УДК 539.375

© 2006 г. С. А. Назаров

О БИФУРКАЦИЯХ ФРОНТА ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ, РАСТУЩЕЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В рамках вариационно-асимптотических моделей силового и энергетического критериев разрушения найдены ситуации, в которых возможны бифуркации формы фронта при квазистатическом распространении плоской трещины в упругом изотропном пространстве. Для круговой трещины при осесимметричном нагружении обнаружены бифуркации двух типов: флуктуация центра трещины, но сохранение ее круговой формы, и искажение фронта за счет образования двух или большего количества "лепестков"'.

1. Вариационно-асимптотическая модель квазистатического развития трещины. Рассмотрим трещину M, ограниченную простым гладким замкнутым контуром Γ и расположенную на плоскости $\{x \in \mathbb{R}^3 : z := x_3 = 0\}$ в изотропном упругом пространстве с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$. Трещина раскрыта симметричными нормальными усилиями, приложенными к ее берегам,

$$g^{\pm}(\tau; y) = \mp g(y) \mp \tau g'(y), \quad y = (y_1, y_2) \in M^{\pm} \tag{1.1}$$

Здесь τ – времениподобный параметр. Если предположить начальную ($\tau = 0$) нагрузку $\mp g$ критической, ее изменение согласно представлению (1.1) может привести к росту трещины; положение трещины в момент $\tau > 0$ обозначаем $M(\tau)$, а фронт – $\Gamma(\tau)$. Считая, что процесс разрушения необратим и что трещина остается плоской, получаем включение $M(\tau_1) \subset M(\tau_2)$ при $\tau_2 \geq \tau_1$ и следующее описание контура $\Gamma(\tau)$ как возмущение при малом $\tau > 0$ исходного контура Γ:

$$\Gamma(\tau) = \{y \in \mathbb{R}^2 : n = h(\tau; s)\}, \quad h \geq 0 \tag{1.2}$$

При этом (n, s) – естественные криволинейные координаты в окрестности множества Γ; s – длина дуги, а n – расстояние на плоскости вдоль внешней нормали, $n > 0$ вне M. Функция $h(\tau; \cdot)$ описывает положение фронта трещины в момент τ, а для обеспечения квазистатического процесса на сегменте $[0, \tau_0]$ необходимо, чтобы функция $h(\cdot; s)$ была равномерно по s непрерывной на этом сегменте и бесконечно малой при $\tau \to +0$. Возможность пренебречь инерционными членами обеспечивается предположением: изменение безразмерного параметра нагружения τ происходит медленно в масштабе реального времени, который можно охарактеризовать, например, отношением $c^{-1}\operatorname{diam} M$, где c – скорость упругих волн.

Вариационная природа процесса разрушения, вскрытая в двумерной ситуации [1–3], позволила разработать [4–6] вариационно-асимптотические модели трехмерных критериев разрушения Ирвина (силового) и Гриффитса (энергетического), которые впоследствии были развиты в работах [7–9]. Поскольку условие $h \geq 0$ в формуле (1.2) требует постановки односторонних ограничений в задаче определения функции h, упомянутые модели описываются вариационными неравенствами вида

$$(bH, X - H)_\Gamma - (B(H), X - H)_\Gamma \geq (F, X - H)_\Gamma \tag{1.3}$$

Здесь $(\ ,\ )_\Gamma$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Gamma)$ и X – произвольная пробная функция, гладкая и неотрицательная. По решению $H \geq 0$ задачи (1.3) восстанавливается функция h в формуле (1.2) (см. далее (2.12)). Данные b, B и F в неравенстве (1.3) конструируются из решений упругих задач для фиксированной трещины M, т.е. при $\tau = 0$ (см. разд. 2).

Полное исследование задачи (1.3) позволяет ответить на вопрос о характере распространения трещины на малом промежутке изменения параметра τ. Так, если в случае $\tau \leq \tau_0$ вариационное неравенство (1.3) имеет единственное решение, и это решение оказывается малым (нулевым), то при $\tau \in [0, \tau_0]$ трещина развивается *квазистатически и устойчиво* (остается *неизменной*). Если же малых решений несколько, то следует говорить о *бифуркациях формы фронта* продвигающейся трещины. Наконец, в случае отсутствия решений или наличия лишь больших, не исчезающих при $\tau \to +0$ решений рост трещины становится *лавинообразным*.

Подчеркнем, что вывод самого неравенства (1.3) основан на формуле для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) $K_1(\tau; s)$ на фронте (1.2) трещины $M(\tau)$ при нагрузке (1.1) (см. [4, 10–13] и др.), но эта асимптотическая формула перестает работать при “больших глубинах" $h(s)$. Именно поэтому отсутствие малых решений у нелинейной задачи (1.3) связывается с прекращением квазистатического процесса разрушения и необходимостью учета динамических эффектов (трещина "перепрыгивает" из одного положения в другое). Кроме того, при изучении длительного квазистатического развития трещины необходимо, разбив промежуток $(0, T]$ на фрагменты $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, решать задачи (1.3) итеративно: решение $h_i(\tau - \tau_i; s)$ на базовом контуре Γ_i позволяет определить следующий базовый контур $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$, после чего требуется пересчитать данные b_{i+1}, B_{i+1} и F_{i+1} для нового положения фронта Γ_{i+1}.

Примеры квазистатического и лавинообразного роста трещины известны – проводилось [6, 7, 14] асимптотическое и численное решение задачи (1.3) для канонических форм трещин и конкретных нагрузок. В частности, установлено, что в случае, когда КИН достигает критического значения K_{1c} лишь в одной точке s_0 на контуре Γ, начало движения трещины характеризуется негладкой зависимостью величины $h(\tau; s)$ от параметра τ: первая производная $\partial_\tau h(0; s)$ равна нулю, а вторая не существует! Этот эффект объясняется разными скоростями распространения отростка вглубь $O(\tau^{3/2})$ и вширь $O(\tau^{1/2})$. При этом асимптотическая формула для h выглядит так:

$$h(\tau; s) \sim \tau^{3/2}\mathbf{h}(\tau^{-1/2}(s - s_0)) \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{h}$ – некоторая эталонная функция (см. [6, 14]). Именно из-за нерегулярного поведения фронта (1.2) в начальной стадии развития трещины и невозможности применить классическую теорию возмущений в условиях (1.4) сложилось неправильное впечатление [15] о неприменимости критерия Гриффитса для определения формы трещины, а некоторые исследования [16, 17] привели к парадоксальному заключению $\partial_\tau h(0; s) = h_0\delta(s - s_0)$ – эта формула содержит дельта-функцию Дирака δ и означает, что со всего фронта Γ стартует лишь одна точка s_0!?

Автору известна лишь одна публикация [18], посвященная проблеме бифуркации фронтов трещин в трехмерных телах (по поводу двумерных задач см. [2, 19] и др.). Именно рассмотрена [18] туннельная трещина

$$M = \{x = (y, z) : |y_1| < a,\ y_2 \in \mathbb{R},\ z = 0\} \tag{1.5}$$

и показано, что при постоянном растягивающем напряжении на бесконечности σ_{zz}^∞ существуют малые возмущения

$$\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y_1 = \pm a \pm h_\pm(y_2),\ y_2 \in \mathbb{R},\ z = 0\} \tag{1.6}$$

сторон полосы (1.5), на которых КИН $K_1^\pm(x_2)$ сохраняют постоянное (критическое) значение. Функции $h_\pm$ в формуле (1.6) оказываются периодическими с периодом, зависящим от a, но не удовлетворяют условиям $h_\pm \geq 0$, а значит интерпретация этого математического факта в рамках механики разрушения затруднительна. Кроме того, в соответствии с полученными ранее результатами [20, 21] вопрос о корректности постановки помянутых условий на бесконечности требует отдельного исследования и ответ на него не столь очевиден из-за неограниченности поверхности (1.5).

В настоящей статье приводится ряд примеров, общего плана и конкретных, в которых вариационное неравенство (1.3) имеет целое *семейство* малых положительных решений, что позволяет говорить о бифуркациях фронта трещины при квазистатическом разрушении в случаях силового и энергетического критериев. Подчеркнем, что *положительное* решение H задачи (1.3) удовлетворяет уравнению

$$bH - B(H) = F \text{ на } \Gamma \tag{1.7}$$

Таким образом, при формировании вариационного неравенства (1.3) на основе критерия Ирвина КИН $K_1(\tau; s)$ на фронте (1.2) трещины $M(\tau)$ равен $K_{1c} + O(\tau^2)$ и в рамках точности самой вариационно-асимптотической модели сохраняет постоянное значение.

2. Вывод вариационного неравенства. Как известно (см., например [22]), при помощи представления Папковича–Найбера упругая задача для полупространства с трещиной упрощается до скалярной смешанной краевой задачи в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x : z > 0\}$, а именно

$$-\Delta_x v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3_+; \quad \partial_z v(y, 0) = -\alpha g(y), \quad y \in M; \quad v(y, 0) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{M} \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha = \mu^{-1}(1 - \nu)$, $\mu > 0$ – модуль сдвига, $\nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}$ – коэффициент Пуассона, а функция g на трещине M взята из разложения (1.1). Известно, что существует единственное решение задачи (1.1), имеющее конечный интеграл Дирихле $\|\nabla_x v; L_2(\mathbb{R}^3_+)\|^2$ и потому исчезающее на бесконечности. Помимо указанного решения v далее понадобится решение v', получающееся заменой величины g в краевом условии (2.1) вторым слагаемым g' из разложения (1.1). Поскольку следы на плоскости $\partial\mathbb{R}^3_+$ смещения u_z и напряжения $\sigma_{zz}(u)$ совпадают с функциями $v(\cdot, 0)$ и $\alpha^{-1}\partial_z v(\cdot, 0)$ соответственно, все необходимые характеристики напряженно-деформированного состояния около фронта трещины рассчитываются по решениям скалярной задачи.

Считая g и g' гладкими функциями на множестве M вплоть до его границы Γ, выписываем асимптотическое представление решения $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_+} \backslash \Gamma)$ задачи (2.1) вблизи ребра Γ (см. [4,8], а также [23])

$$v(x) = \alpha\left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2}\left\{r^{1/2}K_1(s)\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}r^{3/2}k_1(s)\sin\frac{3\varphi}{2}\right\} - \alpha r g_\Gamma(s)\sin\varphi +$$

$$+\alpha\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} r^{3/2}\kappa(s)K_1(s)\left[\frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{12}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] + O(r^2) \tag{2.2}$$

Здесь $\kappa(s)$ – кривизна контура Γ в точке s, (r, φ) – полярные координаты в плоскостях, перпендикулярных Γ, причем локально берега $M^\pm$ трещины задаются равенствами $\varphi = \pm\pi$. Кроме того, $K_1(s)$ и $k_1(s)$ – КИН первой моды и коэффициент при младшей сингулярности, определяемые по нормальным напряжениям на продолжении ($\varphi = 0$) трещины согласно асимптотическому представлению

$$\sigma_{zz}(u; y, 0) = \alpha^{-1}\partial_z v(y, 0) = (2\pi r)^{-1/2}\{K_1(s) + k_1(s)r\} - g_\Gamma(s) + O(r^2)$$

Под g_Γ подразумевается сужение функции g на ребро Г. КИН, отвечающий усилиям g' и решению v', обозначаем $K_1'(s)$.

При построении вариационно-асимптотической модели на основе силового критерия разрушения ключевую роль играет асимптотическая формула для КИН $K_1(\tau; s)$ на ребре (1.2) при нагрузке (1.1). Дело в том, что апостериорная формулировка критерия Ирвина (для двумерных [2] и трехмерных [4] тел)

$$h(\tau; s) > 0 \Rightarrow K_1(\tau; s) = K_{1c}$$

$$h(\tau, s) = 0 \Rightarrow K_1(\tau; s) \le K_{1c}$$

содержащая критическое значение КИН K_{1c}, эквивалентна вариационному неравенству

$$(K_1(\tau; \cdot) - K_{1c}, X - K_1(s)h(\tau; \cdot))_\Gamma \le 0, \quad \forall X \in C^\infty(\Gamma), \quad X \ge 0 \tag{2.3}$$

а подстановка в левую часть неравенства (2.3) главных членов асимптотики K_1 приводит к неравенству вида (1.3). В случае следящей нагрузки (т.е. усилия на вновь образовавшейся поверхности $M(\tau)\backslash\overline{M}$ имеют прежний вид (1.1); ср. с [24]) упомянутая формула, полученная при различных условиях и разными способами (см. [10–13, 4] и др.), выглядит так:

$$\begin{gathered} K_1(\tau; s) \sim K_1(s) + \tau K_1'(s) + B(K_1 h(\tau; \cdot); s) + \\ + \left\{ Z^\#(s) - \frac{3}{8}\kappa(s) + \frac{1}{2}K_1(s)^{-1}k_1(s) \right\} K_1(s)h(\tau; s) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Помимо величин K_1, k_1 и K_1', взятых из соотношений (2.2) для v и v', в формуле (2.4) фигурирует интегральный оператор B с симметричным положительным ядром $Z(s, t)$ и скачок $Z^\#(s)$ регулярной части первообразной $\hat{Z}(s, t)$ функции $\Gamma\backslash\{s\} \ni t \mapsto Z(s, t)$:

$$B(H; s) = \int_\Gamma (H(t) - H(s))Z(s, t)dt \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} Z(s, t) = \frac{1}{2\pi}|s - t|^{-2} + O(1), \quad \hat{Z}(s, t) = \frac{1}{2\pi}(s - t)^{-1} + Z^0(s, t) \\ Z^\#(s) = Z^0(s, s + 0) - Z^0(s, s - 0), \quad Z^0 \in C^\infty(\Gamma\backslash\{s\}) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Интегральный оператор (2.5) возникает из тождества

$$V(H; x) = \int_\Gamma H(t)\zeta(t; x)dt, \quad \forall H \in C^1(\Gamma) \tag{2.7}$$

связывающего весовые функции двух типов: первая, $V(H; \cdot)$, имеет особенность $O(r^{-1/2})$, распределенную вдоль всего ребра Г с плотностью H, а более сильная особенность $O(\rho_t^{-3/2})$ у второй функции $\zeta(t; \cdot)$ сосредоточена лишь в одной точке $t \in \Gamma$. Иными словами, верны разложения

$$\begin{gathered} V(H; x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \left\{ r^{-1/2}H(s)\sin\frac{\varphi}{2} - \kappa(s)r^{1/2}H(s)\left[\frac{1}{4}\sin\frac{3\varphi}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right] + \right. \\ \left. + 2r^{1/2}\left(B(H; s) + Z^\#(s)H(s) + \frac{3}{8}\kappa(s)H(s)\right)\right\} + O(r^2) \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\zeta(t;\,x) = \left(\frac{1}{2\pi^3}\right)^{1/2}\rho_t^{-3/2}(\sin\theta_t)^{1/2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + O(\rho_t^{-1/2}), \quad \rho_t \le \varepsilon \tag{2.9}$$

$$\zeta(t;\,x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} r^{1/2} Z(t,s)\sin\frac{\varphi}{2} + O(r^{3/2}), \quad \rho_t \ge \varepsilon \tag{2.10}$$

Здесь ε – произвольное положительное число, $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ – "сферические" координаты, отвечающие координатам $(r, \varphi, s - t)$, которые рассматриваются как "цилиндрические", т.е. $\rho_t^2 = r^2 + (s-t)^2$ и $r = \rho_t \sin\theta_t$. Отметим, что сравнение представлений (2.9) и (2.10), справедливых в ε-окрестности точки $s \in \Gamma$ и на остальной части ребра соответственно, приводит к первому соотношению в (2.6).

Весовые функции V и ζ фигурируют в следующих интегральных формулах для КИН из асимптотического представления (2.2) решения υ задачи (2.1):

$$\int_\Gamma H(s)K_1(s)ds = 2\int_M V(H;\,y,0)g(y)dy, \quad K_1(s) = 2\int_M \zeta(s;\,y,0)g(y)dy \tag{2.11}$$

Удвоение интегралов в (2.11) обусловлено одинаковым нагружением на двух берегах трещины.

Появление весовых функций двух типов инициировано работами [25–27] и [28, 29] (см. также [4, 8, 30] и др.). Тождество (2.7) впервые установлено в статье [4], а общая теория весовых функций построена в публикациях [23, 31].

Умножив соотношение (2.3) на $-K_{1c}^{-2}$ и заменив КИН $K_1(\tau;\,s)$ его асимптотикой (2.4), после несложных преобразований приходим к неравенству (1.3), в котором

$$H(\tau;\,s) = K_{1c}^{-1}K_1(s)h(\tau;\,s) \tag{2.12}$$

$$b(s) = \frac{3}{8}\kappa(s) - Z^{\#}(s) - \frac{1}{2}K_1(s)^{-1}k_1(s), \quad F(\tau;\,s) = K_{1c}^{-1}K_1(s) - 1 + \tau K_{1c}^{-1}K_1'(s) \tag{2.13}$$

Подчеркнем, что без перенормировки неизвестной (2.12) левая часть неравенства (1.3) теряет свойства симметричной квадратичной формы. Неравенство $K_1(s) > 0$, заведомо справедливое при полном раскрытии трещины, обеспечивает непротиворечивость определений (2.12) и (2.13): величина H наследует неотрицательность от h, а величина b остается ограниченной. Лишь в случае $K_1(s) = K_{1c}$, т.е. при $F(\tau;\,s) = \tau F_0(s)$ (нагрузка $g^{\pm}(0;\,y)$ делает трещину M критической во всех точках фронта Γ), параметр τ исключается из задачи (1.3), и ее решение линейно зависит от τ:

$$H(\tau;\,s) = h(\tau;\,s) = \tau h_0(s) \tag{2.14}$$

Вариационно-асимптотическая модель критерия Гриффитса, который требует отыскания минимума полной (сумма потенциальной и поверхностной) энергии $T(\tau)$, запасенной пространством с трещиной $M(\tau)$ при нагрузке (1.1), получается при замене функционала $T(\tau)$ его трехчленной асимптотикой (подробности см. в [5, 7]) и сводится к вариационному неравенству (1.3), причем B и H определены по формулам (2.5) и (2.12), но

$$\begin{gathered} b(s) = \kappa(s)\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}K_1(s)^{-2}K_{1c}^2\right) - Z^{\#}(s) - \frac{1}{2}K_1(s)^{-1}k_1(s) \\ F(\tau;\,s) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_{1c}}{K_1(s)} - \frac{K_1(s)}{K_{1c}}\right) + \frac{\tau}{K_{1c}}K_1'(s) \end{gathered} \tag{2.15}$$

Поскольку выражения (2.15) и (2.13) лишь незначительно отличаются одно от другого и при изучении задачи (1.3) условия накладываются непосредственно на b и F, далее тип критерия разрушения не конкретизируется. Отметим, что для выпуклых трещин установлено [5, 8] неравенство $H_I \geq H_G$, означающее, что силовой критерий предсказывает несколько большее продвижение фронта трещины, чем энергетический. Это расхождение, в основном, вызвано кривизной контура Г (ср. первые слагаемые в (2.13) и (2.15)) и в двумерном случае разность $H_I(\tau; s) - H_G(\tau; s)$ находится [9] в рамках точности $O(\tau^2)$ самих моделей.

Второе из представлений (2.11) для $K_1(s)$ и аналогичная интегральная формула для $k_1(s)$ показывает, что путем вариации нагрузки этим коэффициентам можно придать любые наперед заданные значения. Это наблюдение используется для круговой трещины в разд. 4. Обращаем внимание на связь основных сингулярностей

$$r^{1/2}\sin(\varphi/2) \text{ и } \rho_s^{-3/2}(\sin\theta_s)^{1/2}\sin(\varphi/2)$$

в разложениях (2.2) и (2.9) – одна получается из другой преобразованием Кельвина (инверсия и умножение на ρ_s^{-1}). Точно так же соотносятся младшая сингулярность в разложении (2.2) и основная сингулярность весовой функции $\zeta^3(s; \cdot)$, предназначенной для определения значения коэффициента k_1 в точке s, а именно

$$r^{3/2}\sin(3\varphi/2) \text{ и } \rho_s^{-5/2}(\sin\theta_s)^{3/2}\sin(3\varphi/2) \tag{2.16}$$

Для множителей при K_1 и k_1 в соотношении (2.2) справедливо равенство

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial n}r^{3/2}\sin\frac{3\varphi}{2} = \frac{1}{2}r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

(дифференцирование в плоскости трещины вдоль направления, перпендикулярного фронту) и поэтому согласно полученным ранее результатам [32, 33] (см. также [23], гл. 12) выражение

$$-2\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}r^{-1/2}H(s)\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}r^{-3/2}H(s)\sin\frac{3\varphi}{2}$$

служит основной сингулярностью весовой функции $V^3(H; \cdot)$, позволяющей найти взвешенное среднее коэффициента k_1 на контуре Г (ср. с первой формулой (2.11)).

Подчеркнем, что дифференцирование поперек фронта трещины не приводит [34] к правильному ответу (2.16) в случае весовой функции $\zeta^3(s; \cdot)$. Дело в том, что производная

$$-2\left(\frac{1}{2\pi^3}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial n}\rho_s^{-3/2}(\sin\theta_s)^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

становится равной $O(\rho_t^{-2}r^{-1/2})$, т.е. приобретает особенность и на удалении от точки s. В результате подобная (2.11) интегральная формула с полученной таким способом весовой функцией содержит в левой части линейную комбинацию величин $k_1(s)$, $K_1(s)$ и $\partial_s K_1(s)$ (подробности см. в [23], § 12.2).

Отметим, наконец, что сказанное выше относится только к основным сингулярностям, но регулярные части и “хвосты" асимптотических разложений, зависящие, в частности, от кривизны κ, упомянутым соотношениям не подчиняются. Впрочем, в случае круговой трещины для построения весовых функций высших порядков может быть использован оператор $x \cdot \nabla x$, сохраняющий гармоничность функций и однородные краевые условия (см. разд. 4).

3. Решения вариационного неравенства. Благодаря симметричности, положительности ядра Z и порядку его сингулярности, указанному формулой (2.6), справедливо равенство

$$(bH, H)_\Gamma - (B(H), H)_\Gamma = \int_\Gamma b(s)H(s)^2 ds + \frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma (H(t) - H(s))^2 Z(t, z) dt ds \tag{3.1}$$

и при $b > 0$ выражение (3.1) является квадратом нормы в пространстве Соболева–Слободецкого $H_2^{1/2}(\Gamma)$. Далее в обозначении $H_{p+}^s(\Gamma)$ под s и p подразумеваются показатели гладкости и суммируемости, а индекс плюс выделяет выпуклое множество неотрицательных функций. Названное свойство формы (3.1) позволяет по замыканию перейти в неравенстве (1.3) к произвольным пробным функциям $X \in H_{2+}^{1/2}(\Gamma)$ и, тем самым, сделать его вариационным, т.е. порожденным функционалом “энергии" (3.1). Следующее утверждение, доказанное в [4, 14] (см. также [23], §12.8 и [35]), устанавливает существование и единственность решения задачи (1.3), а также его гладкость.

Предложение 1. При выполнении условия

$$b(s) > 0, \quad s \in \Gamma \tag{3.2}$$

вариационное неравенство (1.3) с произвольной правой частью $F \in L_2(\Gamma)$ имеет единственное решение $H \in H_{2+}^{1/2}(\Gamma)$, причем верна оценка $\|H; H_2^{1/2}(\Gamma)\| \le c\|(F)_+; L_2(\Gamma)\|$, в которой c – постоянная, не зависящая от F, а $(t)_+ = (t + |t|)/2$ – положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$. Если дополнительно $F \in L_p(\Gamma)$ с некоторым $p \in [2, +\infty)$, то $H \in H_p^1(\Gamma)$ и $\|H; H_p^1(\Gamma)\| \le c_p\|(F)_+; L_p(\Gamma)\|$.

Итак, для появления семейства решений необходимо, чтобы условие (3.2) было нарушено. Будем считать, что

$$b(s) = b_\perp(s) - b_0, \quad b_0 > 0, \quad \int_\Gamma b_\perp(s) ds = 0 \tag{3.3}$$

Поскольку составляющая $b_\perp$ имеет нулевое среднее, она неположительна на участке контура Γ, а значит $b < 0$ на этом участке.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: разность двух положительных решений H_1 и H_2 задачи (1.3) удовлетворяет однородному уравнению (1.7), т.е. b_0 – собственное значение оператора $b_\perp - B$. Главный символ интегрального оператора (2.5) равен $-|\xi|/2$ (см. [5], а также [23], § 12.8 и др.). Таким образом, у оператора $b_\perp - B$, рассматриваемого как неограниченный в $L_2(\Gamma)$, имеется последовательность нормальных собственных значений

$$\Lambda_0 \le \Lambda_1 \le \Lambda_2 \le \ldots \le \Lambda_n \le \ldots \to +\infty \tag{3.4}$$

Предположим, что постоянное слагаемое b_0 из формулы (3.3) совпало с одним из собственных значений в последовательности (3.4), и обозначим J и $H^{(k+1)}, \ldots, H^{(k+J)}$ его кратность и соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Gamma)$ и гладкие. Если правая часть F удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma H^{(k+j)}(s)F(s) ds = 0, \quad j = 1, \ldots, J \tag{3.5}$$

то уравнение (1.7) имеет частное решение H_0. Основное допущение для дальнейших общих построений состоит в возможности найти *положительное частное* решение:

$$H_0(s) > 0, \quad s \in \Gamma \tag{3.6}$$

Нетрудно убедиться, что *неотрицательное* решение уравнения (1.7) удовлетворяет вариационному неравенству (1.3) и что при условии (3.6), по крайней мере, малые вариации коэффициентов c_j сохраняют нужное свойство у следующего общего решения:

$$H_0 + c_1 H^{(k+1)} + \ldots + c_J H^{(k+J)} \tag{3.7}$$

Предложение 2. Если b_0 – собственное значение из последовательности (3.4), то при выполнении требований (3.3), (3.5) и (3.6) вариационное неравенство (1.3) допускает бесконечно много решений среди линейных комбинаций (3.7). Достаточное условие, обеспечивающее неотрицательность функции (3.7), выглядит так: $m_1|c_1| + \ldots + m_J|c_J| \le m_0$. Здесь $m_0 = \min H_0(s) > 0$ и $m_j = \max|H^{(j)}(s)| > 0$, а экстремумы вычисляются по всем точкам $s \in \Gamma$.

Неограниченное изменение коэффициента c_j при сохранении неотрицательности выражения (3.7) возможно лишь при знакоопределенной собственной функции $H^{(j)}$. Поскольку собственные функции взаимно ортогональны в $L_2(\Gamma)$, таких собственных функций не более одной. Если $b_\perp = 0$ в представлении (3.3), то благодаря присутствию разности в подынтегральном выражении (2.5) названная собственная функция постоянна.

Соблюсти сформулированные в предложении (3.2) требования можно прямым подбором данных: при $b_\perp = 0$ и любом собственном значении b_0 оператора $-B$ вычисляем правую часть F согласно формуле (1.7) по любой гладкой положительной функции $H = H_0$ (условия ортогональности (3.5) выполняются автоматически). Основной вопрос, обсуждаемый в следующем разделе, состоит в определении нагрузки (1.1), обеспечивающей появление подходящих данных в задаче (1.3).

4. Круговая трещина при симметричном нагружении. Благодаря представлению Папковича–Найбера и преобразованию Кельвина весовая функция $\zeta(t; \cdot)$ (см. (2.9) и (2.10)) для круговой трещины

$$M = \{x = (y, z) : |y| < R,\ z = 0\} \tag{4.1}$$

вычисляется явно: если $t = 0$ и сингулярность помещена в точку $(R, 0, 0) \in \Gamma$, то след на верхнем береге M^+ имеет вид

$$\zeta(0; y, +0) = (4\pi^3 R)^{-1/2}(|y_1 - R|^2 + y_2^2)^{-1}(R^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2} \tag{4.2}$$

Ввиду осевой симметрии нетрудно пересчитать $\zeta(t; \cdot)$ для произвольной точки t и при помощи второй формулы (2.11) вычислить $K_1(t)$ при любой нагрузке $g(y)$ (удивительно, что этого простого представления КИН нет в справочнике [36]). Если к берегам трещины (4.1) приложена симметричная нагрузка $\pm g(|y|)$, то удобнее применить другую весовую функцию $V(1; \cdot)$ (см. (2.8)), у которой такой след на береге M^+:

$$V(1; y, +0) = \pi^{-1/2} R^{1/2}(R^2 - |y|^2)^{-1/2} \tag{4.3}$$

В силу интегральных представлений (2.11) КИН K_1, постоянный на фронте Γ, находится по формуле (ср. с [27] и [7])

$$K_1 = \frac{2}{(\pi R)^{1/2}} \int_0^R g(\mathbf{r})(R^2 - \mathbf{r}^2)^{-1/2} \mathbf{r}\, d\mathbf{r} \tag{4.4}$$

Для вычисления "младшего" КИН $k_1(s) = k_1$ можно построить весовую функцию $\zeta^3(t;\,\cdot)$, однако проще воспользоваться альтернативным приемом дифференцирования вдоль трещины (оба приема обсуждались в конце разд. 2). Заметим, что функция $(x\cdot\nabla_x)\upsilon$ сохраняет гармоничность и выполняются соотношения

$$\partial_z(x\cdot\nabla_x)\upsilon(y,0) = -\alpha(\mathbf{r}\partial_{\mathbf{r}}g(\mathbf{r})+g(\mathbf{r})),\quad y\in M,\quad (x\cdot\nabla_x)\upsilon(y,0) = 0,\quad y\in\mathbb{R}^2\backslash M \quad (4.5)$$

где $\mathbf{r} = |y|$ и соответственно $\mathbf{r}\partial_{\mathbf{r}} = y\cdot\nabla_y$. Поскольку $\mathbf{r} = R - r$, на трещине M справедливо равенство $\mathbf{r}\partial_{\mathbf{r}} = -R\partial_r + r\partial_r$, а значит благодаря разложению (2.2) имеем

$$(x\cdot\nabla_x)\upsilon(y,0) = -\alpha(2\pi)^{-1/2}R\{K_1r^{-1/2} - k_1r^{1/2} + O(r)\},\quad y\in M \quad (4.6)$$

Следовательно, $(x\cdot\nabla_x)\upsilon$ – неэнергетическое решение уравнения Лапласа с краевыми условиями (4.5), но в силу равенства (4.3) решением с конечным интегралом Дирихле служит комбинация $(x\cdot\nabla_x)\upsilon(x) + \alpha K_1RV(1;\,x)$, в которой уничтожилась особенность $O(r^{-1/2})$, а КИН выглядит так:

$$\frac{R}{2}k_1 + \frac{1}{8}K_1 = \frac{2}{(\pi R)^{1/2}}\int_0^R\{\mathbf{r}\partial_{\mathbf{r}}g(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})\}(R^2-\mathbf{r}^2)^{-1/2}\mathbf{r}d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{2}{(\pi R)^{1/2}}\int_0^R\partial_{\mathbf{r}}g(\mathbf{r})(R^2-\mathbf{r}^2)^{-1/2}\mathbf{r}^2d\mathbf{r} + K_1 \quad (4.7)$$

Подчеркнем, что второе слагаемое слева возникло из-за прибавления весовой функции.

Если $g = 0$ на ребре Γ, то при учете соотношения (4.4) интегрированием по частям равенство (4.7) преобразуется к виду

$$k_1 = -\frac{1}{2}(\pi R^3)^{-1/2}\int_0^R g(\mathbf{r})(9R^2-\mathbf{r}^2)(R^2-\mathbf{r}^2)^{-3/2}\mathbf{r}d\mathbf{r} \quad (4.8)$$

Из формулы (4.8) нетрудно извлечь след на M^+ весовой функции $V^3(\cdot;\,1)$. Из-за ее сильной сингулярности $O(r^{-3/2})$ интегральное представление (4.8) верно только при нагрузке, обращающейся в нуль на фронте трещины.

Приступим к изучению конкретного интегрального оператора B. Сравнивая разложения (2.10) и (4.2), видим, что

$$Z(0,s) = \frac{1}{2\pi}\left[2R\sin\frac{s}{2R}\right]^{-2}$$

а значит в согласии с формулами (2.6) и (2.5) $Z^{\#} = 0$ и

$$B(H;\,s) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma(H(t)-H(s))\left[2R\sin\frac{t-s}{2R}\right]^{-2}dt \quad (4.9)$$

Ясно, что $\Lambda_0 = 0$ – первое и простое собственное число оператора (4.9), а соответствующая собственная функция $H^{(0)} = (2\pi R)^{-1/2}$ постоянна. Для нахождения других собственных чисел $-\Lambda_m$ и собственных функций $H^{(m)}$ подставим $H(s) = e^{\pm ims/R}$ в квадратичную форму (3.1) с $b = -\Lambda_m$ и при учете равенства (4.9) после перехода к переменной $\sigma = R^{-1}s$ получим

$$0 = -\Lambda_mR\int_0^{2\pi}|e^{\pm im\sigma}|^2d\sigma + \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|e^{\pm im\sigma} - e^{\pm im\tau}|^2\left[\sin\frac{\tau-\sigma}{2}\right]^{-2}d\sigma d\tau =$$

$$= -2\pi R\Lambda_m + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|e^{\pm im\tau}|^2}{|e^{\pm i(\sigma-\tau)/2}|^2}\int_0^{2\pi}\frac{|e^{\pm im(\sigma-\tau)}-1|^2}{|e^{\pm i(\sigma-\tau)}-1|^2}d\sigma d\tau =$$

$$= -2\pi R\Lambda_m + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{m-1}e^{\pm in\zeta}\right|^2 d\zeta = -2\pi R\Lambda_m + \pi m$$

Таким образом, в последовательности (3.4) $\Lambda_m = (2R)^{-1}m$, где $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, и каждому положительному собственному числу отвечают две собственные функции

$$H^{(m1)}(s) = (\pi R)^{-1/2}\sin(mR^{-1}s), \quad H^{(m2)}(s) = (\pi R)^{-1/2}\cos(mR^{-1}s)$$

Так как синусы и косинусы составляют базис в пространстве $L_2(\Gamma)$, других собственных чисел нет.

Все подготовлено для того, чтобы сформулировать следствие предложения 2 для круговой трещины радиусом R.

Предложение 3. Пусть для данных вариационного неравенства (1.3) с оператором (4.9) на окружности $\{y : \mathbf{r} = R\}$ справедливы соотношения

$$F(\tau; s) = \tau F_0, \quad F_0 < 0, \quad b = -(2R)^{-1}m, \quad m \in \{1, 2, \ldots\} \tag{4.10}$$

Тогда при любых постоянных c_1 и c_2, подчиненных требованию $(c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \le -F_0$, функция

$$\Gamma \ni s \mapsto H(\tau; s) = -2\tau Rm^{-1}\{F_0 + c_1\sin(mR^{-1}s) + c_2\cos(mR^{-1}s)\} \tag{4.11}$$

неотрицательна и удовлетворяет уравнению (1.7), а значит, оказывается решением вариационного неравенства (1.3).

Так как $K_1(s) = K_{1c}$ на фронте развивающейся трещины (4.1), из определения (2.12) вытекает равенство $H = h$. Если $c_1 = c_2 = 0$ в правой части равенства (4.11), то h – постоянная, т.е. трещина остается круговой.

Пусть $m = 1$ и $|c_1| + |c_2| = 0$. Выбирая надлежащим образом начало отсчета на окружности Γ, добиваемся справедливости соотношений $c_1 = 0$ и $c_2 < 0$. Теперь

$$h(s) = -2\tau R\{F_0 + c_2\cos(R^{-1}s)\} \tag{4.12}$$

но простые вычисления показывают, что несмотря на отсутствие осевой симметрии относительно центра трещины $M = M(0)$, фронт $\Gamma(\tau)$, найденный согласно формулам (1.2) и (4.2), остается окружностью. При этом погрешность $O(\tau^2)$ не превышает точности самой вариационно-асмиптотической модели, а трещина $M(\tau)$ незначительно отличается от круга, имеющего радиус $R(1 + 2\tau|F_0|)$ и центр, смещенный относительно первоначального положения на расстояние $2\tau R|c_2|$.

Если же $m \ge 2$ и по-прежнему $|c_1| + |c_2| \ne 0$, то трещина $M(\tau)$ теряет осевую симметрию за счет образования m "лепестков". Подчеркнем, что условие $h(s) \ge 0$ необратимости процесса разрушения выполнено, и искажение формы происходит только по причине различия скоростей продвижения точек фронта на разных его участках.

В случае $K_1(s) = K_{1c}$ данные (2.13) и (2.15) вариационного неравенства (1.3) одинаковы для обоих критериев, силового и энергетического. Предположения (4.10) реализуются при условиях

$$k_1 = \frac{K_{1c}}{R}\left(\frac{3}{4} + m\right), \quad m \in \{1, 2, \ldots\} \tag{4.13}$$

$$F_0 = K_{1c}^{-1}\frac{2}{(\pi R)^{1/2}}\int_0^R g'(\mathbf{r})(R^2-\mathbf{r}^2)^{-1/2}\mathbf{r}d\mathbf{r} < 0 \tag{4.14}$$

Если усилия (1.1), раскрывающие трещину, постоянны, то в силу (4.7) $k_1(s) = 7K_{1c}(4R)^{-1}$, и требование (4.13) выполнено при $m = 1$. Неравенство (4.14) справедливо при $g' < 0$. Следовательно, если с ростом круговой трещины усилия ослабляются так, чтобы трещина оставалась равновесной, но критической, возможны бифуркации ее формы, однако они заключаются лишь в изменении положения трещины – флуктуациях ее центра.

Пусть каким-либо образом нагружение на берегах трещины удалось сделать переменным, например, за счет добавления стягивающих усилий вблизи центра $x = 0$. При монотонно возрастающей функции $\mathbf{r} \mapsto g(\mathbf{r})$ первое слагаемое в правой части (4.7) становится положительным. Нетрудно убедиться, что путем подбора функции g удается соблюсти условие (4.13) для любого заданного $m = 2, 3, \ldots$. В этом случае опять-таки при снижающейся нагрузке возможна бифуркация фронта трещины, сопровождающаяся возникновением m лепестков.

Опишем гипотетический сценарий квазистатического процесса разрушения. Развитие круговой трещины неустойчивое и в любой момент квазистатический процесс разрушения может сорваться в динамический, не описываемый предлагаемой моделью (лавинообразный рост трещины). При $m \geq 2$ бифуркация фронта устраняет осевую симметрию и после перехода к возмущенному – некруговому – контуру для нового вариационного неравенства, найденного по описанной в разд. 1 схеме, процесс разрушения локализуется в зонах вогнутости фронта. При этом бифуркации следует соотносить со спонтанными прерываниями монотонного роста трещины, так как он не наблюдается до тех пор, пока фронт не станет снова окружностью (по поводу последнего см. [7]).

Анализ интегральных представлений (4.4) и (4.7) для КИН показывает, что при выполнении соотношения (4.13) с большим m нагрузка концентрируется вблизи ребра трещины. Обращаем внимание также на то, что в согласии с равенством (4.8) для нагрузки g, обращающейся в нуль на самом ребре Г, коэффициент k_1 отрицательный, т.е. $b > 0$ в силу определения (2.13) и по предложению 1 решение вариационного неравенства оказывается единственным, т.е. бифуркаций нет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00835).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Е.М.* Вариационный принцип в механике разрушения // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 6. С. 1308–1311.
2. *Nemat-Nasser, Sumi Y., Keer L.M.* Unstable growth of tension cracks in brittle solids: stable and unstable bifurcations, snap-through and imperfection sensitivity // Intern. J. Solids Structures. 1980. V. 16. P. 1017–1033.
3. *Nguen Quoc Son.* Stabilite et bifurcation en rupture et en plasticite // C.r. Acad. Sci. Paris. Sér. II. 1981. T. 292. P. 817–820.
4. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
5. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 101–113.
6. *Kolton L.H., Nazarov S.A.* Quasistatic propagation of a mode-I crack in an elastic space // C. r. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1992. T. 315. P. 1453–1457.

7. *Bach M., Nazarov S.A., Wendland W.L.* Propagation of a penny shaped crack under the Irwin criterion // Analysis, Numerics and Applications of Differential and Integral Equations: Pitman Research Notes in Mathematics / Eds M. Bach et all. Harlow, UK: Addison Wesley Longman Ltd. 1998. V. 379. P. 17–21.
8. *Bach M., Nazarov S.A., Wendland W.L.* Stable propagation of a mode-1 crack in an isotropic elastic space. Comparison of the Irwin and the Griffith approaches // Problemi Attuali dell'Analisi e della Fisica Matematica / Ed. P.E. Ricci. Roma: MM, Aracne Edit. 2000. P. 167–189.
9. *Назаров С.А.* Взаимодействие трещин при хрупком разрушении. Силовой и энергетический подходы // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 484–496.
10. *Захаревич И.С.* О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
11. *Gao H., Rice J.R.* Somewhat circular tensile cracks // Intern. J. Fracture. 1987. V. 33. P. 155–174.
12. *Rice J.R.* First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. P. 571–579.
13. *Leblond J.-B., Lazarus V. S.-E. Mouchrif S.* Crack paths in three-dimensional elastic solids. II. Three-term expansion of the stress intensity factors – applications and perspectives // Intern. J. Solids Structures. 1999. V. 36. P. 105–142.
14. *Колтон Л.Г., Назаров С.А.* Вариация формы ребра плоской локально неравновесной трещины нормального отрыва // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 125–133.
15. *Sih G.C., Liebouwitz H.* Mathematical theories of britte fracture // Fracture / Ed. H. Liebowitz. N.Y.; L.: Acad. Press, 1968. V. 2. P. 67–190 = *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. / Под ред. Г. Либовитца. М. : Мир, 1975. С. 83–204.
16. *D'Ecatha, Labbens R.* A remark on two brittle fracture criteria in mode 1 three-dimensional problems // J. Mec. Appl. 1978. V. 2. P. 524–552.
17. *Ohtsuka K.* Mathematical analysis of 3-d fracture phenomenon by Griffith's energy balance theory under increasing loads // Theoret. and Appl. Mech. 1996. V. 45. P. 99–103.
18. *Leblond J.-B., Mouchrif S.-E., Perrin G.* The tensile tunnel-crack with a slightly wavy front // Intern. J. Solids Structures. 1996. V. 33. P. 1995–2022.
19. *Колтон Л.Г.* Медленный рост системы трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 95–100.
20. *Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Поведение решений задач теории упругости в неогранических областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями и полостями // Успехи механики. 1987. № 4. С. 3–91.
21. *Nazarov S.A.* Asymptotics of the solution to the Neumann problem in a domain with singular point of peak exterior type // Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 217–250.
22. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 712 с.
23. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
24. *Назаров С.А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
25. *Bueckner H.F.* A novel principle for the computation of stress intensity factor // ZAMM. 1976. V. 50. P. 529–546.
26. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
27. *Bueckner H.F.* Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-dimensional space // Inter. J. Solids Structures. 1987. V. 23. № 1. P. 57–93.
28. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
29. *Maz'ya V.G., Rossmann J.* Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten // Math. Nachr. 1988. Bd. 138. S. 27–53.
30. *Rice J.R.* Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis // Fracture Mechanics: Perspectives and Directions: 20th Symp. ASTM STP 1020, Philadelphia, 1989. P. 29.

31. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 3. С. 196–225.
32. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
33. *Назаров С.А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 489–502.
34. *Rossmann J., Sändig A.-M.* Formulas for the coefficients in the asymptotics of solutions of boundary value problems for second order systems near edges // ZAMM. 1996. Bd. 76. № 4. S. 181–184.
35. *Bach M., Nazarov S.A.* Smoothness properties of solutions to variational inequalities describing propagation of mode-1 cracks // Mathematical Aspects of Boundary Element Method. Palaiseau, 1998. London: CRC; Chapman and Hall, 2000. P. 23–32.
36. Stress Intensity Factors Handbook. Oxford, etc., 1987 = Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. В 2-х томах. М.: Мир, 1990. 1016 с.

Санкт-Петербург
e-mail: serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
29.IX.2005