УДК 539.3

© 2006 г. И. И. Аргатов

К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕРЦА

Методом сращиваемых асимптотических разложений с применением улучшенной процедуры сращивания построены главные члены асимптотики решения контактной задачи о сжатии без трения упругого тела и штампа, первоначально касающихся в точке. Условие одностороннего контакта сформулировано с учетом касательных смещений на поверхности контакта. Асимптотическое решение задачи для пограничного слоя построено при помощи метода комплексных потенциалов. Построена асимптотическая модель, обобщающая теорию Герца в случае, когда поверхности штампа и упругого тела в окрестности пятна контакта аппроксимируются параболоидами вращения. Задача определения сближения контактирующих тел по величине сдавливающей силы сведена к задаче расчета так называемого коэффициента локальной податливости, представляющего собой интегральную характеристику геометрии упругого тела и условий его закрепления.

1. Постановка задачи. Пусть линейно упругое тело занимает трехмерную область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$. Введем декартову систему координат с центром в точке O на участке границы Γ_c. Для определенности будем считать, что ось Ox_3 направлена внутрь области Ω, причем плоскость Ox_1x_2 касается поверхности Γ_c в точке O.

Предположим, что на участке границы Γ_u поверхность тела Ω неподвижно закреплена, а на Γ_σ подвержена действию поверхностных нагрузок с вектором плотности $\mathbf{q}(\mathbf{x})$. В таком случае вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ перемещений точек упругого тела удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}(\nabla_x)\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mu\nabla_x \cdot \nabla_x\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{L}(\nabla_x)$ – оператор Ламе, λ и μ – параметры Ламе, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x})$ – вектор напряжений на площадке с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

На участке Γ_c поверхность тела Ω соприкасается с абсолютно жестким телом (штампом), поверхность которого задается уравнением $\Psi(\mathbf{x}) = 0$, причем внутри штампа $\Psi(\mathbf{x}) < 0$, а вне его $\Psi(\mathbf{x}) > 0$. Имея в виду случай контакта штампа в форме параболоида с выпуклой поверхностью Γ_c, когда площадка контакта локализована в окрестности точки O, на Γ_c поставим уточненные условия одностороннего контакта, сформулированные А.С. Кравчуком [1],

$$\Psi(\mathbf{x}) + \nabla_x\Psi(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \tag{1.4}$$

$$\Psi(\mathbf{x}) + \nabla_x\Psi(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_T^{(n)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_N^{(n)}(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{1.5}$$

$$\Psi(\mathbf{x}) + \nabla_x \Psi(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.6}$$

Здесь $\sigma_N^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathbf{n}$ – нормальное напряжение, $\sigma_T^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} - \sigma_N^{(n)}\mathbf{n}$ – вектор касательных напряжений.

Контактная задача (1.1)–(1.6) эквивалентна [1] проблеме минимума функционала потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений, удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.4).

В дальнейшем рассматривается случай

$$\Psi(\mathbf{x}) = x_3 + (2R_2)^{-1}(x_1^2 + x_2^2) - \delta_0 \tag{1.7}$$

где постоянная $\delta_0 > 0$ определяет величину смещения штампа.

Предположим также, что поверхность Γ_c в окрестности точки O в главном определяется уравнением

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2), \quad \Phi(x_1, x_2) = (2R_1)^{-1}(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.8}$$

С целью применения метода возмущений введем малый параметр ε, полагая

$$\delta_0 = \varepsilon\delta_0^*, \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{q}^*(\mathbf{x}) \tag{1.9}$$

Тогда при малых значениях параметра ε на основании теории Герца (см., например [2]) площадка контакта ω_ε (неизвестная априори) в главном будет представлять собой круговое пятно диаметром $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Первое уточнение постановки контактной задачи было предложено И.Я. Штаерманом. Именно, было дано [3, 4] (см. также [5, 6]) обобщение теории Герца на случай, когда зазор между поверхностями упругих тел, первоначально касающихся в одной точке, в главном определяется выражением $A(x_1^2 + k^2x_2^2)^2$, где A и k – постоянные. Были разработаны ([7, 8] и др.) численные методы для решения контактных задач для упругого тела конечных размеров. В случаях, когда тело Ω может быть заменено полупространством, можно воспользоваться приближенным аналитическим решением [9] контактной задачи в уточненной постановке, для которой ранее было получено численное решение [10]. В случае плоского участка границы Γ_c и без учета касательных смещений на площадке контакта было построено асимптотическое решение [11]. Ранее контактные задачи со сферическими поверхностями контакта и заранее неизвестной границей раздела краевых условий исследовались [12, 13] с применением асимптотического метода В.М. Александрова [14] (см. также [15], § 55).

В настоящей работе методом сращиваемых асимптотических разложений [16, 17] (см. также обзор [18]) с применением улучшенной процедуры сращивания [19] строится асимптотика решения задачи одностороннего контакта без трения (1.1)–(1.6) при дополнительных предположениях (1.7)–(1.9) и $\varepsilon \to 0+$, в явном виде выписывается первая поправка к решению, получаемому по теории Герца. Задача определения сближения контактирующих тел по величине сдавливающей силы сведена к задаче расчета так называемого коэффициента локальной податливости. Построение асимптотики в общих чертах следует подходу, развитому автором [11].

2. Асимптотика вектор-функции Грина с полюсом на криволинейной границе. Обозначим через $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ решение однородной задачи

$$\mathcal{L}(\nabla_x)\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \cup \Gamma_c \backslash O \tag{2.2}$$

обладающее следующим асимптотическим разложением в начале координат:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \to 0 \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ – решение задачи Буссинеска (см., например [20]) о действии вдоль оси Ox_3 на упругое полупространство $x_3 \geq 0$ единичной сосредоточенной силы.

Напомним, что в цилиндрической системе координат r, φ, z ввиду симметрии $T_\varphi(r, \varphi, z) \equiv 0$, а радиальная и вертикальная проекции вектора $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ не зависят от угла φ, причем (ν – коэффициент Пуассона, $s = \sqrt{r^2 + z^2}$)

$$4\pi\mu T_r(r, z) = \frac{rz}{s^3} - (1-2\nu)\frac{s-z}{rs}, \quad 4\pi\mu T_z(r, z) = 2(1-\nu)\frac{1}{s} + \frac{z^2}{s^3} \tag{2.4}$$

Выпишем следующий член в асимптотической формуле (2.3), обусловленный искривлением поверхности Γ_c в окрестности точки O. Для этого изучим поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $\mathbf{T}^\varepsilon(r, \varphi, z)$ вспомогательной возмущенной задачи Буссинеска о действии в начале координат единичной сосредоточенной силы на упругое полубесконечное тело $z \geq \varepsilon\Phi_1(r)$, ограниченное поверхностью

$$z = \varepsilon\Phi_1(r); \quad \Phi_1(r) = (2R_1)^{-1}r^2 \tag{2.5}$$

(Поясним, что в формуле (2.5) ε – вспомогательный параметр и не имеет отношения к зависимости (1.9).)

В силу осевой симметрии будем иметь

$$\mathbf{T}^\varepsilon(r, \varphi, z) = T_r^\varepsilon(r, z)\mathbf{e}_r(\varphi) + T_z^\varepsilon(r, z)\mathbf{e}_3$$

где $\mathbf{e}_r(\varphi) = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$ – координатный вектор.

Воспользуемся методом возмущения формы границы [16, 21] (см. также работы по механике трещин [22, 23]). Применяя очевидные разложения (зависимость от угловой координаты φ далее для простоты не указывается)

$$\mathbf{T}^\varepsilon(r, \varepsilon\Phi(r)) = \mathbf{T}^\varepsilon(r, 0) + \varepsilon\Phi(r)\mathbf{T}^\varepsilon_{,z}(r, 0) + O(\varepsilon^2)$$

$$\mathbf{n}^\varepsilon(r) = [1 + \varepsilon^2\Phi'(r)^2]^{-1/2}(\varepsilon\Phi'(r)\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_3 + \varepsilon\Phi'(r)\mathbf{e}_r + O(\varepsilon^2)$$

получаем

$$-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{T}^\varepsilon; r, \varepsilon\Phi(r)) = \boldsymbol{\sigma}^{(z)}(\mathbf{T}^\varepsilon; r, 0) + \varepsilon[\Phi(r)\boldsymbol{\sigma}^{(z)}(\mathbf{T}^z_{,z}; r, 0) - \Phi'(r)\boldsymbol{\sigma}^{(r)}(\mathbf{T}^\varepsilon; r, 0)] + \ldots \tag{2.6}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\sigma}^{(z)} = \sigma_{rz}\mathbf{e}_r + \sigma_{zz}\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \sigma_{rr}\mathbf{e}_r + \sigma_{rz}\mathbf{e}_3$$

Индекс z после запятой означает дифференцирование по координате z, дифференцирование по r обозначено штрихом.

Разложение (2.6) позволяет снести граничное условие

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{T}^\varepsilon; r, \varepsilon\Phi(r)) = 0, \quad r > 0 \tag{2.7}$$

на невозмущенную поверхность $z = 0$ упругого полупространства. Действительно, подставим в соотношение (2.7) разложение (2.6) и следующее:

$$\mathbf{T}^\varepsilon(r, z) = \mathbf{T}(r, z) + \varepsilon\mathbf{t}(r, z) + \ldots \tag{2.8}$$

Собирая члены с множителем ε, для определения второго члена разложения (2.8) выводим граничное условие

$$\boldsymbol{\sigma}^{(z)}(\mathbf{t}; r, 0) = -\Phi(r)\boldsymbol{\sigma}^{(z)}(\mathbf{T}_{,z}; r, 0) + \Phi'(r)\boldsymbol{\sigma}^{(r)}(\mathbf{T}; r, 0) \tag{2.9}$$

Непосредственные вычисления с привлечением формул (2.4) при $z = 0$ и $r > 0$ дают

$$\boldsymbol{\sigma}^{(z)}(\mathbf{T}_{,z};\, r, 0) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(r)}(\mathbf{T};\, r, 0) = (1-2\nu)(2\pi)^{-1} r^{-2}\mathbf{e}_r$$

Подставляя данные выражения в правую часть граничного условия (2.9) и вспоминая зависимость (2.5), получаем

$$\sigma_{zz}(\mathbf{t};\, r, 0) = 0, \quad \sigma_{rz}(\mathbf{t};\, r, 0) = (1-2\nu)(2\pi R_1)^{-1} r^{-1} \tag{2.10}$$

Вектор-функцию $\mathbf{t}(r, \varphi, z)$ построим, используя представление Папковича – Нейбера,

$$t_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + z\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad t_\varphi = 0, \quad t_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - (3-4\nu)\psi + z\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.11}$$

На основе расчетов [24] при учете выражений (2.10) гармонические потенциалы $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ находим в виде

$$\varphi(r, z) = \frac{\vartheta(1-2\nu)}{R_1}\left(z\ln\frac{s+z}{2R_1} - s\right), \quad \psi(r, z) = \frac{\vartheta\beta}{2R_1}\ln\frac{s+z}{2R_1} \tag{2.12}$$

Здесь использованы обозначения

$$\vartheta = \frac{1-\nu}{2\pi\mu}, \quad \beta = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

Таким образом, подставляя выражения (2.12) в формулы (2.11), будем иметь

$$\begin{aligned} t_r(r, z) &= \frac{\vartheta\beta}{2R_1}\left(-2(1-\nu)\frac{r}{s+z} + \frac{rz}{s(s+z)}\right) \\ t_z(r, z) &= \frac{\vartheta\beta}{2R_1}\left(\frac{z}{s} - (1-2\nu)\ln\frac{s+z}{2R_1}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Возвратимся к задаче уточнения асимптотики (2.3) вектор-функции Грина $\mathbf{G}(\mathbf{x})$. Принимая во внимание предположение (1.8) об аппроксимации поверхности Γ_c в окрестности точки O круговым параболоидом, на основании разложения (2.8) устанавливаем следующее:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}} + O(|\mathbf{x}|\ln(|\mathbf{x}|/R_1)) \tag{2.14}$$

где $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ – вектор-функция с цилиндрическими компонентами (2.13), $\tilde{\mathbf{A}}$ – постоянный вектор. Заметим, что величина

$$A_0 = \vartheta^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}_3 \tag{2.15}$$

представляет собой аналог соответствующего коэффициента локальной податливости, введенного ранее [25] для случая плоской границы Γ_c.

3. Внешнее асимптотическое разложение. Опишем структуру решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ исходной задачи (1.1)–(1.6) в области Ω на удалении от площадки контакта ω_ε. Асимптотическое разложение для поля перемещений в указанной области будем обозначать через $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{v}^0{*}(\mathbf{x})$ – решение задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\nabla_x)\mathbf{v}^0{*}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\Omega; \quad \mathbf{v}^0{*}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_u \\ &\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}{*}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Gamma_\sigma; \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_c \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда по методу сращиваемых асимптотических разложений (САР) в главном будем иметь

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{v}^{0}*(\mathbf{x}) + P\mathbf{G}(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ – решение задачи (2.1)–(2.3).

Величина P, зависимость которой от параметра ε для простоты записи не указывается, представляет собой равнодействующую контактных давлений, передаваемых на тело Ω со стороны штампа через площадку контакта ω_ε. Ясно, что по причине отсутствия трения (см. (1.5)) контактные давления действуют по нормали к поверхности Γ_c.

Неопределенный коэффициент P определяется в результате сращивания внешнего асимптотического разложения (3.2) и внутреннего асимптотического разложения, область пригодности которого охватывает зону контакта. Для того чтобы установить порядок величины P при $\varepsilon \to 0$, прибегнем к теории Герца, дающей главный член асимптотики решения контактной задачи.

Так, свободное смещение точки O тела Ω по нормали к поверхности Γ_c в отсутствие штампа (обусловленное влиянием поверхностных нагрузок на Γ_σ) составило бы величину $-\varepsilon \overset{0*}{\upsilon_3}(O)$. Тем самым при вдавливании штампа на глубину δ_0 (от уровня $x_3 = 0$ вдоль оси Ox_3, направленной внутрь тела Ω) механическую работу приходится совершать на пути длиной $\varepsilon\delta_0^* - \varepsilon \overset{0*}{\upsilon_3}(O)$. Принимая теперь во внимание предположения (1.7) и (1.8) об осесимметричности поверхности штампа и вблизи него поверхности Γ_c, получаем, что площадка контакта ω_ε в главном оказывается круговой с радиусом

$$a \simeq \varepsilon^{1/2}((\delta_0^* - \overset{0*}{\upsilon_3}(O))R_0)^{1/2}; \quad R_0 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.3}$$

При этом получаем

$$P \simeq \varepsilon^{3/2}(\delta_0^* - \overset{0*}{\upsilon_3}(O))^{3/2}4(3\pi)^{-1}\vartheta^{-1}R_0^{1/2} \tag{3.4}$$

Таким образом, соотношения (3.3) и (3.4) дают основание положить

$$a = \varepsilon^{1/2}a^*, \quad P = \varepsilon^{3/2}P^* \tag{3.5}$$

Далее соотношение (3.3) диктует введение растянутых координат с коэффициентом растяжения $\varepsilon^{-1/2}$. Действительно, осуществляя замену координат

$$\mathbf{x} = \varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{3.6}$$

получаем, что радиус a^* проекции площадки контакта на плоскость $O\xi_1\xi_2$ в главном члене асимптотики не зависит от параметра ε.

Введение растянутых координат (3.6) позволяет описать напряженно-деформированное состояние в области местных возмущений (см. [26], § 133) под подошвой штампа. В промежуточной зоне должно выполняться условие сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений [16]. Для его вывода требуется асимптотическое разложение вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ при $|\mathbf{x}| \to 0$.

Согласно соотношению (2.14) имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}}) + \varepsilon\mathbf{v}^{0}*(O) + \varepsilon\sum_{k=1}^{6} \overset{0*}{\upsilon_{1,k}}\mathbf{V}^{1,k}(\mathbf{x}) + O\left(|\mathbf{x}|\ln\frac{|\mathbf{x}|}{R_1}\right) \tag{3.7}$$

где $\mathbf{V}^{1,k}(\mathbf{x})$ – линейно независимые векторные однородные полиномы первой степени, удовлетворяющие в полупространстве $x_3 \geq 0$ однородной системе Ламе, а на его границе – краевым условиям отсутствия напряжений (см., например [27, 28]).

Переходя в обеих частях данного соотношения к растянутым координатам (3.6) и учитывая вторую зависимость (3.5), после перегруппировки слагаемых получаем

$$\mathbf{v}(\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon P^*(\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^{1/2}\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})) + \varepsilon\mathbf{V}^*(\varepsilon;\, \boldsymbol{\xi}) + \ldots \tag{3.8}$$

$$\mathbf{V}^*(\varepsilon;\, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{v}^0{}^*(O) + \varepsilon^{1/2}\left(P^*(\tilde{C}_\varepsilon\mathbf{e}_3 + \tilde{\mathbf{A}}) + \sum_{k=1}^{6} v_{1,k}^{0*}\mathbf{V}^{1,k}(\boldsymbol{\xi})\right) \tag{3.9}$$

Здесь

$$\tilde{C}_\varepsilon = \vartheta C_\varepsilon, \quad C_\varepsilon = -\frac{(1-2\nu)\beta}{2R_1}\ln\sqrt{\varepsilon} \tag{3.10}$$

Поясним, что при выводе разложения (3.8) были использованы явные выражения (2.4) и (2.13) для векторов $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Оценка $O(\varepsilon^2|\boldsymbol{\xi}|\ln(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|/R_1))$ остаточного члена в разложении (3.8) определяется погрешностью формулы (3.7).

4. Определение координат центра пятна контакта. Внутреннее асимптотическое разложение для поля перемещений в непосредственной близости подошвы штампа будем строить в растянутых координатах (3.6) и обозначать через $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$.

По методу САР вектор-функция $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$ строится в полубесконечной области $\zeta \geq 1\sqrt{\varepsilon}\,\Phi_1(\rho)$, ограниченной поверхностью

$$\zeta = \sqrt{\varepsilon}\Phi_1(\rho), \quad \Phi_1(\rho) = (2R_1)^{-1}\rho^2 \tag{4.1}$$

где $\zeta = \xi_3$ и $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ – растянутые цилиндрические координаты.

Условие сращивания внутреннего $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$ и внешнего $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ асимптотических разложений согласно разложению (3.8) диктует для вектора $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$ в зоне сращивания (при $|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\zeta^2 + \rho^2} \sim \varepsilon^{-1/4}R_1$) следующее асимптотическое поведение:

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon\mathbf{V}^*(\varepsilon;\, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon P^*(\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^{1/2}\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})) + O(\varepsilon^{7/4}|\ln\varepsilon|) \tag{4.2}$$

Положим

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon\mathbf{V}^*(\varepsilon;\, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.3}$$

Так как вектор $\mathbf{V}^*(\varepsilon;\, \boldsymbol{\xi})$ по построению (см. равенство (3.9)) удовлетворяет системе уравнений Ламе, этого же потребуем и от вектор-функции $\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi})$.

Подставляя сумму (4.3) в соотношение (4.2), получаем

$$\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi}) = P^*(\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^{1/2}\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})) + O(\varepsilon^{3/4}|\ln\varepsilon|), \quad |\boldsymbol{\xi}| \sim \varepsilon^{-1/4}R_1 \tag{4.4}$$

Граничное условие одностороннего контакта (1.4)–(1.6), записанное относительно вектор-функции $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$, распространим на всю поверхность (4.1). Тогда после замены координат (3.6) условие (1.4) приобретает вид

$$\varepsilon\left(\frac{\rho^2}{2R_0} - \delta_0^*\right) + w_3\left(\xi_1, \xi_2, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2R_1}\rho^2\right) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{R_2}\sum_{i=1,2}\xi_i w_i\left(\xi_1, \xi_2, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2R_1}\rho^2\right) \geq 0 \tag{4.5}$$

Прибегая вновь к методу возмущения формы границы, снесем граничное условие (4.5) на плоскость $\xi_3 = 0$, к которой в пределе при $\varepsilon \to 0$ приближается параболоид (4.1).

Так, оставляя только первую поправку, т. е. члены $O(\sqrt{\varepsilon})$ по сравнению с единицей, получаем

$$\varepsilon\left(\frac{\rho^2}{2R_0} - \delta_0^*\right) + w_3(\xi_1, \xi_2, 0) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2R_1}\rho^2\frac{\partial w_3}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{R_2}\sum_{i=1,2}\xi_i w_i(\xi_1, \xi_2, 0) \geq 0 \qquad (4.6)$$

На площадке контакта ω^* в соотношении (4.6) должен выполняться знак равенства. Поэтому для всех точек $(\xi_1, \xi_2) \in \omega^*$ согласно представлению (4.3) будем иметь

$$W_3^*(\xi_1, \xi_2, 0) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2R_1}\rho^2\frac{\partial W_3^*}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{R_2}\sum_{i=1,2}\xi_i W_i^*(\xi_1, \xi_2, 0) =$$

$$= \delta_0^* - \frac{\rho^2}{2R_0} - V_3^*(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) = \Delta_0^* - \frac{(\xi_1 - \xi_1^\circ)^2 + (\xi_2 - \xi_2^\circ)^2 + O(\varepsilon)}{2R_0} \qquad (4.7)$$

Здесь использовано равенство

$$V_3^*(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) = \overset{0*}{v_3}(O) + \sqrt{\varepsilon}(\overset{0*}{v}_{1,1}\xi_2 - \overset{0*}{v}_{1,2}\xi_1) + \sqrt{\varepsilon}P^*(\tilde{C}_\varepsilon + \tilde{A}_0) \qquad (4.8)$$

записанное при учете определения (3.9), и введены обозначения

$$\xi_1^\circ = R_0\sqrt{\varepsilon}\overset{0*}{v}_{1,2}, \quad \xi_2^\circ = -R_0\sqrt{\varepsilon}\overset{0*}{v}_{1,1}, \quad \Delta_0^* = \delta_0^* - \overset{0*}{v_3}(O) - \sqrt{\varepsilon}P^*(\tilde{C}_\varepsilon + \tilde{A}_0) \qquad (4.9)$$

Коэффициенты $\overset{0*}{v}_{1,1}$ и $\overset{0*}{v}_{1,2}$ имеют смысл малых углов поворота (относительно координатных осей Ox_1 и Ox_2) участка поверхности упругого тела Ω в точке O, когда поле перемещений $\mathbf{v}^{0*}(\mathbf{x})$ определяется как решение задачи (3.1).

Итак, если в граничном условии (4.7) сделать замену координат

$$\xi_1 = \xi_1^\circ + \hat{\xi}_1, \quad \xi_2 = \xi_2^\circ + \hat{\xi}_2, \quad \xi_3 = \hat{\xi}_3$$

то преобразованное граничное условие будет зависеть только от выражения $\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2$. Тем самым при учете осесимметричности соотношения (4.4), которое в главном не претерпевает изменений, задача для определения вектор-функции $\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi})$ оказывается осесимметричной, а площадка контакта ω^* – круговой с центром в точке $(\xi_1^\circ, \xi_2^\circ)$ с координатами, определяемыми первыми двумя формулами (4.9).

Далее, поскольку при $|\hat{\boldsymbol{\xi}}| \to \infty$ выполняется разложение

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) - \xi_1^\circ\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi_1}(\boldsymbol{\xi}) - \xi_2^\circ\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi_2}(\boldsymbol{\xi}) + O(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^{-3})$$

в рамках метода САР внешнее асимптотическое разложение (3.2) уточняется добавлением сингулярных членов, отвечающих действию на границу тела Ω в точке O сосредоточенных моментов $M_1 = \varepsilon^2 P^* \xi_2^\circ$ и $M_2 = -\varepsilon^2 P^* \xi_1^\circ$. Ясно, что указанные члены не оказывают влияния на процесс построения первой поправки. Поясним также, что появление сосредоточенных моментов в точке O – следствие смещения центра пятна контакта ω_ε^* относительно точки O.

В дальнейшем для простоты записи формул “крышки" над центрированными координатами указывать не будем.

5. Осесимметричная задача одностороннего контакта для пограничного слоя. Пусть a^* – радиус площадки контакта ω^*. На основании сказанного выше граничное условие (4.7) может быть переписано в виде

$$\frac{\rho^2}{2R_0}-\Delta_0^*+W_\zeta^*(\rho,0)+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2R_1}\rho^2\frac{\partial W_\zeta^*}{\partial\zeta}(\rho,0)+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R_2}\rho W_\rho^*(\rho,0) = 0,\quad \rho\in[0,a^*] \tag{5.1}$$

Обратимся теперь к оставшимся соотношениям (1.5) и (1.6) граничного условия одностороннего контакта. Нетрудно проверить, что единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}^\varepsilon(\rho)$ и касательный вектор в радиальном направлении $\mathbf{t}^\varepsilon(\rho)$ допускают разложения (всюду далее $\Phi_1=\Phi_1(\rho)$)

$$\mathbf{n}^\varepsilon(\rho) = -\mathbf{e}_\zeta+\sqrt{\varepsilon}\Phi_1'\mathbf{e}_\rho+O(\varepsilon),\quad \mathbf{t}^\varepsilon(\rho) = \mathbf{e}_\rho+\sqrt{\varepsilon}\Phi_1'\mathbf{e}_\zeta+O(\varepsilon) \tag{5.2}$$

Используя эти разложения и поступая аналогично тому, как при выводе разложения (2.6), получаем

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{W}^*;\,\rho,\sqrt{\varepsilon}\Phi_1) =\\ &= \boldsymbol{\sigma}^{(\zeta)}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)+\sqrt{\varepsilon}[\Phi_1\boldsymbol{\sigma}^{(\zeta)}(\mathbf{W}^*_{,\zeta};\,\rho,0)-\Phi_1'\boldsymbol{\sigma}^{(\rho)}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)]+\ldots\end{aligned} \tag{5.3}$$

Тем самым для нормального $\sigma_N^{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathbf{n}^\varepsilon$ и касательного $\sigma_T^{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathbf{t}^\varepsilon$ напряжений следствием разложений (5.2), (5.3) будут такие:

$$\sigma_N^{(n)}(\mathbf{W}^*;\,\rho,\sqrt{\varepsilon}\Phi_1)=\sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)+\sqrt{\varepsilon}[\Phi_1\sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*_{,\zeta};\,\rho,0)-2\Phi_1'\sigma_{\rho\zeta}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)]+\ldots \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}&-\sigma_T^{(n)}(\mathbf{W}^*;\,\rho,\sqrt{\varepsilon}\Phi_1) = \sigma_{\rho\zeta}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)+\\ &+\sqrt{\varepsilon}\{\Phi_1\sigma_{\rho\zeta}(\mathbf{W}^*_{,\zeta};\,\rho,0)-\Phi_1'[\sigma_{\rho\rho}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)-\sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*;\,\rho,0)]\}+\ldots\end{aligned} \tag{5.5}$$

Таким образом, граничное условие, выражающее отсутствие трения (между соприкасающимися поверхностями упругого тела и штампа) и касательных нагрузок на Γ_c вне площадки контакта, согласно выражениям (1.5), (1.6) и (5.5) сносится на невозмущенную границу следующим образом:

$$\sigma_{\rho\zeta}^0(\mathbf{W}^*)+\sqrt{\varepsilon}\{\Phi_1\sigma_{\rho\zeta}^0(\mathbf{W}^*_{,\zeta})-\Phi_1'[\sigma_{\rho\rho}^0(\mathbf{W}^*)-\sigma_{\zeta\zeta}^0(\mathbf{W}^*)]\} = 0,\quad \zeta = 0,\quad \rho\ge 0 \tag{5.6}$$

Поясним, что вектор $\mathbf{V}^*(\varepsilon;\,\boldsymbol{\xi})$ на границе полупространства $\zeta\ge 0$ удовлетворяет граничным условиям отсутствия напряжений и, следовательно, не оказывает влияния при формировании соотношения (5.6).

Наконец, граничное условие $\sigma_N^{(n)}(\mathbf{u};\,\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\Gamma_c\backslash\omega_\varepsilon$, выражающее отсутствие нормальных нагрузок вне площадки контакта ω_ε, согласно соотношениям (1.5) и (5.4) сносится на невозмущенную границу $\zeta=0$ так:

$$\sigma_{\zeta\zeta}^0(\mathbf{W}^*)+\sqrt{\varepsilon}[\Phi_1\sigma_{\zeta\zeta}^0(\mathbf{W}^*_{,\zeta})-2\Phi_1'\sigma_{\rho\zeta}^0(\mathbf{W}^*)] = 0,\quad \zeta = 0,\quad \rho\ge a^* \tag{5.7}$$

Построение внутреннего асимптотического разложения $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$ согласно представлению (4.3) сведено к отысканию вектор-функции $\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi})$, удовлетворяющей в полупространстве $\xi_3\ge 0$ уравнениям системы Ламе, на его границе смешанным граничным условиям (5.1), (5.6) и (5.7), а на бесконечности – асимптотическому условию (4.4).

Для контактного давления $p(\mathbf{u};\mathbf{x}) = -\sigma_N^0(\mathbf{u};\mathbf{x})$ на площадке контакта ω_ε при переходе к растянутым координатам (3.6) ввиду зависимости $\partial/\partial x_i = \varepsilon^{-1/2}\partial/\partial\xi_i$, получаем выражение

$$p(\mathbf{u};\mathbf{x}) = -\varepsilon^{-1/2}\sigma_N^{(n)}(\mathbf{w};\boldsymbol{\xi}),\quad \boldsymbol{\xi}\in\omega^*$$

Тогда, принимая во внимание формулы (4.3) и (5.4), находим

$$p(\mathbf{u};\mathbf{x}) \simeq -\varepsilon^{-1/2}\{\sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*;\rho,0) + \sqrt{\varepsilon}[\Phi_1\sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*_{,\zeta};\rho,0) - 2\Phi_1'\sigma_{\rho\zeta}(\mathbf{W}^*;\rho,0)]\} \tag{5.8}$$

Как было показано, сформулированная задача одностороннего контакта для пограничного слоя осесимметрична и конструкционно нелинейна, поскольку радиус a^* площадки контакта ω^* должен определяться в ходе решения задачи из условия обращения контактного давления (5.8) в нуль на краю площадки контакта.

6. Решение задачи для пограничного слоя. Вектор-функцию $\mathbf{W}^*(\boldsymbol{\xi})$ построим, используя представление Папковича – Нейбера (2.11) в сочетании с методом комплексных потенциалов [29–32].

Осуществляя в представлении Папковича – Нейбера (2.11) подстановку

$$2\mu\varphi = (1-2\nu)N + 2(1-\nu)S,\quad 2\mu\psi = N_{,\zeta} + S_{,\zeta}$$

получаем следующее симметрическое представление [32]:

$$\begin{aligned} 2\mu W_\rho^* &= (1-2\nu)N_{,\rho} + 2(1-\nu)S_{,\rho} + \zeta(N_{,\zeta\rho} + S_{,\zeta\rho})\\ 2\mu W_\zeta^* &= -2(1-\nu)N_{,\zeta} - (1-2\nu)S_{,\zeta} + \zeta(N_{,\zeta\zeta} + S_{,\zeta\zeta}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

При этом компоненты напряжений выражаются так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\mathbf{W}^*) &= 2\nu\rho^{-1}(N+S)_{,\rho} + (N+2S)_{,\rho\rho} + \zeta(N+S)_{,\zeta\rho\rho}\\ \sigma_{\zeta\zeta}(\mathbf{W}^*) &= -N_{,\zeta\zeta} + \zeta(N+S)_{,\zeta\zeta\zeta},\quad \sigma_{\rho\zeta}(\mathbf{W}^*) = S_{,\rho\zeta} + \zeta(N+S)_{,\zeta\zeta\rho} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Подчеркнем, что выражения (6.2) преобразованы с учетом уравнения Лапласа, которому должны удовлетворять гармонические потенциалы N и S.

Положим

$$N = \operatorname{Re}\int_0^{a^*} n(t)\ln\kappa(t)dt,\quad \kappa(t) = \zeta + it + \sqrt{(\zeta+it)^2+\rho^2} \tag{6.3}$$

$$S = \sqrt{\varepsilon}(c_1S^1 + S^2) \tag{6.4}$$

$$S^1 = \operatorname{Re}\int_0^{a^*} n(t)\left((\zeta+it)\ln\frac{\kappa(t)}{2R_1} + \zeta + it - \kappa(t)\right)dt,\quad S^2 = \operatorname{Im}\int_0^{a^*} s^2(t)\ln\kappa(t)dt \tag{6.5}$$

Плотности $n(t)$, $s^2(t)$ и коэффициент c_1 определим, подставляя выражения (6.1)–(6.5) в граничные условия (5.1), (5.6) и (5.7).

Введем обозначения

$$\tilde{n} = \int_0^{a^*} n(t)dt,\quad \mathcal{N}(\rho) = \int_\rho^{a^*}\frac{n(t)tdt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}$$

Непосредственные вычисления при $\zeta = 0$ показывают, что

$$\sigma^0_{\zeta\zeta}(N) = \sigma^0_{\rho\zeta}(N) = 0, \quad \sigma^0_{\zeta\zeta}(N_{,\zeta}) = \sigma^0_{\rho\zeta}(N_{,\zeta}) = 0, \quad \rho \ge a^*$$
$$\sigma^0_{\rho\rho}(N) = -\frac{1-2\nu}{\rho}N^0_{,\rho} = -\frac{1-2\nu}{\rho^2}\tilde{n}, \quad \rho \ge a^* \tag{6.6}$$

$$\sigma^0_{\rho\zeta}(N_{,\zeta}) = N^0_{,\zeta\zeta\rho} = (\rho^{-1}\mathcal{N}'(\rho))', \quad \rho < a^* \tag{6.7}$$

$$\sigma^0_{\rho\rho}(N) - \sigma^0_{\zeta\zeta}(N) = -\frac{1-2\nu}{\rho}N^0_{,\rho} = -\frac{1-2\nu}{\rho^2}(\tilde{n} - \mathcal{N}(\rho)), \quad \rho < a^* \tag{6.8}$$

Тем самым граничное условие (5.7) дает

$$\sigma^0_{\zeta\zeta}(S) = 0, \quad \rho \ge a^* \tag{6.9}$$

Условие (6.9) выполняется для потенциала (6.4) по построению.

Граничное условие (5.6) следует рассмотреть отдельно на площадке контакта (при $\rho < a^*$) и вне ее (при $\rho \ge a^*$). Так, при учете равенства $\sigma^0_{\rho\zeta}(N) = 0$ и выражений (6.7), (6.8) будем иметь

$$\sigma^0_{\rho\zeta}(c_1 S^1 + S^2) = \Phi'_1 \sigma^0_{\rho\rho}(N), \quad \rho \ge a^* \tag{6.10}$$

$$\sigma^0_{\rho\zeta}(c_1 S^1 + S^2) = -\Phi_1\sigma^0_{\rho\zeta}(N_{,\zeta}) + \Phi'_1[\sigma^0_{\rho\rho}(N) - \sigma^0_{\zeta\zeta}(N)], \quad \rho < a^* \tag{6.11}$$

Далее, для потенциала S^1 получаем

$$\sigma^0_{\rho\zeta}(S^1) = \rho^{-1}\tilde{n}, \quad \rho \ge a^*; \quad \sigma^0_{\rho\zeta}(S^1) = \rho^{-1}\tilde{n} - \rho^{-1}\mathcal{N}(\rho), \quad \rho < a^* \tag{6.12}$$

Подставляя теперь последнее выражение (6.6) в граничное условие (6.10) и сравнивая с первым выражением (6.12) при учете соотношений (4.1), находим

$$c_1 = -(1-2\nu)/R_1 \tag{6.13}$$

Таким образом, подставляя представление (6.4) в граничное условие (6.11) и принимая во внимание формулы (6.7), (6.8) и (6.12), выводим следующее граничное условие:

$$\sigma^0_{\rho\zeta}(S^2) = -\rho^2(2R_1)^{-1}(\rho^{-1}\mathcal{N}'(\rho))', \quad \rho < a^* \tag{6.14}$$

Обозначим правую часть равенства (6.14) через $q^2(\rho)$. Тогда на основании решения интегрального уравнения Абеля (подробности см., например [32], § 9.2) плотность интеграла S^2 представима в виде

$$s^2(t) = \frac{2t}{\pi}\int_t^{a^*}\frac{q^2(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}}dx \tag{6.15}$$

В дальнейшем понадобится значение вертикального перемещения (см. вторую формулу (6.1))

$$\frac{2\mu}{1-2\nu}U^0_\zeta(S^2) = -S^{20}_{,\zeta} = \int_\rho^{a^*}\frac{s^2(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \quad \rho < a^* \tag{6.16}$$

Подставим выражение (6.15) в правую часть соотношения (6.16) и изменим порядок интегрирования. В результате простых вычислений получаем

$$U_\zeta^0(S^2) = \frac{1-2\nu}{2\mu}\int_\rho^{a^*} q^2(x)dx, \quad \rho < a^*$$

Подставляя теперь сюда выражение $q^2(x)$ из правой части равенства (6.14) и интегрируя по частям, находим

$$\frac{4\mu R_1}{1-2\nu}U_\zeta^0(S^2) = -a^*\mathcal{N}'(a^*) + \rho\mathcal{N}'(\rho) - 2\mathcal{N}(\rho) \tag{6.17}$$

Далее аналогично левому равенству (6.16) получаем

$$-\frac{2\mu}{1-2\nu}U_\zeta^0(S^1) = S_{,\zeta}^{10} = \mathrm{Re}\int_0^{a^*} n(t)\ln\frac{it+\sqrt{\rho^2-t^2}}{2R_1}dt =$$

$$= \ln\frac{\rho}{2R_1}\int_0^\rho n(t)dt + \int_\rho^{a^*} n(t)\ln\frac{t+\sqrt{t^2-\rho^2}}{2R_1}dt \tag{6.18}$$

Итак, решение задачи одностороннего контакта для пограничного слоя выражено через комплексные потенциалы (6.3), (6.5), определяемые плотностью $n(t)$. Для ее нахождения подставим выражения (6.1), (6.4) в оставшееся краевое условие (5.1). С той же точностью, с которой было получено соотношение (5.1), будем иметь

$$\frac{\rho^2}{2R_0} - \Delta_0^* + U_\zeta^0(N) + \sqrt{\varepsilon}\left\{c_1 U_\zeta^0(S^1) + U_\zeta^0(S^2) + \frac{\rho^2}{2R_1}\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}(N)\bigg|_{\zeta=0} + \frac{\rho}{R_2}U_\rho^0(N)\right\} = 0 \tag{6.19}$$

$$\rho \le a^*$$

причем (в следующих трех формулах предполагается, что $\rho < a^*$)

$$-(2\pi)^{-1}\vartheta^{-1}U_\zeta^0(N) = \int_0^\rho \frac{n(t)tdt}{\sqrt{\rho^2-t^2}}$$

$$(\pi\beta\vartheta)^{-1}U_\rho^0(N) = \rho^{-1}\tilde{n} - \rho^{-1}\mathcal{N}(\rho), \quad -(\pi\beta\vartheta)^{-1}U_{\zeta,\zeta}(N)|_{\zeta=0} = \rho^{-1}\mathcal{N}'(\rho) \tag{6.20}$$

При $\sqrt{\rho^2+\zeta^2} \to \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$S^1 \sim \tilde{n}(\zeta\ln[(\zeta+\sqrt{\zeta^2+\rho^2})/(2R_1)] - \sqrt{\zeta^2+\rho^2})$$

Тем самым асимптотическое условие сращивания (4.4) будет выполненным, если соблюсти условие нормировки

$$2\pi\tilde{n} = -P^* \tag{6.21}$$

Уравнение (6.21) позволяет установить зависимость между силой P^* и перемещением δ_0^*. При этом радиус a^* площадки контакта ω^* определяется условием обращения контактного давления (5.8) на ее краю в нуль.

Обозначая через $-p^*(\rho)$ выражение в фигурных скобках (5.8), будем иметь

$$-p^*(\rho) = \sigma^0_{\zeta\zeta}(N) + \sqrt{\varepsilon}\Phi_1\sigma^0_{\zeta\zeta}(N_{,\zeta}) \tag{6.22}$$

Дифференцируя обе части второй формулы (6.2), получаем $\sigma_{\zeta\zeta}(N_{,\zeta}) = \zeta N_{,\zeta\zeta\zeta\zeta}$. Поскольку непосредственное дифференцирование по параметру ζ интеграла (6.3) приводит к расходящимся в пределе при $\zeta \to 0$ интегралам, применим формулу [32]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{(\zeta+it)^2+\rho^2}} \equiv \frac{1}{\zeta+it}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{\sqrt{(\zeta+it)^2+\rho^2}}$$

Применяя данную формулу трижды, получаем

$$N^0_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} = 3\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^2\mathcal{N}(\rho) - \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^3\int\limits_\rho^{a^*}\frac{n(t)t^3dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}$$

Принимая теперь во внимание, что при $\varepsilon \to 0$ плотность $n(t)$ сходится к герцевской, заключаем, что интегралы в выражении для $N^0_{,\zeta\zeta\zeta\zeta}$ в главном члене асимптотики будут полиномами относительно ρ^2. Следовательно, в рамках точности асимптотических конструкций второй член в сумме (6.22) обращается в нуль, и окончательно будем иметь

$$p^*(\rho) = \rho^{-1}\mathcal{N}'(\rho) \tag{6.23}$$

Заметим, что предыдущие рассуждения также устанавливают равенство $\mathcal{N}'(a^*) = 0$.

Покажем также, что из условия $p^*(a^*) = 0$ вытекает условие $n(a^*) = 0$. Действительно, по формуле (6.23) находим

$$0 = \frac{1}{a^*}\lim_{\Delta\rho\to 0-}\frac{1}{\Delta\rho}\int\limits_{a^*+\Delta\rho}^{a^*}\frac{n(t)tdt}{\sqrt{t^2-(a^*+\Delta\rho)^2}}$$

Применяя теперь теорему о среднем значении интеграла (непрерывность функции $n(t)$ в точке a^* доказывается от противного), приходим к пределу

$$0 = \lim_{\Delta\rho\to 0-}\frac{1}{\Delta\rho}n(a^*+\theta\Delta\rho)\sqrt{2a^*(-\Delta\rho)}$$

где $(0, 1) \ni \theta$ – некоторое число (зависящее от $\Delta\rho$). Отсюда непосредственно следует, что решение интегрального уравнения (6.19) должно обращаться в нуль на краю площадки контакта, что, напомним, дает уравнение для определения радиуса a^*.

7. Асимптотика равнодействующей контактного давления. Обращая первую формулу (6.20), для плотности интеграла (6.3) выводим представление

$$n(t) = -\pi^{-2}\vartheta^{-1}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\rho U^0_\zeta(N;\rho)d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{7.1}$$

Положим

$$n(t) = n_0(t) + \sqrt{\varepsilon}n_1(t) \tag{7.2}$$

$$a^* = a^*_0 + \sqrt{\varepsilon}a^*_1 \tag{7.3}$$

Плотность $n_0(t)$, очевидно, определяется в соответствии с теорией Герца

$$n_0(t) = -\pi^{-2}\vartheta^{-1}(\delta_0^* - \overset{0*}{v_3}(O) - R_0^{-1}t^2) \tag{7.4}$$

Из условия $n(a^*) = 0$ в пределе при $\varepsilon \to 0$ следует $n_0(a_0^*) = 0$; следовательно,

$$a_0^* = ((\delta_0^* - \overset{0*}{v_3}(O))R_0)^{1/2} \tag{7.5}$$

По формуле (6.21) получаем разложение

$$-\frac{1}{2\pi}P^* = \int_0^{a_0^*} n_0(t)dt + \sqrt{\varepsilon}\left(\int_0^{a_0^*} n_1(t)dt + n_0(a_0^*)a_1^*\right)$$

Поскольку $n_0(a_0^*) = 0$, асимптотика равнодействующей контактного давления отыскивается независимо от решения задачи о вариации площадки контакта, состоящей в определении поправки в разложении (7.3), т.е.

$$P^* = -2\pi\int_0^{a_0^*}(n_0(t) + \sqrt{\varepsilon}n_1(t))dt \tag{7.6}$$

Аналогично предыдущему из формулы (6.23) выводим

$$p^*(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^{a_0^*}\frac{n_0(t) + \sqrt{\varepsilon}n_1(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}dt \tag{7.7}$$

Формула (7.7) определяет внешнее асимптотическое разложение для плотности контактного давления, справедливое на удалении от границы площадки контакта.

Плотность $n_1(t)$ находим, подставляя в интеграл (7.1) вместо $U_\zeta^0(N; \rho)$ сумму выражения $P_0^*(\tilde{C}_\varepsilon + \tilde{A}_0)$ и выражения из фигурных скобок (6.19), взятую с обратным знаком. С этой целью вычисляем входящие в нее слагаемые по плотности $n_0(t)$.

Так, по формуле (6.18) получаем

$$3\pi\beta^{-1}R_0U_\zeta^0(S^1) = 2a_0^{*3}\ln\frac{a_0^* + h_0^*(\rho)}{2R_1} + \frac{1}{3}h_0^{*3}(\rho) + (\rho^2 - 3a_0^{*2})h_0^*(\rho) \tag{7.8}$$

где

$$h_0^*(\rho) = \sqrt{a_0^{*2} - \rho^2}$$

По формуле (6.17) при учете значений $\mathcal{N}'(a_0^*) = 0$ и (7.4) будем иметь

$$3\pi\beta^{-1}R_1R_0U_\zeta^0(S^2) = (2a_0^{*2} + \rho^2)h_0^*(\rho) \tag{7.9}$$

Третья и вторая формулы (6.20) соответственно дают

$$\left.\frac{\rho^2}{2R_1}U_{\zeta,\zeta}(N)\right|_{\zeta=0} = -\frac{\beta}{\pi}\frac{\rho^2}{R_1R_0}h_0^*(\rho), \quad -\frac{3\pi}{2\beta}R_0\rho U_\rho^0(N) = a_0^{*3} - h_0^{*3}(\rho) \tag{7.10}$$

Далее нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_0^{a_0^*} n_1(t)dt = -\pi^{-2}\vartheta^{-1}a_0^*\int_0^1 \frac{u_1(a_0^* t)t}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{7.11}$$

причем согласно соотношениям (6.13), (2.15), (3.10) и (7.8)–(7.10) имеем

$$\frac{3\pi}{2\beta}R_1R_0u_1(\rho) = (1-2\nu)\left(a_0^{*3}\ln\frac{a_0^*+h_0^*(\rho)}{2R_1} - \frac{1}{3}h_0^{*3}(\rho) - a_0^{*2}h_0^*(\rho)\right) +$$

$$+\frac{R_1}{R_2}(a_0^{*3} - h_0^{*3}(\rho)) - h_0^{*3}(\rho) - \frac{2}{\beta}R_1a_0^{*3}(C_\varepsilon + A_0) \tag{7.12}$$

Подставляя выражение (7.12) в формулу (7.11), после выполнения элементарного интегрирования находим (см. формулу (7.6))

$$P^* = P_0^* + \sqrt{\varepsilon}P_1^*, \quad P_0^* = (12\pi)^{-1}\vartheta^{-1}R_0^{-1}a_0^{*3} \tag{7.13}$$

$$P_1^* = P_0^*\frac{\beta a_0^*}{\pi R_1}\left\{(1-2\nu)\left(\ln\frac{2\sqrt{\varepsilon}a_0^*}{R_1} - \frac{19}{12}\right) + \frac{3}{4}\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{\beta}R_1A_0\right\} \tag{7.14}$$

Формулы (7.13), (7.14), (3.10) и (7.5) дают асимптотику равнодействующей контактного давления в зависимости от смещения штампа δ_0. Представляет интерес также и обратная зависимость. С точностью, с которой были получены соотношения (7.13), (7.14), будем иметь

$$\delta_0 - \upsilon_3^0(O) = \left(\frac{3(1-\nu)}{8\mu}\frac{P}{\sqrt{R_0}}\right)^{2/3} +$$

$$+\frac{1-2\nu}{4\pi\mu}\frac{P}{R_1}\left\{(1-2\nu)\left(\frac{1}{3}\ln\frac{\mu R_1^3}{3(1-\nu)R_0P} + \frac{19}{12}\right) - \frac{3}{4}\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{4} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}R_1A_0\right\} \tag{7.15}$$

Характер функциональной зависимости (7.15) согласуется с соответствующим результатом работы [33] (см. формулу (5.18)).

Заметим, что нетрудно выписать в явном виде и внешнее асимптотическое разложение для плотности контактного давления (7.7), где функция $n_1(t)$ определяется через функцию (7.12) по формуле

$$n_1(t) = -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho u_1(\rho)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho \tag{7.16}$$

Приближенное выражение для плотности контактных давлений в замкнутой форме, пригодное на всей площадке контакта, можно получить методом работы [9].

8. Вариация радиуса площадки контакта. Из условия $n(a^*) = 0$ при учете разложений (7.2), (7.3) и равенства $n(a_0^*) = 0$ выводим

$$a_1^* = -\frac{n_1(a_0^*)}{n_0'(a_0^*)} \tag{8.1}$$

где ввиду выражения (7.4)

$$n_0'(a_0^*) = \frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\frac{2a_0^*}{R_0} \tag{8.2}$$

Вычислим значение функции $n(\rho)$ при $\rho = a_0^*$. Осуществим в интеграле (7.16) замену переменной интегрирования по формуле $x = \sqrt{1-\tau^2}$ и продифференцируем по параметру под знаком интеграла (эта операция законна, так как получаемые подынтегральные функции непрерывны на отрезке [0, 1]). В результате будем иметь

$$n_1(a_0^*) = -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\int_0^1 \frac{\tau u_1(a_0^*\tau) + \tau^2 u_1'(a_0^*\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau \tag{8.3}$$

Далее продифференцируем выражение (7.12), упростим результат, а затем подставим $t = a_0^*\tau$. Будем иметь

$$\frac{3}{2\beta}\frac{R_1R_0}{a_0^{*2}}u_1'(a_0^*\tau) = (1-2\nu)\tau((1+x)^{-1}+x) + 3\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)\tau x; \quad x = \sqrt{1-\tau^2} \tag{8.4}$$

Подставляя теперь выражения (7.12) и (8.4) в формулу (8.3) и производя элементарное интегрирование, определяем значение $n_1(a_0^*)$, подстановка которого в формулу (8.1) при учете равенства (8.2) окончательно дает

$$a_1^* = \frac{1-2\nu}{3\pi(1-\nu)}\frac{a_0^{*2}}{R_1}\left\{-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}R_1(C_\varepsilon + A_0) + \right.$$

$$\left. + (1-2\nu)\left(\ln\frac{a_0^*}{2R_1} + 2\ln 2 - \frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2}\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2}\right\} \tag{8.5}$$

Для проверки полученного результата, перейдем в правой части соотношения (8.5) к пределу при $R_1 \to \infty$. В случае плоской границы упругого тела формула (8.5) переходит в следующую:

$$a_1^* = \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\frac{a_0^{*2}}{R_2}\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}A_0R_2\right\} \tag{8.6}$$

Формула (7.3) при учете выражений (8.6) и (7.5), где $R_0 = R_2$, согласуется с формулами (4.11) работы [11] и (6.1) работы [9], полученными другим путем.

Поясним, что в рассмотренном предельном случае не получается в точности соответствующий результат работы [11] для радиуса площадки контакта, поскольку постановка исходной контактной задачи учитывает касательные смещения на поверхности упругого тела в зоне контакта (см. соотношения (1.4)–(1.6)).

9. Заключение. Напомним, что по теории Герца [34] при расчете локальных контактных давлений упругое тело может рассматриваться как упругое полупространство (см., в частности [2], § 4.2). При этом ни форма упругого тела вне области местных возмущений, ни условия его закрепления в расчет не принимаются.

В настоящей работе построена асимптотическая модель, обобщающая теорию Герца в осесимметричном случае, точнее говоря, когда поверхность штампа и поверхность упругого тела в окрестности пятна контакта аппроксимируются параболоидами вращения. Предлагаемая асимптотическая модель включает в себя коэффициент локальной податливости A_0, представляющий собой интегральную характеристику геометрии упругого тела и условий его закрепления.

Подчеркнем, что обобщение теории Герца, принимающее в расчет ограниченность упругого тела, потребовало уточненной формулировки условий контакта, поскольку соответствующие поправки оказываются одного порядка.

Результаты работы докладывались на V Российской конференции "Смешанные задачи механики деформируемого тела" (Саратов, август 2005 г.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (МД-182.2003.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А.С.* К задаче Герца для линейно и нелинейно упругих тел конечных размеров // ДАН СССР. 1976. Т. 230. № 2. С. 308–310.
2. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985 = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
3. *Штаерман И.Я.* Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 3. С. 409–418.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
5. *Mow V.C., Chow P.L., Long F.F.* Microslips between contacting paraboloids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. № 2. P. 321–328.
6. *Королев А.А.* Упругий контакт гладких тел сложной формы // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 59–71.
7. *Кравчук А.С.* Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 283–288.
8. *Rabinovich V.L., Sipcic S.R., Sarin V.K.* Three-dimensional unilateral frictionless contact problem for finite bodies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. № 1. P. 54–59.
9. *Аргатов И.И.* Приближенное решение осесимметричной контактной задачи с учетом касательных смещений на поверхности контакта // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 1. С. 143–150.
10. *Галанов Б.А., Кривонос Ю.М.* Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1984. Вып. 53. С. 87–94.
11. *Аргатов И.И.* Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 671–679.
12. *Бондарева В.Ф.* Контактные задачи для упругого шара // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 61–70.
13. *Карпенко В.А.* Осесимметричное вдавливание двух штампов в упругий шар // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 763–766.
14. *Александров В.М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 934–943.
15. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
16. *Van Dyke M.D.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1964 = *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
17. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
18. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.
19. *Аргатов И.И.* Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.

20. *Nowacki W.* Teoria Sprężystości. Warszawa: PWN, 1970 = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев.: Вища шк., 1989. 352 с.
22. *Баничук Н.В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
23. *Movchan A.B., Nazarov S.A., Polyakova O. R.* The quasistatic growth of a semi-infinite crack in a plane containing small defects // C. r. Acad. Sci. Paris. Sér. 2. 1991 V. 313. № 11. P. 1223–1228.
24. *Sternberg E., Rosenthal F.* The elastic sphere under concentrated loads // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 413–421.
25. *Аргатов И.И.* О характеристиках локальной податливости упругого тела под действием на плоский участок его границы малого штампа // ПМТФ. 22. Т. 43. № 1. С. 177–185.
26. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927 = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
27. *Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10. № 4. С. 3–91.
28. *Аргатов И.И.* Асимптотическое решение контактной задачи для трехмерного упругого тела конечных размеров // ПММ, 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1001–1007.
29. *Ростовцев Н.А.* Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 5. С. 611–614.
30. *Ростовцев Н.А.* Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане // ПММ, 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 77–82.
31. *Green A.E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1954. 442 p.
32. *Hills D.A., Nowell D., Sackfield A.* Mechanics of Elastic Contact. Oxford: Butterworth-Heinemann. 1993. 240 p.
33. *Аргатов И.И.* Приближенное решение осесимметричной контактной задачи для упругого шара // ПММ. 25. Т. 69. Вып. 2. С. 33–314.
34. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // J. für die reine und angew. Math. 1882. Bd. 92. S. 156–171.

Санкт-Петербург
e-mail: argatov@home.ru

Поступила в редакцию
19.IX.2005