УДК 539. 3

© 2006 г. Е. А. Митюшов

АНИЗОТРОПНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ ВЕЛИЧИН И КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОСТИ

На примере симметричных евклидовых тензоров второго и четвертого ранга вводится понятие анизотропного тензорного пространства с тензорным базисом, инвариантным относительно преобразований симметрии трехмерного евклидова векторного пространства. Для элементов этого пространства помимо традиционной операции сложения введена операция умножения в фиксированном тензорном базисе, т.е. выполняются аксиомы кольца с единицей и делителями нуля, что позволяет выполнять алгебраические и функциональные операции. Возможности предлагаемого математического аппарата иллюстрируются примерами анизотропных тензорных функций тензорного аргумента, общим решением классической задачи о вычислении среднего значения тензора модулей упругости однофазного текстурированного поликристалла и построением поверхностей прочности анизотропных композиционных материалов.

1. Анизотропные тензорные пространства. Следуя известному подходу [1], рассмотрим шестимерное пространство симметричных тензоров второго ранга

$$S \equiv \operatorname{sym} E \otimes E \subset T_2 \equiv E \otimes E$$

Здесь E – векторы трехмерного евклидова векторного пространства E^3. В шестимерном пространстве S существует такой ортонормированный базис $\omega^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$), что любой симметричный тензор второго ранга α представи́м в виде

$$\alpha = \sum \alpha_k \omega^{(k)}, \quad \omega^{(k)} \cdot \omega^{(l)} = \omega_{ij}^{(k)} \omega_{ij}^{(l)} = \delta_{kl}$$

где $\alpha_k \in R$ – координаты симметричного тензора в данном тензорном базисе. При этом

$$\alpha_k = \alpha \cdot \omega^{(k)}$$

Здесь и всюду далее индекс k принимает значения 1, 2, …, 6; знак суммы, если не оговорено иное, означает суммирование от $k = 1$ до $k = 6$.

Помимо линейных операций сложения тензоров и умножения тензора на число введем операцию умножения двух тензоров в фиксированном базисе $\omega^{(k)}$.

Определение 1. Произведением двух симметричных тензоров второго ранга α и β в базисе $\omega^{(k)}$ называется тензор $\alpha\beta = \sum \alpha_k \beta_k \omega^{(k)} \in S$, где α_k, β_k – координаты тензоров α и β в базисе $\omega^{(k)}$.

Определение 2. Директором ортонормированного базиса $\omega^{(k)}$ называется тензор $\omega = \sum \omega^{(k)}$.

Базис $\omega^{(k)}$ инвариантен относительно преобразований симметрии векторного пространства E^3.

Случай ортотропной симметрии

$$\omega^{(m)} = \mathrm{diag}(\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, \omega_3^{(m)}), \quad m = 1, 2, 3$$

Используя кватернионное представление числовых троек $(\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \omega_3^{(k)})$, составляющих ортонормированный базис в пространстве R^3[2], имеем

$$\omega^{(1)} = \mathrm{diag}(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2, 2(p_1p_2 - p_0p_3), 2(p_0p_2 + p_1p_3))$$

$$\omega^{(2)} = \mathrm{diag}(2(p_0p_3 + p_1p_2), p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2, 2(p_2p_3 - p_0p_1))$$

$$\omega^{(3)} = \mathrm{diag}(2(p_1p_3 - p_0p_2), 2(p_0p_1 + p_2p_3), p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)$$

При этом $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$.

Случай ортотропии при объемной изотропии (один из базисных тензоров – шаровой)

$$\omega^{(1)} = \frac{\mathrm{diag}(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\mathrm{diag}(1, q_2, -1 - q_2)}{\sqrt{2}\sqrt{1 + q_2 + q_2^2}}, \quad \omega^{(3)} = \frac{\mathrm{diag}(1, q_3, -1 - q_3)}{\sqrt{2}\sqrt{1 + q_3 + q_3^2}}$$

где $q_{2,3} = t \pm \sqrt{1 + t + t^2}$.

Случай тетрагональной симметрии и трансверсальной изотропии

$$\omega^{(1)} = \frac{\mathrm{diag}(1, 1, q_1)}{\sqrt{2 + q_1^2}}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\mathrm{diag}(1, 1, q_2)}{\sqrt{2 + q_2^2}}, \quad \omega^{(3)} = \frac{\mathrm{diag}(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$$

где $q_{1,2} = t \pm \sqrt{2 + t^2}$.

Случай кубической симметрии

$$\omega^{(1)} = \frac{\mathrm{diag}(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\mathrm{diag}(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}, \quad \omega^{(3)} = \frac{\mathrm{diag}(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$$

Во всех рассмотренных выше случаях

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полученные базисы $\omega^{(k)}$ ортонормированные.

Можно также убедиться, что при соответствующих преобразованиях симметрии пространства E^3, произведение тензоров не меняется, а скалярное произведение $\alpha \cdot \beta$ – это скалярное произведение тензора $\alpha\beta$ с директором тензорного базиса, т.е.

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha\beta) \cdot \omega$$

Определение 3. Анизотропным тензорным пространством $\tilde{S}$ называется тензорное пространство S, в котором введена операция умножения двух тензоров в фиксированном тензорном базисе.

В пространстве $\tilde{S}$ выполняются аксиомы ассоциативно-коммутативного кольца с единицей ω и делителями нуля.

Кроме того, для элементов, не являющихся делителями нуля,

$$\forall \alpha \in \tilde{S}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_6 \neq 0)\ \exists \alpha^{-1} : \alpha\alpha^{-1} = \omega;\ \frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1}\ (\beta_1\beta_2\ldots\beta_6 \neq 0)$$

Директор базиса – это тензорная единица пространства $\tilde{S}$, а в силу принятых аксиом в этом пространстве можно выполнять алгебраические и функциональные операции.

Легко проверяются алгебраические тождества

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2;\quad \alpha^{-1} - (\alpha+\omega)^{-1} = \alpha^{-1}(\alpha+\omega)^{-1},\quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_6 \neq 0,\ \alpha \neq -\omega$$

Аналогичным образом может быть определено анизотропное пространство $\tilde{T}_4 \equiv \tilde{S} \otimes \tilde{S}$ тензоров четвертого ранга, симметричных по первым двум и последним двум индексам и парам крайних индексов. Базисом данного пространства, инвариантным относительно преобразований симметрии векторного пространства E^3, является система $\omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)}$, а тензорной единицей – тензор

$$I = \sum \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)}, \quad \text{или} \quad I_{ijmn} = \sum \omega_{ij}^{(k)}\omega_{mn}^{(k)}$$

При этом

$$\omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} \cdot \omega^{(l)} \otimes \omega^{(l)} = \omega_{ij}^{(k)}\omega_{mn}^{(k)}\omega_{ij}^{(l)}\omega_{mn}^{(l)} = \delta_{kl}$$

2. Анизотропные тензор-функции тензорного аргумента. Областью $D \subset \tilde{S}$ анизотропного тензорного пространства $\tilde{S}$ назовем множество тензоров

$$\alpha = \sum \alpha_k\omega^{(k)}, \quad \alpha_k \in M_k \subset R$$

Будем говорить, что в области D пространства $\tilde{S}$ задана анизотропная тензор-функция $f(\alpha)$ соответствующей симметрии, если указан закон, по которому каждому тензору α из D ставится в соответствие тензор $f(\alpha) \in \tilde{S}$. В базисе $\omega^{(k)}$ этот закон может быть представлен в виде

$$f(\alpha) = \sum \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)\omega^{(k)}, \quad \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6) = f(\alpha)\cdot\omega^{(k)}$$

$\varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)$ – скалярные функции, определенные при $\alpha_k \in M_k$.

Введем в рассмотрение элементарные анизотропные тензор-функции тензорного аргумента как обобщение обычных элементарных функций. Степенная функция вводится равенством

$$\alpha^p = \sum \alpha_k^p\omega^{(k)}, \quad p \in R$$

Аналогично вводятся логарифмическая, основная показательная и тригонометрические функции

$$\ln\alpha = \sum \ln\alpha_k\omega^{(k)},\quad e^{\alpha} = \sum e^{\alpha_k}\omega^{(k)},\quad \sin\alpha = \sum \sin\alpha_k\omega^{(k)},\ \cos\alpha = \sum\cos\alpha_k\omega^{(k)}$$

Рациональная функция вводится равенством

$$\frac{P_n(\alpha)}{Q_m(\alpha)} = \sum \frac{P_n(\alpha_k)}{Q_m(\alpha_k)}\omega^{(k)}$$

где n, m – целые степени тензорных полиномов, $P_n(\alpha_k)$, $Q_m(\alpha_k)$ – полиномы над полем вещественных чисел. Данная функция не определена для значений α_k, являющихся корнями уравнений $Q_m(\alpha_k) = 0$.

Можно убедиться, что для введенных элементарных анизотропных тензор-функций выполняются аналогичные обычным элементарным функциям свойства.

Аналогично определяется анизотропная тензорная функция тензорного аргумента в пространстве $\tilde{T}_4$

$$f(\alpha) = \sum \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)\omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)}; \quad \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6) = f(\alpha) \cdot \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)},$$

$$\alpha \in \tilde{T}, \quad f(\alpha) \in \tilde{T}$$

3. Средние значения тензорных величин. Проиллюстрируем возможности предлагаемого математического аппарата на примере решения классической задачи о вычислении среднего значения тензора модулей упругости однофазного текстурированного поликристалла [3, 4]. При учете введенных операций соответствующее среднее может быть определено равенством

$$c^{(p)} = \left(\int_G (Q(g) * c)^p F(g) dg \right)^{1/p}, \quad p \in R; \quad \int_G F(g) dg = 1$$

Здесь $Q * c \leftrightarrow Q_{im}Q_{jn}Q_{pr}Q_{qs}c_{mnrs}$ – орбита тензора c, $\|Q_{ij}\|$ – матрица направляющих косинусов (матрица поворота), определяющая положение кристаллографических осей зерен поликристалла, g – элемент пространства поворотов G, $F(g)$ – текстурная функция.

При $p = 1$ имеем среднее значение тензора, соответствующее модели Фойгта, при $p = -1$ – модели Ройса, а при $p \to 0$ среднее геометрическое значение, не зависящее от того, усредняется ли тензор модулей упругости или обратный ему тензор коэффициентов податливости.

Рассмотрим подробней определение среднего геометрического значения тензора модулей упругости. Как и в случае скалярных величин, это означает, что

$$\ln c^{(0)} = \int_G Q(g) * \ln c F(g) dg$$

При учете представления логарифмических тензорных функций имеем

$$\sum \ln \lambda_l^{(0)} \tilde{\omega}^{(l)} \otimes \tilde{\omega}^{(l)} = \int_G Q(g) * \sum (\ln \lambda_k \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)}) F(g) dg = \sum \ln \lambda_k \langle Q * \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} \rangle$$

Угловыми скобками обозначено осреднение по множеству всех ориентаций зерен поликристалла, $\omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)}$ и $\tilde{\omega}^{(l)} \otimes \tilde{\omega}^{(l)}$ – базисные тензоры, соответствующие симметрии зерна и поликристалла, λ_k и $\lambda_l^{(0)}$ – модули Кельвина – Рыхлевского [1] зерна и поликристалла.

При учете ортогональности базисных тензоров имеем

$$\ln \lambda_l^{(0)} = \sum \ln \lambda_k \langle Q * \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} \rangle \cdot \tilde{\omega}^{(l)} \otimes \tilde{\omega}^{(l)}$$

или

$$\lambda_l^{(0)} = \lambda_1^{p_{1l}} \lambda_2^{p_{2l}} \ldots \lambda_6^{p_{6l}}, \quad p_{kl} = \langle Q * \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} \rangle \cdot \tilde{\omega}^{(l)} \otimes \tilde{\omega}^{(l)}$$

Как видно из данного соотношения, среднегеометрические модули упругости определяются модулями упругости зерна и весовыми коэффициентами p_{kl}, зависящими от структуры базисных тензоров. В случае кубической симметрии тензора c и ортотропной симметрии тензора $c^{(0)}$ имеем

$$\lambda_1^{(0)} = 3K$$

$$\lambda_{2,3}^{(0)} = \lambda_2^{1-\chi_{2,3}}\lambda_4^{\chi_{2,3}}, \quad \chi_{2,3} = 3\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - 2q_{2,3}(\Delta_2 - \Delta_3)$$

$$\lambda_4^{(0)} = \lambda_2^{\chi_4}\lambda_4^{1-\chi_4}, \quad \chi_4 = 2\Delta_2 + 2\Delta_3 - 2\Delta_1$$

$$\lambda_5^{(0)} = \lambda_2^{\chi_5}\lambda_4^{1-\chi_5}, \quad \chi_5 = 2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2$$

$$\lambda_6^{(0)} = \lambda_2^{\chi_6}\lambda_4^{1-\chi_6}, \quad \chi_6 = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3$$

$$\Delta_i = \langle Q_{i1}^2Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2Q_{i1}^2\rangle, \quad i = 1, 2, 3; \quad 0 \le \Delta_i \le 1/3$$

$$q_{2,3} = t \pm \sqrt{1 + t + t^2}, \quad t = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_3 - \Delta_2}$$

Здесь $K = c_{11} + 2c_{12}$ – объемный модуль; $\lambda_2 = c_{11} - c_{12}$, $\lambda_4 = 2c_{44}$, c_{ij} – модули упругости в матричных обозначениях; Δ_i – текстурные параметры.

При равновероятном распределении кристаллографических осей (квазиизотропный поликристалл)

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/5$$

При осесимметричном вокруг оси Ox_3 распределении кристаллографических осей (макроскопически трансверсально-изотропный поликристалл) выполняется условие

$$\Delta_1 = \Delta_2 = (1 + 3\Delta_3)/8$$

В этом случае

$$\lambda_2^{(0)} = \lambda_2^{1-3\Delta_3}\lambda_4^{3\Delta_3}, \quad \lambda_4^{(0)} = \lambda_5^{(0)} = \lambda_2^{2\Delta_3}\lambda_4^{1-2\Delta_3}, \quad \lambda_3^{(0)} = \lambda_6^{(0)} = \lambda_2^{(1-\Delta_3)/2}\lambda_4^{(1+\Delta_3)/2}$$

Для квазиизотропного поликристалла, когда $\Delta_3 = 1/5$, из этих соотношений вытекает известный результат [5]

$$\lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = \lambda_4^{(0)} = \lambda_5^{(0)} = \lambda_6^{(0)} = \lambda_2^{2/5}\lambda_4^{3/5}, \quad \text{или} \quad c_{44}^{(0)} = c_{44}A^{-2/5}$$

$$A = 2c_{44}(c_{11} - c_{12})^{-1} = \lambda_4/\lambda_2$$

где A – параметр упругой анизотропии монокристалла.

Для частного случая распределения кристаллографических осей, когда $\Delta_1 = \Delta_2 = 1/4$, $\Delta_3 = 0$, полученный здесь результат совпадает с известным точным, в рамках рассматриваемой модели поликристалла, решением [6].

Среднегеометрические тензоры модулей упругости и коэффициентов податливости макроскопически ортотропного поликристалла находятся с помощью разложений

$$c^{(0)} = \sum \lambda_k^{(0)}\tilde{\omega}^{(k)} \otimes \tilde{\omega}^{(k)}, \quad s^{(0)} = \sum (\lambda_k^{(0)})^{-1}\tilde{\omega}^{(k)} \otimes \tilde{\omega}^{(k)}$$

где $\tilde{\omega}^{(k)}$ – базисные тензоры пространства $\tilde{S}$, соответствующие ортотропии с объемной изотропией.

4. Критерии предельности. Воспользуемся предложенным математическим аппаратом для получения феноменологических критериев предельности некоторых анизотропных материалов. Рассматривая пространство напряжений Σ, элементы которого – тензоры напряжения в данной точке анизотропного тела ($\sigma \in \Sigma \subset \tilde{S}$), предельную поверхность представим равенством

$$f(\sigma) \cdot \omega = 1$$

Для ортотропных материалов, представляя, в частности, функцию $f(\sigma)$ тензорным полиномом второй степени

$$f(\sigma) = \alpha\sigma^2 + \beta\sigma; \quad \alpha = \sum \alpha_k \omega^{(k)}, \quad \beta = \sum \beta_k \omega^{(k)}, \quad \sigma = \sum \sigma_k \omega^{(k)}, \quad \sigma^2 = \sum \sigma_k^2 \omega^{(k)}$$

и совмещая векторы базиса пространства E^3 с главными осями анизотропии, имеем

$$\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \ldots + \alpha_6\sigma_6^2 + \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \ldots + \beta_6\sigma_6 = 1$$

В предположении, что предельное состояние инвариантно к смене заданного направления сдвига на противоположное, имеем

$$\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \ldots + \alpha_6\sigma_6^2 + \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3 = 1$$

Это феноменологическое уравнение предельной поверхности содержит девять размерных материальных констант и три безразмерных параметра, определяющих вид базисных тензоров $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ анизотропного тензорного пространства. При дополнительных гипотезах физического характера число параметров, подлежащих экспериментальному определению, может быть уменьшено.

Для пространственно-армированного композита кубической симметрии, направления армирования которого совпадают с осями симметрии третьего и четвертого порядка куба в E^3, с учетом возможного разрушения по разным физическим механизмам (разрыв армирующих волокон при растяжении и потеря их устойчивости при сжатии) приходим, в простейшем случае, к четырехконстантной поверхности прочности в шестимерном пространстве напряжений

$$\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \ldots + \alpha_6\sigma_6^2 + \beta_1\sigma_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$$

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \omega^{(1)} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{\sqrt{3}}, \qquad \sigma_2 = \sigma \cdot \omega^{(2)} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma_3 = \sigma \cdot \omega^{(3)} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_4 = \sigma \cdot \omega^{(4)} = \sqrt{2}\sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma \cdot \omega^{(5)} = \sqrt{2}\sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma \cdot \omega^{(6)} = \sqrt{2}\sigma_{12}$$

Физический смысл материальных констант этого уравнения становится ясным, если рассмотреть четыре независимых напряженных состояния

1) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p_+, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

2) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p_-, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

3) $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = \tau_1, \quad \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

4) $\sigma_{23} = \tau_2, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0.$

Здесь p_+ и p_- – предельные напряжения всестороннего растяжения и сжатия, τ_1 и τ_2 – предельные напряжения простого сдвига в плоскости, проходящей через оси симметрии второго и четвертого порядка, в направлениях осей второго и четвертого порядка соответственно.

Подстановка этих соотношений в уравнение поверхности прочности дает

$$3\alpha_1 p_+^2 + \sqrt{3}\beta_1 p_+ = 1, \quad 3\alpha_1 p_-^2 - \sqrt{3}\beta_1 p_- = 1, \quad 2\alpha_2\tau_1^2 = 1, \quad 2\alpha_4\tau_2^2 = 1$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{1}{3p_+p_-}, \quad \beta_1 = \frac{p_- - p_+}{\sqrt{3}p_+p_-}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\tau_1^2}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2\tau_2^2}$$

При независимости предельного состояния от шаровой части тензора напряжений при условии $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, переходя к пятимерному пространству чистых сдвигов [7], получаем простейшую поверхность прочности изотропного материала в виде уравнения сферы в пятимерном пространстве

$$\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2 = 2\tau^2$$

что соответствует широко применяемой энергетической теории прочности или условию текучести Губера – Мизеса – Генки математической теории пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ, 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
2. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
3. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
4. *Matthis S., Humbert M.* The realization of the concept of a geometric mean for calculation physical constants of polycrystalline materials // Phys. Stat. Solidi. (b). 1993. V. 177. P. K47–K50.
5. *Александров К.С.* Средние значения тензорных величин // Докл. АН СССР. 1966. Т. 164. № 4. С. 800–804.
6. *Берестова С.А. , Митюшов Е.А.* Об одном точном решении проблемы определения эффективных модулей упругости микронеоднородных сред // ПММ, 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 524–527.
7. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.

Екатеринбург
e-mail: mitushov@mmf.ustu.ru

Поступила в редакцию
29.IV.2004