ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 70. Вып. 5, 2006

УДК 62–50

© 2006 г. Л. В. Камнева

ОБ УСЛОВИЯХ СОВПАДЕНИЯ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ С ФУНКЦИЕЙ ЦЕНЫ ИГРЫ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается дифференциальная игра, в которой функционалом платы является время до попадания точки на целевое множество. Получены достаточные условия совпадения заданной разрывной функции с функцией цены игры. Условия формулируются в терминах классических понятий u- и υ-стабильных функций, но дополнительно требуется выполнение так называемого условия корректной сжимаемости замкнутых множеств уровня тестируемой функции. Приведен пример, который показывает, что условие корректной сжимаемости не является избыточным.

Работа посвящена проблеме поиска условий, налагаемых на заданную разрывную функцию, выполнения которых достаточно для ее совпадения с функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры быстродействия. Исследования проводятся в рамках позиционной формализации дифференциальных игр, введенной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [1].

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управляющего воздействия второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Классический подход [1–4] к решению дифференциальной игры заключается в поиске функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены строятся стратегии оптимального управления по принципу обратной связи.

В случае дифференцируемой функции цены задача ее поиска сводится [2] к решению краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Айзекса – Беллмана).

Если функция цены негладкая, но непрерывная, то основными при ее характеризации становятся понятия непрерывных u- и υ-стабильных функций ([3], с. 145), введенные в теории позиционных дифференциальных игр. В этом случае u-стабильные (υ-стабильные) функции при соответствующем краевом условии мажорируют (минорируют) функцию цены дифференциальной игры, которая единственная обладает свойствами u- и υ-стабильности.

Необходимость рассмотрения разрывной функции цены возникает, например, в задачах быстродействия, что приводит к понятиям полунепрерывных u- и υ-стабильных функций. При этом характеризация функции цены значительно усложняется. А именно, в задачах быстродействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу u-стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху υ-стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию. Проверка существования такой последовательности и, тем более, ее построение затруднительны при решении даже задач на плоскости.

В данной статье предлагаются достаточные условия совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены исследуемой дифференциальной игры быстродействия. Условия предполагают полунепрерывность снизу и u-стабильность тестируемой функции, υ-стабильность верхнего замыкания тестируемой функции, а также выполнение введенного в работу условия *корректной сжимаемости* замкнутых множеств уровня тестируемой функции.

Свойства u- и υ-стабильности хорошо изучены в теории дифференциальных игр. Получены различные инфинитезимальные критерии u- и υ-стабильности полунепрерывных функций ([4], с. 38). Заметим также, что понятие u-стабильной (υ-стабильной) функции соответствует понятию верхнего (нижнего) обобщенного вязкостного решения уравнения в частных производных первого порядка (см., например, [5]). Проверка условия корректной сжимаемости замкнутого множества представляет собой самостоятельную задачу, решение которой в общем случае неочевидно и в данной статье не исследуется.

В теории оптимального управления аналогом подхода к решению задачи на базе функции цены служит метод динамического программирования. Если функция оптимального результата (функция Беллмана) дифференцируема, то ее поиск сводится к решению соответствующей краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка. В этом случае с помощью функции Беллмана определяется оптимальное управление по принципу обратной связи. Если функция Беллмана негладкая, но непрерывная, то для решения задачи в классе управлений по принципу обратной связи может быть использован регулярный синтез Болтянского ([6], с. 263). В случае разрывной функции Беллмана построение оптимального управления по принципу обратной связи и его обоснование, как правило, опирается на особенности динамики каждой конкретной задачи.

Предлагаемые ниже достаточные условия оптимальности справедливы и для задач управления, поскольку задачи теории управления можно рассматривать как частный случай задач теории дифференциальных игр (при нулевом ограничении управления второго игрока). Однако каких-либо упрощений в формулировке условий не появляется, т.е. требуется проверка υ-стабильности верхнего замыкания тестируемой функции, несмотря на отсутствие второго игрока.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \upsilon(t)), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние в момент времени t; $u(t) \in P$ и $\upsilon(t) \in Q$ – управления первого (минимизирующего) и второго (максимизирующего) игроков; P и Q – компактные множества. Предполагается, что функция $f(x, u, \upsilon)$ непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, u, \upsilon)\| \leq \kappa(1 + \|x\|), \quad \kappa = \text{const} > 0$$

и в каждой ограниченной области $X \subset R^n$ справедливо условие Липшица по переменной x, т.е.

$$\left\|f(x^{(1)}, u, \upsilon) - f(x^{(2)}, u, \upsilon)\right\| \leq \lambda(X)\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|, \quad \lambda(X) = \text{const} > 0$$

для всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$, $u \in P$, $\upsilon \in Q$. Кроме того, пусть для любых $x, p \in R^n$ выполнено условие седловой точки [1]

$$H(x, p) = \min_{u \in P} \max_{\upsilon \in Q} \langle p, f(x, u, \upsilon)\rangle = \max_{\upsilon \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, \upsilon)\rangle.$$

Здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Цель первого игрока – быстрейшее сближение фазовой точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset R^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи.

Используется позиционная формализация [1] игры быстродействия.

При указанных условиях, налагаемых на функцию $f(x, u, \upsilon)$, для любого $x_0 \in R^n$ существует [1] цена игры $T(x_0; M)$. Функция $T(\cdot; M) : R^n \to [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

Задача состоит в нахождении таких условий, налагаемых на функцию $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$. Здесь $\Omega \subseteq R^n$ – замкнутое множество, $M \subset \Omega$. Искомые условия должны использовать только свойства функции $\varphi(\cdot)$ и не требовать никаких дополнительных построений.

2. Свойства функции цены игры. Приведем основные свойства функции цены, которые будут использоваться в дальнейшем.

Введем обозначение

$$W(t; M) = \{x \in R^n : T(x; M) \le t\}, \quad t \ge 0.$$

Для любого $\tau > 0$ и любого $x \notin W(\tau; M)$ выполнено равенство

$$T(x; M) = T(x; W(\tau; M)) + \tau.$$

Из известных результатов [1, 4] следует, что $T(\cdot; M)$ – полунепрерывная снизу функция, $M = W(0; M)$ и выполнено следующее свойство u-стабильности.

Свойство T_u. Для любых $y_0 \in R^n \setminus M$, $\upsilon_* \in Q$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to R^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u, \upsilon_*), u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что либо выполнено неравенство $T(y(\tau); M) \le T(y_0; M) - \tau$, либо $y(t) \in M$ для некоторого $t \in [0, \tau]$. Символ co обозначает выпуклую оболочку множества.

Заметим, что из свойства T_u непосредственно следует, что если $x_* \in R^n \setminus M$ и $T(x_*; M) < \infty$, то существует такая последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, что $T(x_n; M) < T(x_*; M)$ и $x_n \to x_*$ при $n \to \infty$.

Для верхнего замыкания

$$T^*(x; M) = \limsup_{y \to x} T(y; M)$$

функции цены выполнено ([4], с. 258) следующее свойство υ-стабильности.

Свойство T_υ. Для любых $y_0 \in R^n \setminus M$, $u_* \in P$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to R^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u_*, \upsilon), \upsilon \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство

$$T^*(y(\tau); M) \ge T^*(y_0; M) - \tau.$$

3. Корректно сжимаемые множества. Пусть $\mathbf{M} \subset R^n$ – замкнутое множество, $\mathrm{int}\mathbf{M}$ – внутренность множества $\mathbf{M}$. При условии $\mathrm{int}\mathbf{M} \ne \varnothing$ положим

$$\mathbf{M}^{[\varepsilon]} = \{x \in \mathbf{M} : \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathbf{M}\}, \quad \varepsilon > 0; \quad \varepsilon_{\mathbf{M}} = \max\{\varepsilon > 0 : \mathbf{M}^{[\varepsilon]} \ne \varnothing\}$$

$\mathbf{B}(x, \varepsilon)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{M}$ – замкнутое множество, $\mathrm{int}\mathbf{M} \ne \varnothing$, $x_* \in R^n$ и

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x_*; \mathbf{M}). \tag{3.1}$$

Тогда функция $T(\cdot; \mathbf{M})$ непрерывна в точке x_*.

Доказательство. Пусть $\vartheta_* = T(x_*; \mathbf{M})$. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, сходящуюся к x_*. Требуется доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n; \mathbf{M}) = \vartheta_*. \tag{3.2}$$

Учитывая полунепрерывность снизу функции $T(\cdot; \mathbf{M})$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \ge \vartheta_*. \tag{3.3}$$

Отсюда находим, что если $\vartheta_* = \infty$, то равенство (3.2) выполнено.

Кроме того, если $x_* \in \operatorname{int}\mathbf{M}$, то равенство (3.2) также справедливо.

Предположим, что $\vartheta_* < \infty$ и $x_* \notin \operatorname{int}\mathbf{M}$. Пусть $\tau > 0$. В силу соотношения (3.1) найдется такое $\varepsilon > 0$, что $T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) \le \vartheta_* + \tau$. Следовательно, существует [1] множество $W_u \subset [0, \vartheta_* + \tau] \times R^n$, обладающее свойством u-стабильности относительно множества $[0, \vartheta_* + \tau] \times \mathbf{M}^{[\varepsilon]}$, и $(0, x_*) \in W_u$.

Если первый игрок использует стратегию экстремального прицеливания на множество W_u из начальной точки x_n, а за второго игрока реализуется измеримое программное управление $\upsilon(\cdot)$ со значениями в множестве Q, то для возникающего конструктивного движения $x(\cdot)$ системы (1.1) справедлива оценка ([1], с. 62)

$$\min_{t \in [0, \vartheta_* + \tau]} \operatorname{dist}(x(t), \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) \le \|x_* - x_n\| \exp(\lambda(X)(\vartheta_* + \tau)).$$

Здесь $\lambda(X)$ – постоянная Липшица по x функции f в некоторой ограниченной области $X \subset R^n$, содержащей все рассматриваемые движения, $\operatorname{dist}(x(t), \mathbf{M}^{[\varepsilon]})$ – расстояние от точки $x(t)$ до множества $\mathbf{M}^{[\varepsilon]}$.

Следовательно, если

$$\|x_* - x_n\| \le \varepsilon \exp(-\lambda(X)(\vartheta_* + \tau)),$$

то

$$\min_{t \in [0, \vartheta_* + \tau]} \operatorname{dist}(x(t), \mathbf{M}) \le 0 \quad \text{и} \quad T(x_n; \mathbf{M}) \le \vartheta_* + \tau.$$

Учитывая неравенство (3.3), имеем

$$\vartheta_* = T(x_*; \mathbf{M}) \le \liminf_{n \to \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \le \limsup_{n \to \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \le \vartheta_* + \tau.$$

Поскольку величина τ была выбрана произвольно, то, переходя к пределу при $\tau \to 0$, получаем равенство (3.2).

Определение 3.1. Множество $\mathbf{M} \subset R^n$ называется *корректно сжимаемым* по отношению к динамике (1.1), если существует такое число $\vartheta > 0$, что выполнены следующие условия.

Условие C1. $W(\vartheta; \mathbf{M}) \ne \mathbf{M}$ и $W(t; \mathbf{M}) = \overline{\operatorname{int} W(t; \mathbf{M})}$, $t \in [0, \vartheta]$.

Условие C2. Для любой точки $x \in \operatorname{int} W(\vartheta; \mathbf{M}) \setminus \mathbf{M}$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x; \mathbf{M}).$$

Заметим, что если $W(\vartheta; \mathbf{M}) \ne \mathbf{M}$, то в силу свойства T_u u-стабильности функция $T(\cdot; \mathbf{M})$ должна принимать все значения из интервала $(0, \vartheta)$. Отсюда получаем, что для корректно сжимаемого множества $\mathbf{M}$ величина $\vartheta > 0$, удовлетворяющая условиям C1 и C2, может быть выбрана сколь угодно малой.

Приведем простейшие условия корректной сжимаемости множества $\mathbf{M}$.

Пусть множество $\mathbf{M}$ имеет гладкую границу $\partial\mathbf{M}$, $\mathbf{M} = \overline{\operatorname{int}\mathbf{M}}$ и для любой точки $x \in \partial\mathbf{M}$ выполнено неравенство

$$\min_{u \in P} \max_{\upsilon \in Q} \langle \nu(x), f(x, u, \upsilon) \rangle < 0, \tag{3.4}$$

где $\nu(x)$ – внешняя нормаль к множеству $\mathbf{M}$ в точке $x \in \partial\mathbf{M}$.

Выберем $\vartheta > 0$ и $x_* \in W(\vartheta; \mathbf{M})$. Из условия (3.4) и определения цены игры следует, что для любого $\tau > 0$ первый игрок гарантирует попадание из точки x_* на множество $\operatorname{int}\mathbf{M}$ на отрезке времени $[0, T(x_*; \mathbf{M}) + \tau]$. Следовательно, найдется такое $\varepsilon_* > 0$, что

$$T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon_*]}) \le T(x_*; \mathbf{M}) + \tau.$$

Отсюда, учитывая невозрастание значений $T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]})$ при $\varepsilon \to +0$, получаем предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x_*; \mathbf{M}).$$

Таким образом, условие C2 из определения корректной сжимаемости множества выполнено для любого $\vartheta > 0$.

Для любого $x_* \in R^n \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} W(\vartheta; \mathbf{M})$ имеем

$$T(x_*; \mathbf{M}) = T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon_*]}) = \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\mathbf{M}}].$$

В силу леммы 3.1 получаем непрерывность функции цены $T(\cdot; \mathbf{M})$ на R^n.

Заметим, что условия непрерывности функции цены при более слабых предположениях относительно множества **M** доказаны ранее [5].

Справедливость условия C1 для любого $\vartheta > 0$ следует из непрерывности функции $T(\cdot; \mathbf{M})$ и свойства T_u.

Таким образом, множество **M** корректно сжимаемо.

Более сложные достаточные условия корректной сжимаемости множеств связаны с разрывной функцией цены и здесь не рассматриваются.

4. Формулировка теоремы о достаточных условиях. Сформулируем основное утверждение.

Теорема. Пусть $\Omega \subseteq R^n$ и $M \subset \Omega$ – замкнутые множества, функция $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ полунепрерывна снизу и выполнены следующие условия.

Условие A1. Справедливо равенство $\varphi(x) = 0, x \in M$.

Условие A2 (u-стабильность). Для любых $y_0 \in \Omega \setminus M$, $\upsilon_* \in Q$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to R^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u, \upsilon_*), u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что либо $y(\tau) \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\varphi(y(\tau)) \leq \varphi(y_0) - \tau,$$

либо $y(t) \in M$ для некоторого $t \in [0, \tau]$.

Условие A3 (υ-стабильность). Для любых $y_0 \in \Omega \setminus M$, $u_* \in P$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to R^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u_*, \upsilon), \upsilon \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство

$$\varphi^*(y(\tau)) \geq \varphi^*(y_0) - \tau,$$

где

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{z \to x} \varphi(z), & x \in \mathrm{int}\Omega \\ \sup\limits_{z \in \Omega} \varphi(z), & x \notin \mathrm{int}\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Условие A4. Множества уровня

$$D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad 0 < t < \sup_{z \in \Omega} \varphi(z)$$

корректно сжимаемы.

Тогда

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega. \tag{4.2}$$

Полунепрерывную сверху функцию $\varphi^*(\cdot) : R^n \to [0, \infty]$, определяемую формулой (4.1), будем называть верхним замыканием функции $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$.

Замечание 1. Пусть для функции $\varphi(\cdot)$ выполнены условия A1–A3 и условие корректной сжимаемости множеств $D(t)$ нарушено лишь в некоторой одной точке $a \in (0, \sup\limits_{z \in \Omega} \varphi(z))$. Тогда теорему о достаточных условиях можно применить сначала к функции $\varphi(\cdot) : D(a) \to [0, \infty)$. Это даст равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in D(a)$. Далее, вводя обозначения

$$M_1 = D(a), \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a, & x \notin M_1 \\ 0, & x \in M_1 \end{cases}$$

теорему можно применить к функции $\varphi_1(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ и дифференциальной игре с терминальным множеством M_1. Отсюда, используя соотношение $T(x; M_1) = T(x; M) - a$, получаем равенство $\varphi(x) = T(x; M)$ для всех $x \in \Omega$.

Аналогичным образом теорема может быть применена в случае, когда корректная сжимаемость множеств уровня $D(t)$ функции $\varphi(\cdot)$ нарушена в конечном числе точек из интервала $(0, \sup\limits_{z \in \Omega} \varphi(z))$.

Замечание 2. Из свойств T_u и T_υ функции цены следует, что условия A1–A3 являются необходимыми для функции цены игры. Если функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна, то условия A1–A3 будут необходимыми и достаточными [4] для выполнения равенства (4.2).

В разд. 6 приведем пример, показывающий, что в случае разрывной функции $\varphi(\cdot)$ условий A1–A3 недостаточно для выполнения равенства (4.2), т.е. нельзя отказаться от условия A4.

5. Доказательство теоремы о достаточных условиях. Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5.1. Пусть замкнутое множество $M \subset R^n$ и полунепрерывная снизу функция $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ удовлетворяют условиям A1 и A2. Тогда

$$T(x_0; M) \le \varphi(x_0), \quad x_0 \in \Omega.$$

Доказательство. Если $x_0 \in M$, то по условию A1 имеем

$$\varphi(x_0) = T(x_0; M) = 0.$$

Если $x_0 \in \Omega \backslash M$ и $\varphi(x_0) = \infty$, то $T(x_0; M) \le \infty = \varphi(x_0)$.

Пусть $x_0 \in \Omega \backslash M$, $\vartheta_* = \varphi(x_0) < \infty$. Покажем, что

$$T(x_0; M) \le \vartheta_*. \tag{5.1}$$

Рассмотрим множество

$$W_* = \left\{ (t, x) \in [0, \vartheta_*] \times \overline{R^n \backslash M} : \varphi(x) \le \vartheta_* - t \right\}.$$

Из условия A2 следует, что W_* – u-стабильный мост [1] в задаче приведения точки $(t, x(t))$ на множество $[0, \vartheta_*] \times M$. Так как $(0, x_0) \in W_*$, то первый игрок обладает [1] позиционной стратегией, гарантирующей попадание на множество M на отрезке времени $[0, \vartheta_*]$.

Из определения цены игры, для любого $\delta > 0$ второй игрок обладает позиционной стратегией, гарантирующей уклонение от окрестности множества M на отрезке времени $[0, T(x_0; M) - \delta]$ при любых действиях первого игрока. Отсюда имеем неравенство $T(x_0; M) - \delta < \vartheta_*$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, справедливо неравенство (5.1).

Лемма 5.2. Пусть замкнутое множество $M \subset R^n$ и полунепрерывная снизу функция $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ удовлетворяют условиям A1 и A3. Кроме того, пусть $\mathrm{int} M \ne \varnothing$. Тогда

$$\varphi^*(x_0) \le T(x_0; M^{[\varepsilon]}), \quad x_0 \in R^n, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in R^n$ и $\vartheta^* = \varphi^*(x_0) < \infty$. Положим

$$W^* = \{(t, x) \in [0, \vartheta^*] \times R^n : \varphi^*(x) \geq \vartheta^* - t\}.$$

Из условия A3 следует, что W^* – υ-стабильное множество [1]. Так как $(0, x_0) \in W^*$, то второй игрок обладает [1] позиционной стратегией, гарантирующей удержание системы в множестве W^* на отрезке времени $[0, \vartheta^*]$. Поскольку

$$([0, \vartheta^*] \times M^{[\varepsilon]}) \cap W^* = \varnothing, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M],$$

то второй игрок уклоняется от некоторой окрестности множества $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, \vartheta^*]$ при любых действиях первого игрока. Но первый игрок обладает позиционной стратегией, гарантирующей попадание на $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, T(x_0; M^{[\varepsilon]})]$. Таким образом,

$$\vartheta^* < T(x_0; M^{[\varepsilon]}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M].$$

Пусть $x_0 \in R^n$ и $\varphi^*(x_0) = \infty$. Положим

$$W_\infty = [0, \infty) \times \{x \in R^n : \varphi^*(x) = \infty\}.$$

Множество W_∞ замкнуто и $(0, x_0) \in W_\infty$. Из условия A3 следует, что W_∞ – υ-стабильное множество. Поскольку $\varphi^*(x) = 0$ для любого $x \in \mathrm{int}M$, то

$$([0, \infty) \times \mathrm{int}M) \cap W_\infty = \varnothing.$$

Следовательно,

$$([0, \infty) \times M^{[\varepsilon]}) \cap W_\infty = \varnothing, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M].$$

Отсюда получаем, что для любого $\vartheta > 0$ второй игрок обладает [1] позиционной стратегией, гарантирующей уклонение от окрестности множества $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Значит, $T(x_0; M^{[\varepsilon]}) = \infty$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_M]$.

Лемма 5.3. Пусть замкнутые множества $D_\tau \subset R^n$, $\tau > 0$, монотонно убывают по включению при $\tau \to +0$ и $\cap_{\tau > 0} D_\tau = M$. Тогда

$$\lim_{\tau \to +0} T(x; D_\tau) = T(x; M), \quad x \in R^n. \tag{5.2}$$

Доказательство. 1°. Обозначим через M_ε замкнутую ε-окрестность терминального множества M, т.е.

$$M_\varepsilon = \{z_1 + z_2 : z_1 \in M, \|z_2\| \leq \varepsilon\}.$$

Покажем, что

$$T(x; M) = \lim_{\varepsilon \to +0} T(x; M_\varepsilon), \quad x \in R^n. \tag{5.3}$$

Для всех $x \in M$ равенство (5.3) очевидно. Выберем $x \in R^n \backslash M$.

Пусть $T(x; M) < \infty$. Поскольку $M \subset M_\varepsilon$, то

$$T(x; M_\varepsilon) \leq T(x; M). \tag{5.4}$$

Из известных результатов [1] следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что второй игрок уклоняется от множества M_ε из точки x на отрезке времени $[0, T(x; M) - \delta]$. Следовательно,

$$T(x; M) - \delta < T(x; M_{\varepsilon(\delta)}). \tag{5.5}$$

Учитывая неравенства (5.4), (5.5), получаем равенство (5.3) для точки x.

Пусть $T(x; M) = \infty$. Согласно известным результатам [1], для любого $K > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что второй игрок уклоняется от множества M_ε на отрезке времени $[0, K]$, т.е. $T(x, M_\varepsilon) > K$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x; M_\varepsilon) = \infty$$

и равенство (5.3) для точки x выполнено.

2°. Пусть $x_* \in R^n$ и $\vartheta = T(x_*; M) < \infty$. Существует замкнутое ограниченное множество $Z \subset R^n$, содержащее все возможные траектории системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_*$ на отрезке времени $[0, \vartheta]$.

Для числа $\tau > 0$ определим значение

$$\varepsilon(\tau) = \min\{\varepsilon : D_\tau \cap Z \subseteq M_\varepsilon \cap Z\}.$$

Имеем $\varepsilon(\tau) \to +0$ при $\tau \to +0$.

Из вложений $M \subseteq D_\tau$ и $D_\tau \cap Z \subseteq M_{\varepsilon(\tau)} \cap Z$, $\tau > 0$ следуют неравенства

$$T(x_*; M_{\varepsilon(\tau)}) \le T(x_*; D_\tau) \le T(x_*; M).$$

Отсюда при учете соотношения (5.3) получаем

$$\lim_{\tau \to +0} T(x_*; M_{\varepsilon(\tau)}) = \lim_{\tau \to +0} T(x_*; D_\tau) = T(x_*; M).$$

Таким образом, равенство (5.2) доказано.

3°. Пусть $x_* \in R^n$ и $T(x_*; M) = \infty$. В силу соотношения (5.3) имеем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x_*; M_\varepsilon) = \infty,$$

Выберем произвольное $K > 0$. Обозначим через $Z(K)$ замкнутое ограниченное множество в пространстве R^n, содержащее все траектории системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_*$ на отрезке времени $[0, K]$. Найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$, что $T(x_*; M_\varepsilon) > K$. Поскольку $\cap_{\tau > 0} D_\tau = M$, то существует такое $\tau = \tau(K) > 0$, что $D_\tau \cap Z(K) \subset M_\varepsilon \cap Z(K)$. Следовательно, $T(x_*; D_\tau) > K$. Поскольку число K выбрано произвольно, получаем равенство

$$\lim_{\tau \to +0} T(x_*; D_\tau) = \infty,$$

и соотношение (5.2) выполнено.

Доказательство теоремы. Если $M = \Omega$, то заключение теоремы очевидно.

Пусть $M \ne \Omega$. Условие A1 дает соотношение $W(0; M) = M \subseteq D(0)$. Из условия A2 u-стабильности следует отсутствие точек локального минимума функции $\varphi(\cdot)$ вне множества M, в которых она принимает конечные значения. Таким образом, получаем равенство $W(0; M) = D(0)$.

Поскольку $M \ne \Omega$ и $D(0) = M$, то $\sup\limits_{x \in \Omega} \varphi(x) > 0$.

Выберем $\tau \in (0, \sup\limits_{x \in \Omega} \varphi(x))$. Определим функцию $\varphi_\tau(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ следующим образом:

$$\varphi_{\tau(x)} = \begin{cases} \varphi(x) - \tau, & x \notin D(\tau) \\ 0, & x \in D(\tau). \end{cases}$$

Покажем, что

$$T(x; D(\tau)) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.6}$$

Для краткости положим $D_\tau = D(\tau)$. Множество D_τ и полунепрерывная снизу функция $\varphi_\tau(\cdot)$ удовлетворяют условиям A1–A4, в которых обозначения M и $\varphi(\cdot)$ заменены на D_τ и $\varphi_\tau(\cdot)$.

Пусть

$$\Theta = \sup_{x \in \Omega} \varphi_\tau(x), \quad E(t) = \{x \in \Omega : \varphi_\tau(x) \le t\}$$

$$\gamma = \sup\{\vartheta \in [0, \Theta) : W(t; D_\tau) = E(t)\ \forall t \in [0, \vartheta]\}.$$

Заметим, что для любых $\vartheta \in [0, \gamma)$ и $x \in E(\vartheta)$ выполнено равенство $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$. Действительно, пусть $t = T(x; D_\tau)$. Поскольку $E(\vartheta) = W(\vartheta; D_\tau)$, имеем $t \in [0, \vartheta]$ и $x \in W(t; D_\tau) = E(t)$. В силу леммы 5.1 выполнено неравенство $t \le \varphi_\tau(x)$. С другой стороны, поскольку $x \in E(t)$, то $\varphi_\tau(x) \le t$. Следовательно, $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\gamma = \infty$. Для любого $\vartheta \ge 0$ и $x \in E(\vartheta)$ имеем $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$. Если $x \in \Omega \backslash \cup_{\vartheta \ge 0} E(\vartheta)$, то, учитывая определение величины γ, находим, что $x \notin \cup_{\vartheta \ge 0} W(\vartheta; D_\tau)$, и следовательно, $T(x; D_\tau) = \infty$. В силу леммы 5.1 получаем равенство $\varphi_\tau(x) = \infty$. Таким образом, соотношение (5.6) доказано.

Случай 2: $\gamma < \infty$ и $\gamma = \Theta$. Если $x \in E(\vartheta)$ для некоторого $\vartheta \in [0, \gamma)$, то равенство (5.6) выполнено.

Пусть $x \in \Omega \backslash \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} E(\vartheta)$. Учитывая лемму 5.1, имеем

$$\varphi_\tau(x) \ge T(x; D_\tau) \ge \gamma = \Theta.$$

В силу определения числа Θ получаем равенство $T(x; D_\tau) = \gamma$. Из свойства T_u u-стабильности функции цены следует существование такой последовательности $\{x_k\}_1^\infty$, что $t_k = T(x_k; D_\tau) < \gamma$ и $x_k \to x$ при $k \to \infty$. Поскольку $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$ и $x_k \in E(t_k)$, справедливо равенство $\varphi_\tau(x_k) = T(x_k; D_\tau)$.

В силу леммы 5.1 и полунепрерывности снизу функции $\varphi_\tau(\cdot)$ получаем

$$\gamma = T(x; D_\tau) \le \varphi_\tau(x) \le \limsup_{k \to \infty} \varphi_\tau(x_k) = \limsup_{k \to \infty} T(x_k; D_\tau) = \limsup_{k \to \infty} t_k \le \gamma.$$

Таким образом, соотношение (5.6) доказано.

Случай 3: $\gamma \in [0, \Theta)$. Введем обозначения

$$\mathbf{M} = E(\gamma), \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_\tau(x) - \gamma, & x \notin \mathbf{M} \\ 0, & x \in \mathbf{M}, \end{cases} \qquad \mathbf{D}(t) = \{x \in \Omega : \tilde{\varphi}(x) \le t\}.$$

Имеем $\sup_{x \in \Omega} \tilde{\varphi}(x) = \Theta - \gamma$.

Множество $\mathbf{M}$ и полунепрерывная снизу функция $\tilde{\varphi}(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ удовлетворяют условиям A1–A3, в которых обозначения M и $\varphi(\cdot)$ заменены на $\mathbf{M}$ и $\tilde{\varphi}(\cdot)$. Учитывая условие A4 теоремы и равенство $\mathbf{M} = D(\tau + \gamma)$, где $0 < \tau + \gamma < \sup_{x \in \Omega} \varphi(x)$, находим, что множество $\mathbf{M}$ корректно сжимаемо. Следовательно, существует такое $\vartheta > 0$, что выполнены условия C1 и C2. Число ϑ выберем так, что $\vartheta < \Omega - \gamma$.

Покажем, что

$$W(t; \mathbf{M}) = \mathbf{D}(t), \quad t \in (0, \vartheta). \tag{5.7}$$

Выберем $t \in (0, \vartheta)$. Учитывая лемму 5.1, получаем

$$\mathbf{D}(t) \subseteq W(t; \mathbf{M}) = \overline{\mathrm{int}\, W(t; \mathbf{M})}.$$

Предположим, что

$$W(t;\ \mathbf{M})\backslash\mathbf{D}(t) \neq \varnothing. \tag{5.8}$$

Так как $\tilde{\varphi}(\cdot)$ – полунепрерывная снизу функция, то $\mathbf{D}(t)$ – замкнутое множество. Пусть $x \in \operatorname{int} W(t;\ \mathbf{M})\backslash\mathbf{D}(t)$. Имеем $T(x;\ \mathbf{M}) \in (0, t]$. Если $x \in \Omega$, то из соотношения $x \notin \mathbf{D}(t)$ получаем неравенство $t < \tilde{\varphi}(x)$. Таким образом, $t < \tilde{\varphi}^*(x)$, где $\tilde{\varphi}^*(\cdot)$ – верхнее замыкание функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$, определяемое формулой (4.1). Если $x \notin \Omega$, то $\tilde{\varphi}^*(x) = \Theta - \gamma > t$. Следовательно,

$$T(x;\ \mathbf{M}) \le t < \tilde{\varphi}^*(x). \tag{5.9}$$

С другой стороны, на основании леммы 5.2 выполнено неравенство

$$\tilde{\varphi}^*(x) \le T(x;\ \mathbf{M}^{[\varepsilon]}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\mathbf{M}}].$$

Из условия C2 корректной сжимаемости множества $\mathbf{M}$ получаем, что

$$T(x;\ \mathbf{M}) = \lim_{\varepsilon \to +0} T(x;\ \mathbf{M}^{[\varepsilon]}).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}^*(x) \le T(x;\ \mathbf{M})$, что противоречит неравенству (5.9). Таким образом, предположение (5.8) неверно, и свойство (5.7) доказано.

Учитывая соотношения

$$W(t;\ \mathbf{M}) = W(\gamma + t;\ D_\tau), \quad \mathbf{D}(t) = E(\gamma + t), \quad t \in (0, \vartheta)$$

получаем равенство $W(t;\ D_\tau) = E(t)$ для любого $t \in [0, \gamma + \vartheta)$, что противоречит определению γ. Следовательно, случай $\gamma \in [0, \Theta)$ невозможен.

Таким образом, соотношение (5.6) доказано.

Пусть $x_* \in \Omega \backslash M$. Тогда при малых $\tau > 0$ имеем $\varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*) - \tau$. В силу леммы 5.3 и равенства (5.6) получаем

$$T(x_*;\ M) = \lim_{\tau \to +0} T(x_*;\ D(\tau)) = \lim_{\tau \to +0} \varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*)$$

откуда следует утверждение теоремы.

6. Пример. Приведем пример, показывающий, что в случае разрывной функции $\varphi(\cdot)$ нельзя отказаться от условия A4.

Пусть динамика системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + u + \upsilon, \quad x \in R^2, \quad u \in P, \quad \upsilon \in Q, \tag{6.1}$$

где

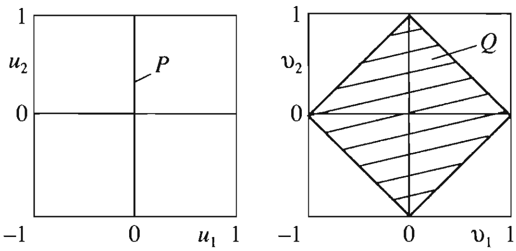
$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$P = \{u \in R^2 : u_1 = 0, |u_2| \le 1\}, \quad Q = \{\upsilon \in R^2 : |\upsilon_1| + |\upsilon_2| \le 1\}$$

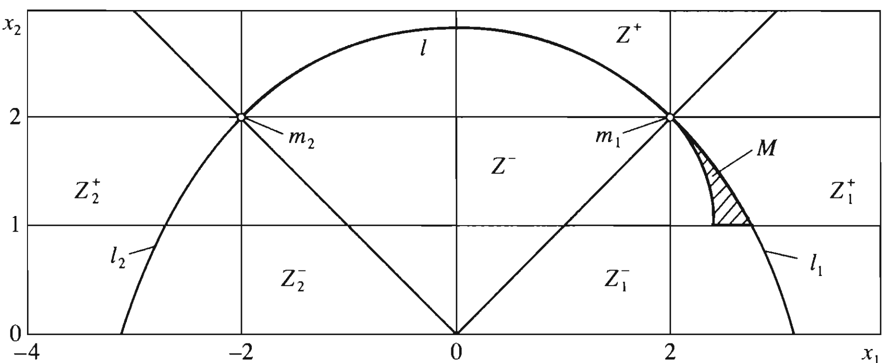
(A – матрица поворота).

Ограничения P и Q, налагаемые на управления игроков, показаны на фиг. 1. Множество M зададим с помощью системы неравенств (фиг. 2)

$$x_1 \ge 2, \quad x_2 \ge 1, \quad \rho^+(x) \le 3\sqrt{2}, \quad \rho^-(x) \ge \sqrt{2}; \quad \rho^{\pm}(x) = \sqrt{(x_1 \pm 1)^2 + (x_2 \pm 1)^2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Если управляющие воздействия игроков постоянны, т.е. $u(t) = u^*$, $\upsilon(t) = \upsilon^*$, то движение $x(t)$ системы (6.1) представляет собой вращение по часовой стрелке вокруг точки x^c, которая является нулем правой части системы (6.1). Поскольку $A^{-1} = -A$, то

$$x^c = A(u^* + \upsilon^*). \tag{6.2}$$

1°. Пусть $m_1 = (2, 2)^{\mathrm{T}}$, $m_2 = (-2, 2)^{\mathrm{T}}$, l – меньшая дуга окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат, соединяющая точки m_1 и m_2. Покажем, что

$$T(x; M) = \infty, \quad x \in R^2 \backslash (l \cup M). \tag{6.3}$$

Положим

$$Z_1 = \{x \in R^2 : x_2 < x_1, x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

$$Z_2 = \{x \in R^2 : x_2 < -x_1, x_1 < 0, x_2 \geq 0\}$$

$$l_1 = \{x \in Z_1 : \rho^+(x) = 3\sqrt{2}\}, \quad l_2 = \{x \in Z_2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2\}.$$

Обозначим через Z_i^- $(i = 1, 2)$ часть множества Z_i, состоящую из точек, лежащих строго ниже дуги l_i. Пусть

$$Z_i^+ = Z_i \backslash Z_i^-, \quad Z = \{x \in R^2 : x_2 \geq |x_1|\}$$

Z^- (Z^+) – часть множества Z, лежащая строго ниже (выше) дуги l. Множества $Z^\pm$, $Z_1^\pm$, $Z_2^\pm$ показаны на фиг. 2.

Определим на множестве $R^2\backslash(l \cup M)$ стратегию второго игрока в виде

$$V^0(x) = \begin{cases} (0, \pm 1)^{\mathrm{T}}, & x \in Z^{\pm} \\ (\pm 1, 0)^{\mathrm{T}}, & x \in Z_1^{\pm} \cup Z_2^{\mp} \\ \upsilon \in Q, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Покажем, что стратегия $V^0(x)$ не допускает попадание траектории системы на множество $l \cup M$ из любой начальной точки $x_0 \in R^2\backslash(l \cup M)$.

Пусть $x_0 \in Z^+$. Тогда до выхода из множества Z^+ второй игрок применяет постоянное управление $\upsilon^* = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Если первый игрок использует управление $u^* \in P$, то из равенства (6.2) получаем следующие условия, которым должны удовлетворять координаты центра вращения:

$$0 \le x_1^c \le 2, \quad x_2^c = 0.$$

Следовательно, при любых действиях первого игрока, траектория системы (6.1) будет лежать не ниже дуги окружности радиуса $\|x_0\|$ с центром в начале координат и при выходе из Z^+ пересечет прямую $x_1 = x_2$ выше точки m_1. Аналогично, для множества Z^- имеем

$$-2 \le x_1^c \le 0, \quad x_2^c = 0.$$

Поэтому траектория системы (6.1) будет лежать не выше дуги окружности радиуса $\|x_0\|$ с центром в начале координат и при выходе из Z^- окажется на линии $x_1 = |x_2|$ ниже точек m_1 и m_2.

Пусть $x_0 \in Z_1^+ \cup Z_2^-$. Тогда до выхода из множества $Z_1^+ \cup Z_2^-$ второй игрок применяет постоянное управление $\upsilon^* = (1, 0)^{\mathrm{T}}$. Из равенства (6.2) получаем условия

$$-1 \le x_1^c \le 1, \quad x_2^c = -1.$$

Следовательно, при выходе из Z_1^+ траектория системы (6.1) пересекает прямую $x_2 = 0$ строго выше дуги l_1, а при выходе из Z_2^- – прямые $x_2 = -x_1$ и $x_2 = 0$ строго ниже дуги l_2 при любых действиях первого игрока.

Пусть $x_0 \in (Z_1^- \cup Z_2^+)\backslash M$. Тогда до выхода из множества $Z_1^- \cup Z_2^+$ второй игрок применяет постоянное управление $\upsilon^* = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Из равенства (6.2) получаем условия

$$-1 \le x_1^c \le 1, \quad x_2^c = 1.$$

Следовательно, при выходе из Z_2^+ траектория системы пересекает прямую $x_2 = -x_1$ выше точки m_2, а при движении в Z_1^- не пересекает множество M и попадает либо на прямую $x_2 = 0$ строго ниже дуги l_1, либо на прямую $x_2 = x_1$ строго ниже точки m_1. Таким образом, равенство (6.3) доказано.

2°. Найдем значение $T(x; M)$ цены игры для любого $x \in l$.

Пусть в некоторый момент времени t система находится в точке $z = z(t) \in l$. Для любого $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}(t) \in Q$ определим такое $\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{\upsilon}) \in P$, что вектор скорости будет направлен по касательной к дуге l. Поскольку касательная к дуге l в точке z перпендикулярна вектору z, то

$$z_1(z_2 + \bar{\upsilon}_1) + z_2(-z_1 + \bar{\upsilon}_2 + \bar{u}_2) = 0.$$

Выражая отсюда величину $\bar{u}_2$ и учитывая ограничение $\bar{u} \in P$, получаем

$$\bar{u}(t, \bar{v}) = (0, -z_1\bar{v}_1/z_2 - \bar{v}_2)^{\mathrm{T}}.$$

Самое медленное движение по дуге l будет при выборе вторым игроком управления $\bar{v} = v^*(t)$ из условия минимизации величины

$$\|Az(t) + \bar{u}(t, \bar{v}) + \bar{v}\|^2 = (z_2 + \bar{v}_1)^2 + (z_1 + z_1\bar{v}_1/z_2)^2$$

по всем $\bar{v} \in Q$. Имеем $v^*(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Пусть $z(0) = m_2$ и в момент t игроки применяют управляющие воздействия $v^*(t)$ и $u^*(t) = \bar{u}(t, v^*(t))$. Тогда траектория $z(t)$ системы (6.1) идет вдоль дуги l и описывается уравнениями

$$\dot{z}_1 = z_2 - 1, \quad \dot{z}_2 = -z_1 + z_1/z_2.$$

Время попадания траектории $z(t)$ в точку m_1 конечно. Действительно, поскольку $z_2(t) \geq 2$, $z_1 \in [-2, 2]$, то $\dot{z}_1 = z_2 - 1 \geq 1$ и момент ϑ_*, определяемый условием $z(\vartheta_*) = m_1$, оценивается неравенством

$$\vartheta_* = \int_0^{\vartheta_*} dt \leq \int_{-2}^{2} dz_1 = 4.$$

Для любого $x \in l$ обозначим через $\tau(x)$ момент времени t, удовлетворяющий равенству $z(t) = x$. Таким образом, $\tau(x)$ – это наибольшее время попадания из точки m_2 в точку x при движении вдоль l и дискриминации второго игрока. Имеем $\tau(m_1) = \vartheta_*$, $\tau(m_2) = 0$. Учитывая результат, полученный в разделе 1°, заключаем, что множество

$$W_* = \{(t, x) : t \in [0, \tau(x)], x \in l \cup M\}$$

является максимальным u-стабильным мостом в задаче сближения с множеством $[0, \vartheta_*] \times M$. Имеем $(\tau(x), x) \in W_*$, $x \in l$.

Используя стратегию экстремального прицеливания на множество W_*, первый игрок гарантирует из точки m_2 достижение множества M на отрезке времени $[0, \vartheta_*]$. При оптимальном управлении второго игрока время достижения множества M равно ϑ_*. Для произвольной точки $x_0 \in l$ находим, что

$$T(x_0; M) = \vartheta_* - \tau(x_0).$$

3°. Пусть

$$\varphi(x) = 2T(x; M), \quad x \in R^2.$$

Из свойства u-стабильности функции $T(\cdot; M)$ следует, что функция $\varphi(\cdot)$ также обладает свойством u-стабильности. Поскольку $\varphi^*(x) = T^*(x; M)$, $x \in R^2$, то функция $\varphi^*(\cdot)$ обладает свойством v-стабильности. Здесь $T^*(\cdot; M)$, $\varphi^*(\cdot)$ – верхние замыкания функций $T(\cdot; M)$, $\varphi(\cdot)$, определяемые формулой (4.1), где $\Omega = R^2$.

Таким образом, для функции $\varphi(\cdot) : R^2 \to [0, \infty]$ выполнены условия А1–А3, но $\varphi(x) \neq T(x; M)$, $x \in l \setminus \{m_1\}$.

Функция $\varphi(\cdot)$ не удовлетворяет условию А4, так как условие С1 нарушено для всех $\vartheta > 0$. Кроме того, поскольку условие А4 не выполнено и для функции цены $T(\cdot; M)$, то оно не является необходимым.

Автор благодарит В.С. Пацко за руководство работой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00414).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Isaacs R.* Differential Games. N. Y.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
3. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N.Y. etc.: Springer, 1988. 518 p.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации, Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
5. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta, I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton – Jacobi – Bellman Equations, Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
6. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Екатеринбург
e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
9.XII.2005