

УДК 593.375

© 2006 г. А. О. Ватульян, О. В. Явруян

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИН

Представлен асимптотический подход к решению задач идентификации прямолинейной трещины малого относительного размера. Решение прямой задачи сведено к решению граничного интегрального уравнения. В рамках предлагаемого подхода исследовано его ядро, выделена главная часть асимптотики. Решена обратная задача определения параметров трещины по заданной информации об амплитудах перемещения на границе слоя. Получены трансцендентные уравнения, из которых поэтапно определены характеристики трещины. Представлены численные результаты решения обратной задачи.

К настоящему времени достаточно подробно исследованы задачи идентификации внутренних дефектов, расположенных на стыке областей, возникающие в результате непрочности (или непровара) материалов [1, 2], вертикальных трещин в слое или полупространстве, прямолинейных дефектов, выходящих на границу области [3]. Имеется обзор современного состояния исследований в теории обратных задач для трещин [2]. Значительно меньше исследованы задачи об идентификации трещин в конечных телах, причем наибольшего продвижения в решении таких задач удалось достичь при наличии априорной информации о том, что трещина или системы трещин расположены в некоторой плоскости. В этом случае задачу идентификации можно разбить на задачу определения параметров плоскости, которой принадлежит трещина, ее центра в этой плоскости и характерного линейного размера. Определение плоскости связано с введением некоторого функционала “невзаимности”, при помощи которого удастся выделить “основные” параметры и найти их из некоторых простых соотношений [2]. В то же время задачи идентификации внутренних трещиноподобных дефектов произвольной конфигурации исследованы мало, хотя прямые задачи о построении полей смещений в телах с такими дефектами изучены довольно подробно [4]. Связано это с увеличением количества определяющих трещину параметров, что ведет к увеличению размерности пространства поиска. При этом априорная информация о размерах трещин может значительно упростить процедуру их идентификации.

При исследовании многопараметрической задачи о колебаниях упругого слоя толщины h с трещиной характерной длины l выделим три безразмерных параметра $\varepsilon_1 = l/h$, $\varepsilon_2 = \omega h/c$ (c – характерная скорость волн в среде) и $\varepsilon_3 = \omega l/c = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ (ω – частота колебаний). Отметим, что решение обратной задачи идентификации строится в области изменения параметра $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_*$, что соответствует случаю рассмотрения колебаний на частоте выше критической, когда в слое имеются бегущие волны.

Ниже предлагается асимптотический подход, рассматриваемый в области изменения параметров $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_*$, что соответствует случаю трещин малых относительных размеров, при этом возможно значительное упрощение процедуры решения как прямой, так и обратной задачи. Следует также отметить, что рекомендации практической дефектоскопии по выбору частоты колебаний соответствуют значениям безразмерного параметра ε_3 порядка единицы и выше. Как показали расчеты по реконструкции параметров трещины, асимптотический подход охватывает также область изменения параметров, когда длина волны зондируемого сигнала больше длины трещины, т.е. $\varepsilon_3 \leq 1$.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача идентификации внутреннего трещиноподобного дефекта в ортотропном слое толщины h по полям смещений на части грани-

цы слоя S_{21} . Колебания вызываются нагрузкой, приложенной к части верхней границы слоя S_{20} . Нижняя граница слоя S_1 жестко закреплена. Трещина моделируется как математический разрез с берегами S_0^\pm , на которых компоненты поля перемещений терпят разрыв

$$\chi_i = u_i|_{S_0^+} - u_i|_{S_0^-}$$

характеризующийся компонентами вектор-функции раскрытия трещины. На основе теории дислокаций [5] действие трещины заменяется действием фиктивных массовых сил, которые выражаются через компоненты раскрытия трещины

$$f_i = -[c_{ijkl}n_k^+ \chi_l \delta(\zeta)]_{,j}$$

(здесь n_j^\pm – компоненты единичных векторов нормали к берегам трещины S_0^\pm).

Рассматривается установившийся режим колебаний, что позволяет отделить временной множитель и представить компоненты вектора перемещений в виде $u_j = u_j(x)e^{-i\omega t}$, где $x = (x_1, x_3)$, ω – частота колебаний. Тогда рассматриваемая задача после отделения временного множителя будет описываться следующей краевой задачей:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \tag{1.1}$$

$$u_i|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{i3}|_{S_{20}} = p_i, \quad \sigma_{i3} = 0, \quad x \notin S_{20} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij} n_j^\pm|_{S_0^\pm} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

где ρ – плотность среды, C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие обычным соотношениям симметрии и положительной определенности.

Задача идентификации трещины решается на основе информации о поле перемещений, измеренной на части верхней границы слоя $S_{21} = \{x_1 \in [c, d], x_3 = h\}$,

$$u_i|_{S_{21}} = u_i^*(x_1), \quad x_1 \in S_{21} \tag{1.4}$$

Поскольку рассматриваемая область содержит бесконечно удаленную точку, то замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых используется принцип предельного поглощения [6].

Выберем оси координат так, чтобы оси упругой симметрии ортотропного материала совпадали с осями системы координат, и будем считать далее, что трещина представляет собой туннельный разрез, ось которого совпадает с осью x_2 . Тогда исходная задача (1.1)–(1.3) распадается на две вспомогательные: задачу об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с трещиной произвольной конфигурации (задача 1), когда ненулевой является компонента $u_2 = u(x_1, x_3)$, и в задаче (1.1)–(1.3) полагаем $i, j = 2$, и плоскую задачу о колебаниях слоя с трещиной (задача 2); ненулевыми в этом случае будут компоненты $u_1(x_1, x_3)$, $u_3(x_1, x_3)$, а в задаче (1.1)–(1.3) считаем $i, j = 1, 3$.

Далее будем рассматривать случай сосредоточенной нагрузки величины p_0 , приложенной в точке с координатами $(-L, h)$ ($L > 0$), в касательном направлении к границе для антиплоской задачи и в нормальном направлении для плоской задачи.

2. Решение прямых задач. Сведение к интегральным уравнениям. Решения прямых задач строятся на основе функций Грина для слоя [4, 7, 8] и теоремы взаимности [5].

В случае антиплоских колебаний (задача 1) имеем следующее представление поля перемещений в слое:

$$u(\xi) = u^s(\xi) + \int_l k(\xi, x)\chi(x)dl_x$$

$$u^s(\xi) = -\frac{p_0}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\text{sh}(\lambda\xi_3)}{\lambda \text{ch}(\lambda h)} e^{-i\alpha_1(L+\xi_1)} d\alpha_1, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in S$$

$$k(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{g_2^+ \text{sh}(\lambda\xi_3) e^{-\lambda(h-x_3)} - g_2^- \text{ch}(\lambda(h-\xi_3)) e^{-\lambda x_3}}{\lambda \text{ch} \lambda h} + \frac{g_1}{\lambda} e^{-\lambda|x_3-\xi_3|} \right] e^{i\alpha_1(x_1-\xi_1)} d\alpha_1 \quad (2.1)$$

$$g_1 = ivn_1(x)\alpha_1 - \text{sign}(x_3 - \xi_3)\lambda n_3(x), \quad g_2^{\pm} = ivn_1(x)\alpha_1 \pm \lambda n_3(x)$$

$$\lambda^2 = v\alpha_1^2 - k^2, \quad v = C_{66}/C_{44}, \quad k^2 = \rho\omega^2/C_{44}$$

Здесь σ – контур в комплексной плоскости, который выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и обходит особенности подынтегральных функций определенным образом [8].

Для плоской деформации (задача 2) компоненты поля перемещений определяются аналогичными представлениями

$$u_m(\xi) = u_m^s(\xi) + \int_l \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_i \chi_j dl_x, \quad i, j, m = 1, 3, \quad \xi \in S \quad (2.2)$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}$ – компоненты тензора напряжений (сингулярные решения), определяемые на основе представлений для функций Грина и закона Гука. В случае области типа слоя аналогично известной процедуре [5] функции Грина представимы в виде интегралов Фурье по контуру σ аналогично представлению (2.1). В выражениях (2.1), (2.2) первые слагаемые – эталонные поля, представляющие собой поля смещений в среде без дефекта, вторые слагаемые обусловлены наличием трещины в слое.

Один из наиболее эффективных способов определения скачков перемещений на трещине – построение систем граничных интегральных уравнений (ГИУ) [9, 10], которые формулируются на основе представлений (2.1), (2.2) при учете граничных условий на трещине (1.3). В случае задачи 1 имеем одно ГИУ

$$\int_l K(x, y)\chi(x)dl_x = F(y), \quad y \in l$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} R(\alpha_1, x, y) e^{i\alpha_1(x_1-y_1)} d\alpha_1 \quad (2.3)$$

$$F(y) = -\frac{p_0}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{vi\alpha_1 n_1(y) \text{sh}(\lambda y_3) - n_3(y) \lambda \text{ch}(\lambda y_3)}{\lambda \text{ch}(\lambda h)} e^{-i\alpha_1(L+y_1)} d\alpha_1$$

В случае задачи 2 получаем систему двух ГИУ

$$\int_l K_{ji}(x, y)\chi_i(x)dl_x = F_j(y), \quad y \in l$$

$$K_{ji}(x, y) = C_{jrm s} \frac{\partial}{\partial y_s} \sigma_{ki}^{(m)}(x, y) n_k(x) n_r(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} e^{i\alpha_1(x_1-y_1)} k_{ji}(\alpha_1, x, y) d\alpha_1 \quad (2.4)$$

$$F_i(y) = -C_{ijm s} \frac{\partial}{\partial y_s} u_m^s(y) n_j(y), \quad j, i, k, m, s = 1, 3$$

ГИУ (2.3), (2.4) в общем случае криволинейных трещин могут быть решены численно на основании метода граничных элементов [6, 7]. После нахождения функций раскрытия по формулам (2.1), (2.2) можно рассчитывать поле на поверхности слоя [7.8].

В серии расчетов исследована зависимость полей смещений на поверхности слоя от параметров прямолинейной трещины: ее заглубления, длины и угла наклона к нижней границе слоя.

Процедура решения ГИУ достаточно сложна и требует значительной вычислительной работы. Дальнейшее упрощение построенных ГИУ возможно с помощью асимптотического анализа задачи при малых относительных размерах дефекта.

3. Асимптотический подход к расчету волновых полей. Рассмотрим подробнее ГИУ для задачи 1, представив ядро интегрального оператора в виде суммы регулярной и нерегулярной частей

$$\int_l [K_0(x, y) + K_1(x, y)] \chi(x) dl_x = F(y), \quad y \in l$$

$$K_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} R_s(\alpha_1, x, y) e^{i\alpha_1(x_1 - y_1)} d\alpha_1, \quad s = 0, 1$$

Исследование асимптотик подынтегральных функций $R_0(x, y)$ и $R_1(x, y)$ при $|\alpha_1| \rightarrow \infty$ [8] и выявило, что $R_1(\alpha_1, x, y) \rightarrow 0$ при всех $x, y \in l$ в то время как при $x_3 = y_3$ функция $R_0(\alpha_1, x, y)$ – возрастающая при $|\alpha_1| \rightarrow \infty$, и соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [11].

Для трещин, допускающих параметризацию

$$x_j = q_j(t), \quad y_j = q_j(\tau), \quad t, \tau \in [-1, 1]$$

$$q_1(t), q_3(t) \in C^1[-1, 1], \quad g(t) = \sqrt{q_1'^2(t) + q_3'^2(t)} \neq 0$$

ГИУ (2.3) может быть сведено к виду

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{G(t, \tau)}{(t - \tau)^2} + \tilde{K}_1(t, \tau) \right] \chi(t) g(t) dt = \tilde{F}(\tau) \tag{3.1}$$

$$G(t, \tau) = \frac{\sqrt{v} [v q_3'(\tau) q_3'(\tau) + q_1'(t) q_1'(\tau)]}{g(t) g(\tau) (q_1'^2(\tau) + v q_3'^2(\tau))}, \quad \tilde{K}_1(t, \tau) = K_1(x(t), y(\tau)), \quad \tilde{F}(\tau) = F(y(\tau))$$

причем ядро $\tilde{K}_1(t, \tau)$ – непрерывная функция.

Рассмотрим подробнее случай прямолинейной трещины длины $2l_0$ с углом наклона θ к нижней границе слоя, средняя точка которой находится на оси Ox_3 на расстоянии d_0 от нижней границы. Величина L – расстояние от точки приложения нагрузки до оси Ox_3 . Параметрические уравнения такой трещины имеют вид

$$q_1(t) = l_0 t \cos \theta, \quad q_3(t) = d_0 + l_0 t \sin \theta, \quad t \in [-1, 1] \tag{3.2}$$

С учетом введенной параметризации заключаем, вычислив контурный интеграл в правой части по теории вычетов, что ГИУ (3.1) преобразуется к виду

$$l_0^{-1} \int_{-1}^1 \left[\frac{\sqrt{v}}{(t-\tau)^2} + l_0^2 \tilde{K}_1(t, \tau) \right] \tilde{\chi}(t) dt = \tilde{F}(\tau), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.3)$$

$$\tilde{F}(\tau) = \frac{p_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (-\text{sign}(L + l_0 \tau \cos \theta) \sin \theta \sin(\lambda_n^0 (d_0 + l_0 \tau \sin \theta)) - \frac{i \lambda_n^0}{\nu \alpha_n} \cos \theta \cos(\lambda_n^0 (d_0 + l_0 \tau \sin \theta))) e^{i \alpha_n |L + l_0 \tau \cos \theta|}, \quad \tau \in [-1, 1]$$

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(x(t)), \quad \lambda_n^0 = \frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad \alpha_n = \frac{\sqrt{k^2 - \lambda_n^0{}^2}}{\sqrt{v}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множество $\{\alpha_n\}$ состоит из счетного множества чисто мнимых и конечного числа N вещественных компонент. Вещественные α_n соответствуют бегущим волнам в слое, а остальные характеризуют неоднородные моды, амплитуды которых экспоненциально убывают.

Отметим, что решение ГИУ (3.3) может быть проведено численно на основе метода граничных элементов [7, 8]. В то же время при малых значениях длины трещины для построения приближенного решения ГИУ (3.3) можно использовать асимптотический подход, в основе которой лежит трехступенчатая асимптотическая модель [9]. На первом этапе строится представление эталонного поля напряжений на трещине. Тогда бесконечную сумму в правой части ГИУ (3.3) можно с точностью $O(e^{-\gamma L})$, $\gamma > 0$ заменить конечной суммой, оставив первые N слагаемых.

Для прямолинейной трещины при малой величине l_0 следующий этап построения волнового поля можно значительно упростить, определив главный член асимптотики функции раскрытия. Для этого исследуем асимптотику ядер и правой части ГИУ (3.3) в предположении малости линейного размера дефекта. Устремляя $l_0 \rightarrow 0$, получаем в пределе интегральное уравнение с постоянной правой частью

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi_*(t)}{(t-\tau)^2} dt = q_0, \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.4)$$

$$\chi_*(t) = l_0^{-1} \tilde{\chi}(t), \quad q_0 = \frac{\tilde{F}^*(\theta, d_0, L)}{\sqrt{v}}, \quad \tilde{F}^*(\theta, d_0, L) = \frac{p_0}{L} F_1(\theta, d_0, L)$$

$$F_1(L, d_0, \theta) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} [\gamma_{1n}(d_0, \theta) + i \gamma_{2n}(d_0, \theta)] e^{i \alpha_n L}$$

$$\gamma_{1n}(d_0, \theta) = -\sin \theta \sin(\lambda_n^0 d_0), \quad \gamma_{2n}(d_0, \theta) = -\frac{\lambda_n^0}{\nu \alpha_n} \cos \theta \cos(\lambda_n^0 d_0)$$

Интегральное уравнение (3.4) имеет следующее решение в классе ограниченных функций [11, 12]

$$\chi_*(t) = \sqrt{1-t^2} W_0, \quad W_0 = -q_0/\pi \quad (3.5)$$

После определения функции раскрытия можно построить волновое поле в слое, в частности на его поверхности. Вычисляя контурный интеграл в формуле (2.1) по теории вычетов и выделяя амплитуды поля перемещения на верхней границе ($x_1 > 0$) в дальней зоне, получаем удобную для вычислений формулу для расчета волнового поля

$$u(x_1, h) = u^s(x_1, h) + \sum_{n=1}^N A_n e^{i\alpha_n x_1} + O(e^{-\varepsilon x_1}), \quad \varepsilon > 0 \quad (3.6)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} l_0^2 P(L, d_0, \theta) [\gamma_{1n}(d_0, \theta) - i\gamma_{2n}(d_0, \theta)], \quad P(L, d_0, \theta) = \pi W_0 / (2h)$$

которую далее можно эффективно использовать при решении обратной задачи.

4. Идентификация параметров прямолинейной трещины. Решение обратной задачи восстановления параметров трещины строится на основе решения прямой задачи и дополнительной информации (1.4). Для прямолинейной трещины, допускающей параметризацию (3.2), задача идентификации трещины сводится к задаче определения параметров трещины l_0, d_0, θ, L . Отметим, что амплитуды поверхностных волн пропорциональны квадрату длины трещины.

Задача 1. Допустим, что в качестве дополнительной информации заданы амплитудные значения A_n^* ($n = 1, 2$) поля перемещения в дальней зоне верхней границы. Процедура идентификации осуществляется при частотном зондировании. Для однозначной идентификации достаточно рассмотреть две частоты k_1, k_2 , на каждой из которых имеются по две бегущие волны и заданы $A_1^*(k_1), A_2^*(k_1)$ – амплитуды первой и второй волн на частоте k_1 и $A_1^*(k_2), A_2^*(k_2)$ – на частоте k_2 . На основании выражений для амплитуд (3.6) удастся задачу идентификации прямолинейной трещины свести к поэтапному определению параметров трещины, решая трансцендентные уравнения.

Этап 1. Определение заглубления трещины d_0 . Для определения d_0 рассмотрим отношение амплитуд первой и второй волн, которое обозначим как

$$\mu_1 + i\mu_2 = \frac{A_1^*(k_1)}{A_2^*(k_1)}$$

Тогда при учете выражения для амплитуд (3.6) получаем однородную систему двух уравнений относительно параметров d_0, θ , линейную относительно $\sin\theta, \cos\theta$. Из решения системы получим

$$d_0 = \frac{h}{\pi} \arccos \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-a)}}{4a} \quad (4.1)$$

$$a = l_1(\mu_1^2 + \mu_2^2), \quad b = -\mu_1(l_1 + l_2), \quad c = l_2 - l_2\mu_1 + l_1\mu_1, \quad l_1 = \frac{3\pi}{2h\alpha_2(k_1)}, \quad l_2 = \frac{\pi}{2h\alpha_1(k_1)}$$

Таким образом, для однозначного определения d_0 значений амплитуд на одной частоте недостаточно. Для этого необходимо знать амплитуды на второй частоте k_2 , провести действия, аналогичные анализу отношения амплитуд на первой частоте, и получить два корня d_0 , один из которых будет совпадать с истинным значением d_0 и с одним из решений (4.1).

Этап 2. Определение угла наклона трещины $\theta, 0 \leq \theta < \pi$. На основе найденного по формуле (4.1) значения d_0 угол наклона трещины можно определить по формуле

$$\theta = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{c_{11}(d)}{c_{12}(d)} \quad (4.2)$$

причем, если $c_{12}(d) = 0$, то $\theta = 0$.

Этап 3. Определение расстояния L от точки приложения нагрузки до вертикальной оси, проходящей через середину трещины. Величина L входит в выражение для W_0 , и для определения этого параметра необходимо произвести два измерения амплитуд при разном положении источника. В первом случае нагрузка приложена на расстоянии L_1 от оси трещины; соответствующие амплитуды $A_1^*(k, L_1)$, $A_2^*(k, L_1)$. Во втором случае нагрузка приложена на расстоянии $L_2 = L_1 - L_0$ от оси трещины; соответствующие амплитуды $A_1^*(k, L_2)$, $A_2^*(k, L_2)$. Тогда, для определения L_1 из уравнения (3.4) имеем соотношение

$$\frac{A_1^*(k, L_1)}{A_1^*(k, L_2)} = \frac{F_1(L_1, d_0, \theta)}{F_1(L_2, d_0, \theta)}$$

откуда получим

$$L_1 = -\frac{\varphi + 2\pi m}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \varphi = \arg \frac{a_2}{a_1} \quad (4.3)$$

$$a_j = (\gamma_{1j} + i\gamma_{2j})(A_1^*(k, L_1)e^{i\alpha_j L_0} - A_1^*(k, L_2)), \quad j = 1, 2$$

Таким образом, расстояние L_1 нельзя определить однозначно, зная амплитуды на одной частоте, можно получить лишь некоторый набор точек на оси Ox_1 . Для однозначного определения L_1 необходимо знание амплитуд на другой частоте. Далее, путем пересечения множества точек, полученных на первой и второй частотах, определяем координату L .

Численные эксперименты показали, что величина L_1 определяется с погрешностью менее 1% при точных входных данных и устойчива к зашумлению входной информации.

Этап 4. Определение длины трещины l_0 . Величина l_0 определяется из одного из выражений для амплитуд, например,

$$A_1 = l_0^2 P(L, d_0, \theta) [\gamma_{11}(d_0, \theta) - i\gamma_{21}(d_0, \theta)]$$

Следует отметить, что параметр l_0 определяется с наименьшей точностью по сравнению с остальными параметрами, поскольку на погрешность его определения помимо погрешности входной информации влияет погрешность идентификации параметров, определенных на предыдущих этапах.

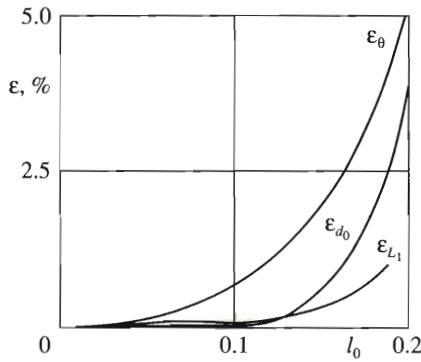
Расчеты проводились для слоя толщины $h = 1$ из аустенитной стали ($\nu = 0.64$). Выбирались частоты $k_1 = 5$, $k_2 = 6$, на которых имеются по две распространяющиеся волны; $L_0 = -0.4$. Параметры d_0 , θ , L_1 определялись по формулам (4.1)–(4.3). Как и следовало ожидать, с увеличением длины трещины соответствующие относительные погрешности

$$\text{определения параметров трещины } \varepsilon_{d_0} = \frac{|d_0 - d_0^a|}{d_0^a}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{|\theta - \theta^a|}{\theta^a}, \quad g_{L_1} = \frac{|L_1 - L_1^a|}{L_1^a}. \text{ Ис-}$$

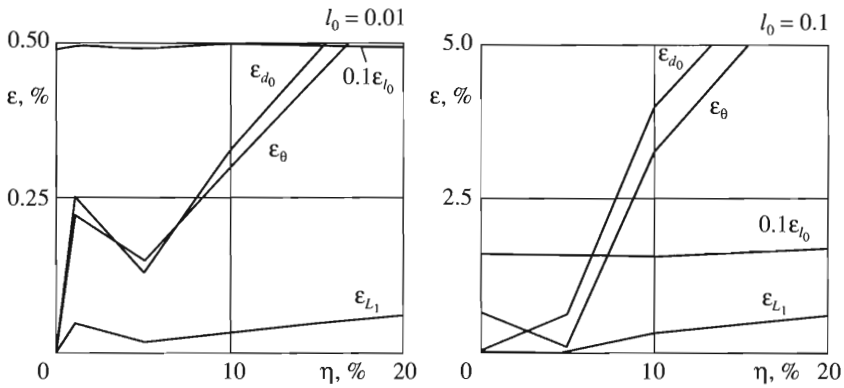
тинные значения $d_0^a = 0.5$, $\theta^a = \pi/3$, $L_1^a = 5.6$.

Из численных результатов по восстановлению d_0 , θ , L_1 в зависимости от длины трещины l_0 , представленных на фиг. 1, видно, что при $l_0 \leq 0.2h$ погрешность определения параметров трещины d_0 , θ , L_1 менее 5% при точных входных данных; длина трещины определяется с погрешностью менее 10%. Результаты свидетельствуют о достаточно устойчивой процедуре идентификации параметров трещины.

На фиг. 2 приведены графики относительной погрешности восстановления параметров $d_0 = 0.5$, $\theta = \pi/4$, $L_1 = 5.6$ в зависимости от степени зашумления входных данных η на



Фиг. 1



Фиг. 2

частотах $k_1 = 5, k_2 = 7.8$. Видно, что при погрешности задания входных данных $\eta \approx 20\%$ параметры d_0, θ, L_1 определяются с погрешностью около 1% при $l_0 = 0.01$ и с погрешностью около 5% при $l_0 = 0.1$. С увеличением длины трещины погрешность восстановления параметров d_0, θ, L_1 сильнее зависит от точности входных данных.

Задача 2. Ядро ГИУ (2.4) аналогично задаче 1 можно представить в виде суммы нерегулярной и регулярной частей

$$K_{ji}(x, y) = K_{ji}^{(0)}(x, y) + K_{ji}^{(1)}(x, y) \tag{4.4}$$

$$K_{ji}^{(s)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} k_{ji}^{(s)}(\alpha_1, x, y) e^{i\alpha_1(x_1 - y_1)} d\alpha_1, \quad s = 0, 1$$

Проведено исследование структуры ядер (4.4), выделены главные члены асимптотик подынтегральных функций $k_{ji}^{(s)}(\alpha_1, x, y)$ при $|\alpha_1| \rightarrow \infty$, выявлено, что $k_{ji}^{(1)}(\alpha_1, x, y)$ – убывающие на бесконечности функции, а $k_{ji}^{(0)}(\alpha_1, x, y)$ – возрастающие при $x_3 = y_3$, причем соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [11].

Для трещин, допускающих введенную ранее параметризацию $x_j = q_j(t)$, $y_j = q_j(\tau)$, ГИУ (2.4) может быть сведено к виду

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{R_{ji}(t, \tau)}{(t-\tau)^2} + \tilde{K}_{ji}^{(1)}(t, \tau) \right] \tilde{\chi}_j(t) g(t) dt = \tilde{F}_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (4.5)$$

$$R_{ji}(t, \tau) = \sum_{m=1}^2 \left[2 \frac{\Delta_m^-(\tau)}{(\Delta_m^+(\tau))^2} M_{ji}^{(1)}(v_m, q'(t), q'(\tau)) - 4 v_m \frac{q_1'(\tau) q_3'^2(\tau)}{(\Delta_m^+(\tau))^2} M_{ji}^{(2)}(v_m, q'(t), q'(\tau)) \right]$$

$$\Delta_m^+(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [-1, 1]$$

$$\Delta_m^\pm(\tau) = v_2^2 q_3'^2(\tau) \pm q_1'^2(\tau)$$

$$v_{1,2} = \sqrt{(\gamma_1 - 2\gamma_7\gamma_5 - \gamma_7^2 \mp w)/(2\gamma_5)}, \quad w = \sqrt{(\gamma_7^2 - \gamma_1)(\gamma_7^2 - \gamma_1 + 4\gamma_5(\gamma_5 + \gamma_7))}$$

$$\tilde{\chi}_j(t) = \chi_j(x(t)), \quad \tilde{K}_{ji}^{(1)}(t, \tau) = K_{ji}^{(1)}(x(t), y(\tau)), \quad \tilde{F}_i(\tau) = F_i(y(\tau))$$

$M_{ji}^{(1)}$, $M_{ji}^{(2)}$ – гладкие функции, зависящие от постоянных материала и от компонент вектора нормали в точках кривой l .

Для трещины, допускающей параметризацию вида (3.2), ГИУ (4.5) преобразуется к виду

$$l_0^{-1} \int_{-1}^1 \left[\frac{G_{ji}(\theta)}{(t-\tau)^2} + l_0^2 \tilde{K}_{ji}^{(1)}(t, \tau) \right] \tilde{\chi}_j(t) dt = \tilde{F}_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1]$$

$$G_{ji}(\theta) = \sum_{m=1}^2 \left[2 \frac{\tilde{\Delta}_m^-(\theta)}{(\tilde{\Delta}_m^+(\theta))^2} \tilde{M}_{ji}^{(1)}(v_m, \theta) - 4 \frac{v_m \sin \theta \cos \theta}{(\tilde{\Delta}_m^+(\theta))^2} \tilde{M}_{ji}^{(2)}(v_m, \theta) \right] \quad (4.6)$$

$$\tilde{\Delta}_m^\pm(\theta) = v_m^2 \sin^2 \theta \pm \cos^2 \theta, \quad \tilde{M}_{ji}^{(k)}(v_m, \theta) = M_{ji}^{(k)}(v_m, q'(t), q'(\tau))$$

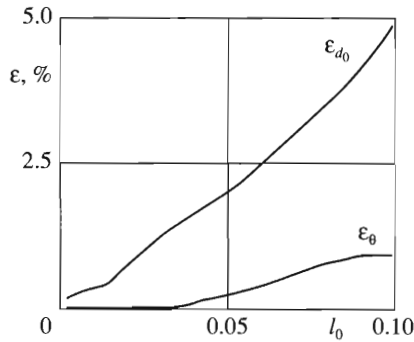
Отметим, что система ГИУ (4.6) в случае, когда прямолинейная трещина вертикальная ($\theta = \pi/2$) или горизонтальная ($\theta = 0$) распадается на два независимых ГИУ: относительно $\tilde{\chi}_1$ и относительно $\tilde{\chi}_3$; в случае же произвольной прямолинейной трещины такого не происходит, и компоненты скачков связаны между собой.

Далее, рассматривая трещины малой относительной длины аналогично изложенному выше, в пределе при $l_0 \rightarrow 0$ получаем систему интегральных уравнений с постоянными правыми частями

$$\int_{-1}^1 \frac{G_{ji}(\theta)}{(t-\tau)^2} \tilde{\chi}_j^*(t) dt = \tilde{F}_i^*(L, d_0, \theta), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (4.7)$$

$$\tilde{\chi}_j^*(t) = l_0^{-1} \tilde{\chi}_j(t), \quad \tilde{F}_i^*(L, d_0, \theta) = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \tilde{F}_i(\tau)$$

Эта система имеет решение в классе ограниченных функций [11, 12] вида



Фиг. 3

$$\tilde{\chi}_j(t) = l_0 \sqrt{1-t^2} W_{0j}, \quad j = 1, 3$$

$$W_{01}(L, d_0, \theta) = \frac{\tilde{F}_3^*(L, d_0, \theta)G_{13}(\theta) - \tilde{F}_1^*(L, d_0, \theta)G_{33}(\theta)}{G(\theta)} \quad (1 \leftrightarrow 3) \tag{4.8}$$

$$G(\theta) = G_{11}(\theta)G_{33}(\theta) - G_{13}(\theta)G_{31}(\theta)$$

Тогда компоненты полей смещений на верхней границе представимы в форме

$$u_j(x_1, h) = u_j^s(x_1, h) + \sum_{n=1}^N A_{jn} e^{i\beta_n x_1} + O(e^{-\epsilon x_1}), \quad j = 1, 3 \tag{4.9}$$

$$A_{jn} = l_0^2 [A_{jn}^{(1)}(d_0, \theta)W_{01} + A_{jn}^{(3)}(d_0, \theta)W_{03}]$$

причем, как и в случае задачи 1, амплитуды волн пропорциональны квадрату длины трещины.

Процедуру идентификации можно проводить по значениям амплитуд волновых полей либо компонент перемещений на верхней границе слоя. Рассмотрена постановка обратной задачи, в которой в качестве дополнительной информации заданы сами волновые поля на верхней границе слоя. В этом случае единственность решения обратной задачи зависит от расположения точек зондирования, т.е. точек, в которых измеряются волновые поля перемещений и количества бегущих волн. Численный анализ обратной задачи показал, что для однозначного определения параметров трещины при позиционном зондировании достаточно измерять волновые поля смещений в двух точках на частоте, на которой имеются две бегущие волны.

На фиг. 3 представлены результаты численных экспериментов по восстановлению части параметров прямолинейной трещины для слоя из аустенитной стали; при этом в слое четыре распространяющиеся моды при $k = 4.9$. Приведены графики относительной погрешности восстановления параметров d_0, θ в зависимости от длины трещины. Истинные значения параметров $d_0^a = 0.33, \theta^a = 65^\circ$.

Предложенный асимптотический подход позволяет определить параметры прямолинейной трещины, длина которой составляет не более 20% от толщины слоя, с погрешностью менее 1% при точных входных данных, что свидетельствует о работоспособности

Предложенный асимптотический подход позволяет определить параметры прямолинейной трещины, длина которой составляет не более 20% от толщины слоя, с погрешностью менее 1% при точных входных данных, что свидетельствует о работоспособности

сти модели расчета волновых полей, основанных на асимптотическом подходе, и достаточно устойчивой процедуре идентификации прямолинейных трещин малой длины.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00734) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ – 2113. 2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Баранов И.В., Гусева И.А. Идентификация трещиноподобного дефекта в ортотропном слое // Дефектоскопия. 2001. № 10. С 48–52.
2. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Математика и механика сплошной среды. Естеств. науки. Спецвыпуск. 2004. № 1. С. 74–80.
3. Alves C.J.S, Ha Duong T. Inverse scattering for elastic plane cracks // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 1. P. 91–97.
4. Ватульян А. О., Красников В.В. Колебания ортотропной полуплоскости с криволинейной трещиной // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 83–90.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
6. Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
7. Ватульян А.О., Явруян О.В. Реконструкция наклонных трещин в слое // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2005. № 2. С. 36–39.
8. Баранов И.В., Булгурян О.В., Ватульян А.О. Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование // Вест. Донск. гос. техн. ун-та. ДГТУ. 2004. Т. 4. № 3. С. 257–269.
9. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб: Политехника, 2004. 302 с.
10. Ватульян А.О. Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 1. С 180–188.
11. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
12. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mech. 2003. V. 162. № 1–4. P. 99–110.

Ростов-на-Дону
e-mail: vatulyan@aaanet.ru

Поступила в редакцию
14.VII.2005