h(0) + G(\alpha) + \alpha) + c_2\nu^{2-\beta}(h)\alpha^{-2}\int_0^t \nu_h^2(\tau)d\tau \le \\ \le c_4(h^2 + G(\alpha) + \alpha)\exp\{c_2t\nu^{2-\beta}(h)\alpha^{-2}\}\end{gathered} \tag{3.16}$$

(использована лемма Гронуолла и равенство $\varepsilon^h(0) = h^2$).

Считая, что при некотором $\beta \in (0, 1)$ и всех $h \in (0, 1)$

$$\nu^{2-\beta}(h)\alpha^{-2} \le \mathrm{const} \tag{3.17}$$

из неравенства (3.16) получаем

$$\nu_h^2(t) \le c_5(\nu^\beta(h) + h^2 + \alpha) \le c_6(h^{\beta/9} + \alpha) \tag{3.18}$$

Из соотношений (3.15), (3.18) выводим

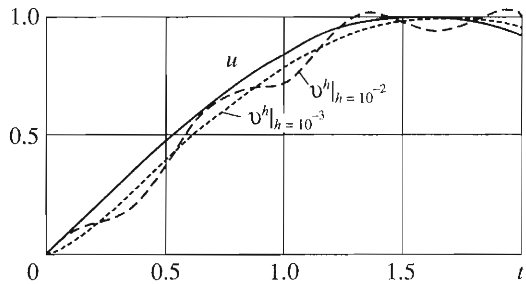
$$\begin{gathered}\varepsilon^h(t) \le h^2 + c_7h^{(2-\beta)/9}\alpha^{-2}(h^{\beta/9} + \alpha) + c_8(h^{\beta/9} + h^{(4-\beta)/9}\alpha^{-2}) \le \\ \le c_9(H(\alpha) + h^{(4-\beta)/9}\alpha^{-2}) \le c_{10}H(\alpha),\end{gathered}$$

где

$$H(\alpha) = h^{\beta/9} + h^{(2-\beta)/9}\alpha^{-1} + h^{2/9}\alpha^{-2}.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}I_{2m}^{(2)}(T) \le J_{2m}(T) + c_{10}\alpha^{-1}H(\alpha) \\ \left|z(t) - w_2^h(t)\right|_{n-n_1}^2 \le c_{11}(H(\alpha) + \alpha).\end{gathered} \tag{3.19}$$



Положив $\beta = 3/4$, $\alpha = h^{1/18}$, из оценок (3.19) получим оценки (3.9), (3.10). Заметим, что при таком выборе α и β справедливо неравенство (3.17).

4. Пример. Тело движется по местности, рельеф которой известен, под действием силы тяги $u = u(t)$, $t \in [0, T]$. Сила тяжести не учитывается. По ходу движения поступают приближенные данные о фазовом положении тела. Требуется синхронно с движением тела вычислять силу тяги u.

Рассмотрим простейшую модель этой ситуации, когда материальная точка движется по гладкой кривой под действием силы, направленной по касательной к этой кривой. Уравнение движения имеет вид, аналогичный указанному ранее [13]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\beta\eta'(x_1(t)) + u(t). \tag{4.1}$$

Здесь x_1 – криволинейная координата, определяющая положение точки, x_2 – скорость изменения координаты, $\eta = \eta(x_1)$ – гладкая функция (полагаем ее липшицевой функцией с постоянной Липшица L), $\eta'(x_1)$ – производная функции $\eta(x_1)$ по x_1, β – постоянный коэффициент. Примем, что время движения T задано. В моменты времени $t \in [0, T]$ измеряется (с ошибкой) состояние $x_2(t)$. Результаты измерения, $\xi^h(t)$, имеют погрешность h:

$$\left|x_2(t) - \xi^h(t)\right| \le h$$

($|a|$ – модуль числа a).

Требуется выписать уравнение непрерывного оценивания силы $u(t)$.

Согласно описанному выше правилу это уравнение имеет вид

$$\dot{w}_1^h(t) = w_2^h(t), \quad \dot{w}_2^h(t) = -\beta\eta'(w_1^h(t)) + \upsilon^h(t) + \nu^h(t), \tag{4.2}$$

где

$$\upsilon^h(t) = \alpha^{-1}(\xi^h(t) - w_2^h(t)), \quad \nu^h(t) = \beta L(\xi^h(t) - w_2^h(t)).$$

Для случая

$$\alpha = 0.1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad T = 2, \quad \eta(x_2) = 0$$

системы (4.1) и (4.2) решались методом Эйлера с шагом 10^{-4}. Результаты показаны на фигуре при $h = 10^{-3}$ и $h = 10^{-2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00059), Программы поддержки фундаментальных исследований президиума РАН № 22 “Процессы управления", Урало-сибирского интердисциплинарного проекта и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ 7581.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
2. *Овсеевич А.И., Трущенков В.Л., Черноусько Ф.Л.* Уравнения непрерывного гарантированного оценивания состояния динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 94–101.
3. *Гусев М.И., Куржанский А.Б.* Обратные задачи динамики управляемых систем// Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 236 с.
7. *Максимов В.И.* Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во Ин-та мат. и мех. УрО РАН, 2000. 305 с.
8. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
9. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
11. *Максимов В.И., Пандолфи Л.* О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 385–391.
12. *Вдовин А.Ю.* Оценки погрешности в задаче динамического восстановления управления // Задачи позиционного моделирования. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 3–11.
13. *Осипов Ю.С.* Задачи динамического восстановления // Число и мысль. Сборник. Вып. 10. М.: Знание, 1987. С. 7–27.

Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
13.V.2005