

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. Е. И. Свешникова

**УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

В несжимаемой упругой среде, обладающей кубической симметрией, рассмотрены ударные волны небольшой интенсивности, распространяющиеся вдоль главной диагонали куба. Найден вид ударной адиабаты на фазовой плоскости сдвиговых деформаций. Указаны на ней отрезки, отвечающие убыванию энтропии на скачке и условиям эволюционности разрыва. Исследована структура ударных волн.

Рассматриваются плоские одномерные волны в слабонелинейной упругой среде. Главный интерес представляет влияние на этот процесс анизотропии среды в плоскости фронта волны (волновая анизотропия) и ее взаимодействие с эффектами нелинейности.

Нелинейную упругую среду в области не слишком больших деформаций будем задавать упругим потенциалом (внутренней энергией единицы объема) в виде разложения в ряд по деформациям, ограничиваясь первыми, главными членами, определяющими нелинейность. В общем случае волновая анизотропия проявляется уже в квадратичных членах разложения, а изотропная нелинейность – в членах четвертого порядка. Чтобы влияние анизотропии и нелинейности на распространение волн имело одинаковую величину, ранее [1–3] принималось условие малости коэффициента при анизотропном слагаемом в разложении упругого потенциала по компонентам деформации. При этом само разложение велось до четвертых степеней.

Цель данной работы – рассмотрение нелинейных волн в такой среде, когда квадратичные по деформации члены, представляющие анизотропию, в разложении упругого потенциала отсутствуют и главными членами анизотропного характера являются кубические. Они же одновременно выражают и нелинейность среды. Таким свойством обладает упругая среда с тригональной симметрией, обладающая инвариантностью свойств относительно поворота на угол  $120^\circ$  около некоторой оси. Пример такой ситуации – распространение поперечных волн в упругой среде, обладающей симметрией кубического кристалла, когда направление распространения волны совпадает с главной диагональю куба.

**1. Постановка задачи. Упругий потенциал среды.** Рассмотрим плоские нелинейные волны, распространяющиеся в однородной безграничной несжимаемой упругой среде, обладающей кубической симметрией, вдоль главной диагонали куба. Предварительные деформации в среде предполагаются отсутствующими. Рассмотрение ведется в лагранжевых переменных в декартовой системе координат начального состояния. Направление распространения волн принято за ось  $x_3 = x$ , оси  $x_1, x_2$  лежат в плоскости фронта. Деформация характеризуется компонентами  $dw_j/dx_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) градиентов вектора перемещения  $\mathbf{w}$ , из которых в плоских волнах, распространяющихся вдоль оси  $x$ , переменными являются  $dw_i/dx = u_i(x, t)$ , остальные  $dw_j/dx_\alpha = \text{const} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Вследствие предположения о несжимаемости среды в одномерных волнах отсутствует изменение продольной компоненты деформации, т.е.  $u_3 = \text{const}$  и можно считать  $u_3 = 0$ .

Для среды с кубической симметрией представление упругого потенциала разложением в ряд по компонентам деформации  $\varepsilon_{ij}$  вплоть до третьих степеней имеется, например, в [4]. При использовании вместо  $\varepsilon_{ij}$  компонент градиентов перемещения  $u_i$  для волн, распространяющихся вдоль главной диагонали куба, упругий потенциал несжимаемой среды следует принять в виде [5]

$$\Phi(u_i, S) = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + g\left(u_1u_2 - \frac{1}{3}u_1^3\right) + \rho_0T_0(S - S_0) \quad (1.1)$$

Заметим, что предположение о несжимаемости принято здесь исключительно для простоты изложения. Было показано [5], что для среды указанного типа изменение  $u_3$  может быть выражено через изменение  $u_1, u_2$ . Аналогично это делается и для  $[u_3]$ . В результате упругий потенциал может быть представлен как функция только двух компонент  $u_1, u_2$  и может трактоваться как упругая энергия некоторой эквивалентной несжимаемой среды.

Здесь  $f$  и  $g$  – упругие постоянные среды. Очевидно, что при очень малых деформациях (линейное приближение) коэффициент  $f$  совпадает с модулем сдвига. Коэффициент  $g$  служит параметром анизотропии и одновременно нелинейности. Он имеет тот же порядок величины, что и  $f$ , и соответствующим выбором нумерации осей  $u_i$  коэффициент  $g$  может быть сделан положительным.  $T_0$  – температура в начальном состоянии,  $S - S_0$  – энтропия единицы массы. Слагаемое с изменением энтропии  $S - S_0$  следует учитывать при изучении ударных волн (УВ) для определения направления изменения величин. При этом в разложении (1.1) достаточно ограничиться первыми степенями изменения энтропии  $S - S_0$ , так как из общей теории УВ известно, что на разрыве изменение энтропии не менее, чем на два порядка меньше изменения деформаций. Подтверждение правильности этому предположению получено ниже прямым вычислением  $S - S_0$ , которое оказалось третьего порядка малости по  $u_i$ , а потому перекрестный член энтропия–деформация на порядок меньше учитываемых в постановке задачи и в разложении отсутствует.

Без потери общности далее можно принять  $\rho_0 = 1$ . Это предположение равносильно тому, что всюду далее вместо упругого потенциала (1.1) используется функция  $\Phi/\rho_0$ .

Как видно из формулы (1.1), функция  $\Phi(u_i, S)$ , задающая упругий потенциал, сохраняет свой вид при изменении осей координат на плоскости  $(u_1, u_2)$ , а именно при замене  $u_2$  на  $-u_2$  (зеркальное отражение относительно оси  $u_1$ ) и при повороте осей как целого на угол  $2\pi/3$ . Наличие такой симметрии окажется полезным при исследовании УВ.

**2. Условия на разрыве. Ударная адиабата.** Непрерывные одномерные движения несжимаемой упругой среды в лагранжевых переменных описываются системой гиперболических уравнений [1]

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.1)$$

где  $v_\alpha = \partial w_\alpha / \partial t$  – компоненты скорости,  $u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x$  – компоненты сдвиговых деформаций. На разрыве этим уравнениям соответствуют условия, выражающие законы сохранения

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right] = W^2 [u_\alpha] \quad (2.2)$$

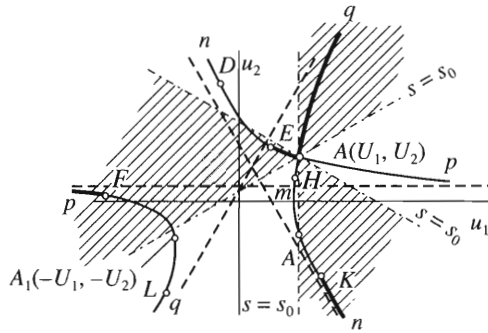
Квадратными скобками обозначены величины скачков соответствующих величин:  $[a] = a^+ - a^-$ , где  $a^+$  и  $a^-$  значения параметра  $a$  соответственно за разрывом и перед ним,  $W$  – лагранжева скорость фронта разрыва. Уравнение энергии на разрыве

$$[\Phi] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right] [u_\alpha] + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right)^- [u_\alpha] \quad (2.3)$$

служит для вычисления изменения энтропии  $S - S^-$  в УВ. Для значений параметров состояния перед разрывом в дальнейшем приняты обозначения  $u_1^- = U_1$ ,  $u_2^- = U_2$ ,  $S^- = S_0$ , а параметры за разрывом не будут снабжаться верхним индексом плюс.

В среде с упругим потенциалом (1.1) условия на разрыве (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} (W^2 - f)(u_1 - U_1) &= g(u_2^2 - u_1^2 + U_1^2 - U_2^2) \\ (W^2 - f)(u_2 - U_2) &= 2g(u_1 u_2 - U_1 U_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Исключая из этой системы  $W$ , находим связь между заданным фиксированным состоянием  $(u_1 = U_1, u_2 = U_2)$  перед разрывом и возможными, удовлетворяющими законам сохранения состояниями за ним. Полученное таким образом множество является ударной адиабатой и определяется уравнением

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u_1, u_2, U_1, U_2) &\equiv \\ &\equiv (u_1^2 - u_2^2 - U_1^2 + U_2^2)(u_2 - U_2) + 2(u_1 u_2 - U_1 U_2)(u_1 - U_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) не содержит упругих постоянных среды и зависит только от начального состояния  $U_1, U_2$  деформаций сдвига перед разрывом.

При заданных  $U_1$  и  $U_2$  уравнению ударной адиабаты (2.5) на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  удовлетворяют точки трех ветвей кривой, изображенной на фиг. 1, проходящей через точку  $A$  с координатами  $u_1 = U_1, u_2 = U_2$ , представляющую начальное состояние, и две симметричные ей точки относительно оси  $u_1$  (точка  $A'(U_1, -U_2)$ ) и относительно начала координат (точка  $A_1(-U_1, -U_2)$ ). Вследствие указанной выше в разд.1 симметрии функции  $\Phi(u_i)$  относительно поворота осей координат на угол  $2\pi/3$  и зеркального отражения относительно оси  $u_1$  достаточно рассмотреть только такую ситуацию, когда точка  $A(U_1, U_2)$  начального состояния расположена на плоскости  $(u_1, u_2)$  в первой четверти внутри угла  $\pi/3$ . Поэтому всюду далее считаем  $0 < U_2 < \sqrt{3} U_1$ .

В УВ бесконечно малой интенсивности изменение параметров совпадает с их изменением в волнах Римана, т.е. отрезки ударной адиабаты в окрестности начальной точки совпадают с элементами интегральных кривых волн Римана, которые для системы уравнений (2.1) получены ранее [5], причем были найдены выражения для характеристических скоростей

$$c_{1,2}^2 = f \mp 2g \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad c_1 < c_2 \quad (2.6)$$

соответствующие медленным ( $c_1$ ) и быстрым ( $c_2$ ) волнам Римана. Верхний знак в формуле (2.6) и далее соответствует медленным волнам, нижний – быстрым. Интегральные кривые двух семейств волн Римана определены уравнением

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1 \mp \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{u_2}$$

В начальной точке  $A$  две взаимно ортогональные касательные к интегральным кривым волн Римана определяют направление касательных к двум ветвям ударной адиабаты в начальной точке

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{U_1 \mp \sqrt{U_1^2 + U_2^2}}{U_2} \quad (2.7)$$

Таким образом, ударная адиабата имеет в начальной точке самопересечение, что трудно увидеть и непосредственно из ее уравнения (2.5).

Кривая (2.5) имеет три асимптоты

$$u_2 = \frac{1}{3}U_2, \quad u_2 = \pm\sqrt{3}u_1 + \frac{1}{3}(U_2 \mp U_1)$$

Первая из них лежит выше оси  $u_1$  и параллельна ей, а обе других проходят под углом  $\pm\pi/3$  левее начальной точки  $A$ . На фиг. 1 асимптоты изображены штриховыми линиями. Две точки пересечения кривой (2.5) с осью  $u_1$  расположены так, что для одной из них  $0 < u_1 < U_1$ , а для другой  $u_1 < -2U_1$ .

Таким образом, ударная адиабата  $\mathcal{H} = 0$  на плоскости  $(u_1, u_2)$  (фиг. 1) состоит из трех ветвей, уходящих в бесконечность вдоль асимптот, две из них  $qAn$  и  $nAp$  проходят через начальную точку  $A$ , пересекаясь под прямым углом, третья,  $qA_1p$ , проходит через точку  $A_1(-U_1, -U_2)$ , симметричную с начальной, и целиком лежит в области отрицательных  $u_1$ .

**3. Условие неубывания энтропии на разрыве.** Кроме законов сохранения, следствием которых является уравнение (2.5), разрывные решения должны удовлетворять требованию неубывания энтропии  $[S] = S - S_0 \geq 0$ . Изменение энтропии вычисляется с помощью уравнения (2.3) с использованием конкретного вида (1.1) упругого потенциала  $\Phi$ . Имеем

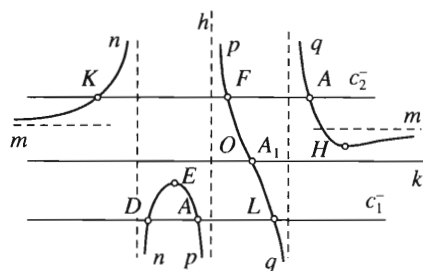
$$2T[S] = g(u_1 - U_1) \left( (u_2 - U_2)^2 - \frac{1}{3}(u_1 - U_1)^2 \right) \geq 0 \quad (3.1)$$

Скачок энтропии  $[S]$  меняет знак на трех прямых, проходящих через начальную точку, каждая из которых имеет одну точку пересечения с одной из ветвей ударной адиабаты. Прямые, на которых  $[S] = 0$  на фиг. 1 изображены штрихпунктиром, а области, где  $[S] \geq 0$  заштрихованы. Реализуемыми могут быть только скачки, представленные отрезками ударной адиабаты, попавшими в заштрихованные области.

**4. Условия эволюционности разрывов.** Одновременно с требованием неубывания энтропии УВ должны удовлетворять условиям эволюционности (необходимым условиям устойчивости разрыва по отношению к одномерным возмущениям). Эти условия состоят в определенных соотношениях [2] между скоростью разрыва  $W$  и характеристическими скоростями  $c_\alpha$ , заданными формулами (2.6). Две группы неравенств эволюционности определяют два типа УВ

$$\begin{aligned} \text{а) } c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad W \leq c_1^+ - \text{ медленные УВ} \\ \text{б) } c_2^- \leq W, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+ - \text{ быстрые УВ} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $c_\alpha^-$ ,  $c_\alpha^+$  – характеристические скорости соответственно перед разрывом и за ним,  $\alpha = 1, 2$ ,  $c_1 < c_2$ . Для выделения на ударной адиабате эволюционных отрезков, удовлетворяющих условиям (4.1), надо указать положение на ней точек Жуге, т.е. точек, в которых скорость разрыва  $W$  совпадает с одной из характеристических скоростей  $c_\alpha^-$  или  $c_\alpha^+$ . Для этого найдем скорость разрыва  $W$  как функцию точек на кривой (2.5).



Фиг. 2

Из соотношений на разрыве (2.4) находим

$$W^2 = f + \frac{g}{\rho^2} \mathcal{H}(u_1, u_2, U_1, U_2); \quad \rho^2 = (u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2 \tag{4.2}$$

Сюда надо подставить зависимость между  $u_1$  и  $u_2$  из уравнения ударной адиабаты (2.5). Эту операцию проще выполнить в полярных координатах  $\rho, \varphi$  с началом в точке  $A$  и отсчетом углов  $\varphi$  от направления, параллельного оси  $u_1$ . В такой системе

$$u_1 - U_1 = \rho \cos \varphi, \quad u_2 - U_2 = \rho \sin \varphi$$

В полярных координатах уравнение ударной адиабаты примет вид

$$\rho = 2 \frac{U_1 k + U_2(1 - k^2)}{(k^2 - 3) \sin \varphi}, \quad k = \operatorname{tg} \varphi \tag{4.3}$$

После подстановки выражения (4.3) в формулу (4.2) получим величину квадрата скорости разрыва как функцию параметра  $k = \operatorname{tg} \varphi$ , монотонно меняющегося вдоль ударной адиабаты,  $-\infty \leq k \leq \infty$ . При отыскании точек Жуге (где  $W = c_{\alpha}^{\pm}$ ) вместо величины  $W^2$  будем использовать вспомогательную функцию

$$h(k) = \frac{1}{2g}(W^2 - f) = \frac{(U_1 k - U_2)(k^2 + 1)}{k(k^2 - 3)} \tag{4.4}$$

и вместо характеристических скоростей (2.6) – соответствующие выражения

$$\frac{1}{2g}(c_{1,2}^2 - f) = \mp \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

График функции  $h(k)$  (фиг. 2) имеет три вертикальные асимптоты, проходящие через точки  $k = 0, k = \pm \sqrt{3}$ , которые соответствуют трем асимптотам ударной адиабаты на плоскости  $(u_1, u_2)$  фиг. 1. На каждой из асимптот функция  $h$ , проходя через  $\infty$ , меняет знак. Она меняет знак также в единственной точке пересечения графика с осью  $k$  в точке  $k = U_2/U_1$ , которой на ударной адиабате соответствует точка  $A_1$ . Напомним, что вследствие симметрии для начального состояния достаточно рассмотреть точки, у которых  $0 < U_2 < \sqrt{3} U_1$ . При этом точка  $A_1$  на фиг. 2 будет расположена в области  $0 < k(A_1) < \sqrt{3}$  между двумя правыми асимптотами.

При  $k \rightarrow \pm\infty$  кривая  $h(k)$  выходит на горизонтальную асимптоту  $mn$ , на которой  $h = U_1 > 0$ . Следовательно,  $h(k) > 0$  в областях  $|k| > \sqrt{3}$ . Вдоль асимптот  $h \rightarrow +\infty$  при  $|k| \rightarrow \sqrt{3} + \varepsilon$  и  $h \rightarrow -\infty$  при  $|k| \rightarrow \sqrt{3} - \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – малая положительная величина). Перемена знака  $h$  в точке  $A_1$  указывает на то, что  $h \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow 0 + \varepsilon$  и  $h \rightarrow -\infty$  при  $k \rightarrow 0 - \varepsilon$ .

Получившиеся на фиг. 2 ветви функции  $h(k)$  соответствуют ветвям ударной адиабаты на фиг. 1, и их концы на этих фигурах помечены одинаковыми буквами. Концы кривой  $h(k)$ , уходящие в  $\infty$  вдоль горизонтальной асимптоты  $mn$ , соответствуют точке  $m$  с вертикальной касательной на ветви  $qn$  фиг. 1.

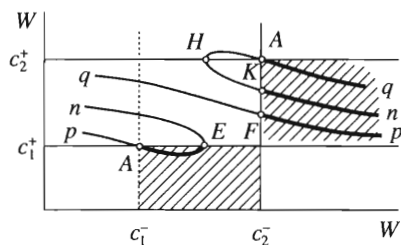
Горизонтальную асимптоту  $h = U_1$  график  $h(k)$  пересекает два раза – в точке  $0 < k < U_2/U_1$  (что не представляет интереса) и в области  $k > \sqrt{3}$ . Это означает, что при  $k \rightarrow -\infty$  кривая  $h(k)$  приближается к горизонтальной асимптоте сверху, а при  $k \rightarrow +\infty$  – снизу, имея, следовательно, точку минимума  $H$ . Исследование показывает, что функция  $h(k)$  имеет еще один экстремум, он находится в области отрицательных  $k$  и служит максимумом в точке  $E$  на ветви  $np$ .

Начальному состоянию  $A(U_1, U_2)$  на графике  $h(k)$  соответствуют две точки, которые представляют скорости двух бесконечно слабых скачков, совпадающие с медленной и быстрой характеристическими скоростями (2.6). На фиг. 2 это точки пересечения кривой  $h(k)$  с прямыми  $h = \mp \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$ , проходящими соответственно ниже точки  $E$  и выше точки  $H$  – экстремумов функции  $h(k)$  (и одновременно функции  $W$ ).

Таких точек несколько, надо указать какие из этих точек Жуге  $W = c_\alpha^-$  соответствуют начальному состоянию  $A$ . Пересечение с ветвью  $pq$  сразу исключаем – эта ветвь ударной адиабаты через точку  $A$  не проходит. Далее воспользуемся тем, что в окрестности начальной точки элементы ударной адиабаты совпадают с участками интегральных кривых волн Римана. Для быстрой волны Римана (нижний знак в формуле (2.7)) должно быть  $k(A) > \sqrt{3}$ , для медленной  $k(A) < 0$ . На ветви  $np$  имеются две точки, где  $W = c_1^-$ , и точка  $E$  максимума между ними. Изменение  $W$  в УВ, начиная от точки  $A$ , должно идти в том направлении, которое соответствует опрокидывающимся волнам Римана. Согласно полученным ранее результатам [5] для медленных волн это направление убывания  $k$ . Это значит, что начальной должна быть правая из рассматриваемых точек, для которой  $k > k(E)$ . Остальные точки пересечения рассматриваемых горизонталей на фиг. 2 с графиком  $h$  служат точками Жуге, где  $W = c_{1,2}^-$ .

Известно [6], что точки Жуге по состоянию за разрывом ( $W = c_{1,2}^+$ ) совпадают с точками экстремума функции  $W(k)$  на ударной адиабате, или, что то же самое в рассматриваемом случае, функции  $h$ . Положение этих точек уже найдено: точка  $E$  лежит на участке  $An$  ветви  $pAn$ , точка  $H$  – на участке  $Amm$  ветви  $qAn$  (фиг. 1).

Для указания положения эволюционных участков на ударной адиабате воспользуемся диаграммой эволюционности (фиг. 3), где на взаимно ортогональных осях  $W$  отложим величины характеристических скоростей перед разрывом  $c_{1,2}^-$  и за разрывом  $c_{1,2}^+$ . Значения скорости  $W$ , попавшие в заштрихованные квадраты на такой диаграмме, удовлетворяют условиям эволюционности (4.1). В нижнем квадрате выполнены одновременно неравенства (4.1) в случае  $a$ , что соответствует медленным УВ, в верхнем – неравенства (4.1) в случае  $b$ , что соответствует быстрым УВ. На пересечении сетки точки  $(c_1^-, c_1^+)$  и  $(c_2^-, c_2^+)$  изображают начальное состояние  $A$ .



Фиг. 3

На диаграмму фиг. 3 нанесем схематично график скорости  $W$  вдоль ударной адиабаты в соответствии с фиг. 2. Эту кривую можно рассматривать также как след ударной адиабаты на диаграмме. Точки Жуге, где  $W = c_{1,2}^-$ , лежат на пересечении с вертикальными прямыми, в точках Жуге, где  $W = c_{1,2}^+$ , кривая пересекает горизонтальные линии под прямым углом, имея в этих точках экстремумы. Из диаграммы видно, что  $W = c_1^+$  в точке  $E$  и  $W = c_{1,2}^+$  в точке  $H$ . Таким образом, на ударной адиабате имеется один эволюционный отрезок  $AE$  медленных УВ и три эволюционных участка  $Aq, Kn, Fp$  быстрых УВ. На диаграмме фиг. 3 и на ударной адиабате эволюционные участки выделены жирной линией и помечены одинаковыми буквами. Оказалось, что все эволюционные участки попали в области, где выполнено требование неубывания энтропии на разрыве (3.1). Таким образом, условия эволюционности оказались более сильными, чем требование неубывания энтропии.

Легко увидеть, как изменится результат, если коэффициент  $g$  в разложении упругого потенциала поменяет знак на отрицательный. Кривая, изображающая на плоскости  $(u_1, u_2)$  на фиг. 1 ударную адиабату, останется прежней, так как ее уравнение (2.5) не содержит  $g$ . При  $g < 0$  областями, где  $[S] \geq 0$ , на плоскости  $(u_1, u_2)$  станут те, которые на фиг. 1 не заштрихованы. Поменяются ролями формулы для быстрых и медленных характеристических скоростей, а следовательно, тип точек Жуге, но не их положение на ударной адиабате. В результате эволюционными и одновременно удовлетворяющими требованию  $[S] \geq 0$  будут отрезки  $AH$  на ветви  $Ann$  для медленных УВ и три участка  $Ap, Dn, Lq$  для УВ.

**5. Структура разрывов.** Заметим, что условия эволюционности (4.1) базируются на том, что условия на разрыве состоят только из законов сохранения. Такая эволюционность называется априорной [2]. Однако на разрыве могут появиться и другие дополнительные условия, которые изменят всю картину расположения эволюционных участков на ударной адиабате. Возможность появления таких дополнительных условий может быть выяснена только при исследовании структуры разрыва. Появление разрывных решений обусловлено гиперболичностью системы уравнений теории упругости. Для исследования структуры эта модель дополняется диссипативными свойствами. В данной работе в качестве механизма диссипации взята вязкость и для описания структуры принята модель вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта. В узкой переходной зоне, заменяющей разрыв, действуют уравнения, полученные из системы (2.1) добавлением вязких членов, представленных вторыми производными от скорости [7]

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.1}$$

Коэффициент вязкости  $\nu$  принимается скалярным и постоянным. Граничными условиями для этой системы при  $x \rightarrow \pm\infty$  служат значения функций  $v_\alpha^\pm, u_\alpha^\pm$  по разные стороны от фронта разрыва. При  $\nu \rightarrow 0$  система (5.1) переходит в систему уравнений теории упругости, а непрерывное решение, если оно есть, превращается в скачок.

Стационарной структурой разрыва называют решение системы (5.1) в виде бегущей волны, у которой скорость совпадает со скоростью исследуемого разрыва  $W$

$$u_\alpha = u_\alpha(\xi), \quad v_\alpha = v_\alpha(\xi), \quad \xi = Wt - x$$

При  $\xi \rightarrow \pm\infty$  это решение должно выходить на постоянные значения функций перед и за разрывом. В новых переменных, т.е. в системе координат, движущейся со скоростью  $W$ , уравнения (5.1) становятся обыкновенными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$W \frac{dv_\alpha}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} + \frac{d}{d\xi} \nu \frac{dv_\alpha}{d\xi}, \quad \frac{dv_\alpha}{d\xi} = -W \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi}, \quad \alpha = 1, 2$$

Используя вторую группу уравнений, можно исключить из системы  $v_\alpha$ , и получившиеся для функций  $u_\alpha$  уравнения второго порядка один раз проинтегрировать по  $\xi$ . Получим

$$\nu W \frac{du_\alpha}{d\xi} = W^2 u_\alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} + A_\alpha$$

Здесь  $A_\alpha$  – постоянные интегрирования, которые вычисляются по известным значениям функций  $u_\alpha$  перед разрывом, где решение должно выходить на постоянные  $u_\alpha = U_\alpha$  и  $du_\alpha/d\xi = 0$ .

Для рассматриваемой среды с упругим потенциалом  $\Phi$ , заданным формулой (1.1), последнюю систему запишем с использованием введенного выше в разд. 4 обозначения

$$(W^2 - f)/(2g) = h$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  находим по значениям  $u_\alpha$  и их производных перед разрывом. Получим

$$\frac{\nu W du_1}{g d\xi} = 2hu_1 + u_1^2 - u_2^2 + A_1 \equiv L(u_1, u_2)$$

$$\frac{\nu W du_2}{h d\xi} = 2hu_2 - 2u_1 u_2 + A_2 \equiv M(u_1, u_2) \quad (5.2)$$

$$A_1 = -2hU_1 - U_1^2 + U_2^2, \quad A_2 = 2hU_2 + 2U_1 U_2$$

Структура разрыва, движущегося с заданной скоростью  $W$ , существует, если на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  найдутся интегральные кривые (ИК) системы уравнений (5.2), соединяющие состояние перед разрывом  $(U_1, U_2)$  с состоянием за фронтом  $(u_1^*, u_2^*)$ . При этом эволюция решения должна происходить так, чтобы с ростом  $\xi$  (т.е. времени) движение вдоль ИК происходило от начального состояния перед фронтом к состоянию за ним.

Состояния перед и за разрывом, где  $du_\alpha/d\xi = 0$ , для системы (5.2) являются стационарными (особыми) точками. На плоскости  $(u_1, u_2)$  эти точки лежат на пересечении линий  $L(u_1, u_2) = 0$  и  $M(u_1, u_2) = 0$ . Одна из точек пересечения соответствует состоянию перед разрывом, остальные – возможным состояниям за фронтом скачка. Эти точки лежат на

ударной адиабате (фиг. 1). Вид кривых  $L = 0$  и  $M = 0$ , количество точек пересечения и их расположение на плоскости  $(u_1, u_2)$  зависят как от параметра от величины  $h$ , т.е. от скорости скачка  $W$ . График изменения величины  $h$  вдоль ударной адиабаты представлен на фиг. 2. Из него видно, что в зависимости от выбранного значения  $h$  на ударной адиабате может быть от одной до трех состояний за разрывом. Поэтому при исследовании всю область изменения  $h$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  целесообразно разделить на участки в соответствии с прохождением  $W$  через точки Жуге.

Уравнение  $L(u_1, u_2) = 0$  можно записать в виде

$$u_2^2 = (u_1 + h)^2 - (U_1 + h)^2 + U_2^2$$

На плоскости  $(u_1, u_2)$  это гиперболы с асимптотами, проходящими через точку  $(-h, 0)$  под углом  $\pm\pi/4$  к оси абсцисс. Расположение ветвей между асимптотами зависит от величины  $h$ .

Уравнение  $M(u_1, u_2) = 0$  тоже дает гиперболы

$$u_2 = U_2(U_1 - h)/(u_1 - h)$$

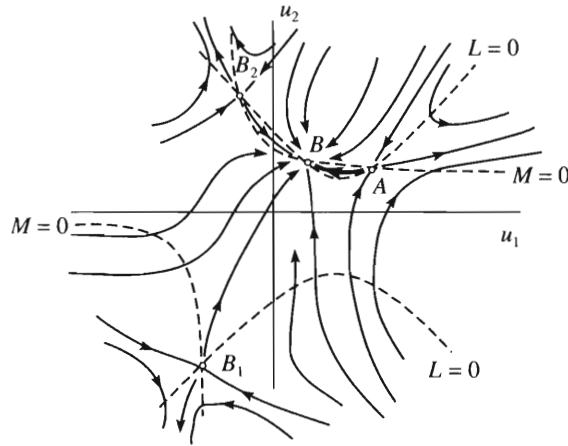
с асимптотами, проходящими через точку  $(h, 0)$  параллельно осям координат.

Для всех стационарных точек определены их типы и поведение ИК в окрестности каждой из этих особых точек, указано направление изменения величин  $u_1, u_2$  вдоль ИК с ростом времени (ростом  $\xi$ ). Для существования структуры должна найтись ИК уравнений (5.2), которая выходила бы из стационарной точки, представляющей состояние перед скачком, и с ростом времени вошла бы в другую стационарную точку. Поэтому ясно, что для этого начальная особая точка должна обладать ИК, выходящими из нее.

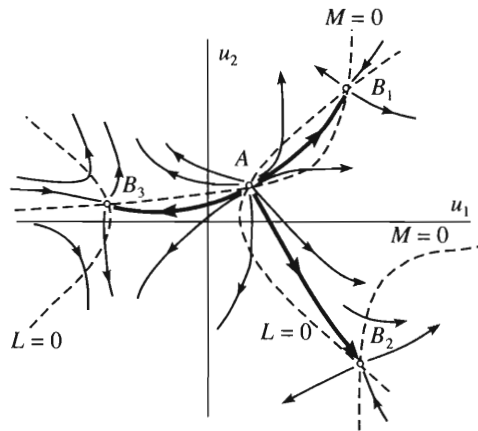
Поле ИК между особыми точками качественно можно описать с помощью изоклин. Из уравнений (5.2) видно, что линии  $L(u_1, u_2) = 0$ , на которых  $du_1/d\xi = 0$ , ИК пересекают с вертикальной касательной, а линии  $M(u_1, u_2) = 0$ , на которых  $du_2/d\xi = 0$ , пересекают с горизонтальной касательной. При этом в точках пересечения ИК имеют экстремумы, что помогает определять направление изменения величины  $u_\alpha$  вдоль ИК с ростом времени. Указанная процедура построения поля ИК проделана для всех значений параметра  $h$ .

Когда  $W < c_1^-$  на фиг. 3 (т.е.  $h < h_A < 0$  на фиг. 2), имеется четыре точки пересечения кривых  $L = 0$  и  $M = 0$ . Из них точка  $A$ , соответствующая состоянию перед скачком – узел с входящими направлениями, а потому в этом случае структура построена быть не может. Другие три стационарные точки соответствуют состояниям за разрывом на ударной адиабате, расположенным на ветвях  $Dn, Ap, Lq$  (фиг. 1–3). Ударные переходы в эти состояния структурой не обладают.

При  $c_1^- < W < c_1^+$  на фиг. 3 (или при  $h_A < h < h_E$  на фиг. 2) состояние перед фронтом представлено особой точкой типа седла. Одна из выходящих из точки  $A$  сепаратрис идет в другую особую точку  $B$  на ветви  $AE$  ударной адиабаты. Точка  $B$  – узел с входящими направлениями. Эти эволюционные разрывы имеют также и структуру. Схема расположения стационарных точек, изоклин и ИК для этого случая представлена на фиг. 4. Изоклины изображены штриховыми линиями, ИК – сплошными линиями. Стрелками указаны направления изменения функций  $u_\alpha$  с ростом времени. ИК, представляющая структуру, изображена жирной линией. Две другие стационарные точки  $B_2$  на отрезке  $DE$  ударной адиабаты и точка  $B_3$  на отрезке  $LA_1$  имеют тип седла. Но, как видно из фиг. 4, войти в эти точки сепаратриса из начального состояния не может. Поэтому структура ударных переходов на указанные отрезки ударной адиабаты отсутствует.



Фиг. 4



Фиг. 5

Для  $c_1^+ < W < c_2^+$  (участок на ветви  $LF$  ударной адиабаты на фиг. 1 и 2b) и для  $c_2^+ < W < c_2^-$  (отрезки  $AH$  и  $NK$  ударной адиабаты и участок ветви  $LF$ ) начальная точка представлена седлом, другие особые точки – либо узел с выходящими траекториями (для отрезка  $AH$ ), что исключает возможность построения структуры, либо это точки типа седла, в которые сепаратрисы начальной точки войти не могут. Эти ударные переходы структуры иметь не могут.

Для  $W > c_2^-$  начальная точка  $A$  – узел с выходящими направлениями. Три стационарные точки, представляющие состояния за скачком – седла. Одна из входящих сепаратрис для каждой из этих трех точек приходит из начальной точки  $A$ . Ударные переходы в состоянии на эволюционных ветвях  $Aq$ ,  $Kn$ ,  $Fp$  ударной адиабаты (фиг. 1) все обладают структурой. Схема расположения ИК для этого случая приведена на фиг. 5.

Таким образом показано, что все эволюционные ударные волны обладают стационарной структурой. В то же время никакие из априорно неэволюционных разрывов не имеют структуры.

Автор благодарит А.Г. Куликовского за внимание и обсуждения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00219, 05-01-00375) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4710.2006.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bland D.R.* Nonlinear Dinamic Elasticity. Toronto etc.: Waltham, 1969. = *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840.
4. *Domanski W.* Asymptotic equations for weakly nonlinear elastic waves in a cubic crystal // Intern. Ser. Numer. Math. 1999. V. 129. P. 233–241.
5. *Свешникова Е.И.* Волны Римана в упругой среде с малой кубической анизотропией // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 75–83.
6. *Куликовский А.Г.* О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 184–186.
7. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* О структуре квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 926–932.

Москва  
e-mail: sveshn@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию  
1.11.2005