УДК 539.3

© 2006 г. Г. Я. Попов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО СОСТАВНОГО КОНУСА ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕНТРА ВРАЩЕНИЯ У ОСТРИЯ КОНУСА

В сферической системе координат исследуется задача о кручении упругого составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса. Составной конус представляет собой конус с одним модулем сдвига, вставленный в коническую воронку с другим модулем сдвига, и между поверхностью конуса и внутренней поверхностью конической воронки осуществлен идеальный механический контакт. Сначала рассматривается вспомогательная задача об указанном конусе со срезанным острием по сферической поверхности. Внешняя поверхность такого конического тела не загружена, а на его сферической поверхности приложена нагрузка, которая приводится к крутящему моменту. Вспомогательная задача приводится к одномерной разрывной краевой задаче с помощью специально построенного интегрального преобразования. Построено точное решение этой краевой задачи. Затем осуществляется предельный переход в полученном решении, когда радиус сферической поверхности устремляется к нулю, с целью получения точного решения задачи кручения составного конуса с острием при наличии центра вращения у острия.

Для случая однородного конуса было показано [1], что наличие центра вращения у острия не вызывает концентрацию напряжений по внутренним разрезам вдоль конических поверхностей. Согласно полученным ниже результатам эта ситуация сохраняется и в случае составного конуса, но она не имеет места, если острие конуса удалено и на сферическом срезе приложены касательные напряжения, эквивалентные крутящему моменту.

1. Постановка задачи. Составной конус в сферической системе координат r, θ, φ занимает область $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \omega$, $-\pi \le \varphi < \pi$, причем на внутренней конической поверхности $\theta = \omega_0 < \omega$ скачкообразно меняет значение модуль сдвига G, т.е.

$$G = \begin{cases} G_0, & 0 \le \theta \le \omega_0 \\ G_1, & \omega_0 < \theta \le \omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Иными словами, названная поверхность – дефект [2], т.е. при переходе через нее производная искомого смещения $u_\varphi(r, \theta)$ по нормали к этой поверхности терпит разрыв первого рода. Считаем, что в точках дефекта $\theta = \omega_0$ выполнены условия сопряжения

$$u_\varphi(r, \omega_0 - 0) = u_\varphi(r, \omega_0 + 0), \quad \tau_{\theta\varphi}(r, \varphi_0 - 0) = \tau_{\theta\varphi}(r, \omega_0 + 0) \tag{1.2}$$

Как и ранее [1], предварительно рассмотрим вспомогательную задачу о составном конусе со срезанным острием. Она заключается в следующем. Требуется решить уравнение кручения [3]

$$[r^2 u_\varphi'(r, \theta)]' + \frac{[\sin\theta \dot{u}_\varphi(r, \theta)]^{\boldsymbol{\cdot}}}{\sin\theta} + \frac{u_\varphi(r, \theta)}{\sin^2\theta} = 0, \quad a < r < \infty, \quad 0 < \theta < \omega \tag{1.3}$$

где штрихом обозначена производная по первой переменной, а точкой – по второй переменной. Уравнение (1.3) должно удовлетворяться всюду в намеченной области в (1.3), кроме точек $\theta = \omega_0$. В этих точках должны выполняться условия сопряжения (1.2), которые при учете формул [3]

$$\tau_{\theta\varphi} = Gr^{-1}[\dot{u}_\varphi(r, \theta) - \operatorname{ctg}\theta u_\varphi(r, \theta)], \quad \tau_{r\varphi} = Gr[r^{-1}u_\varphi(r, \theta)]' \tag{1.4}$$

удобно записать так:

$$\begin{gathered} u_\varphi(r, \omega_0 - 0) - u_\varphi(r, \omega_0 + 0) \equiv \langle u_\varphi(r, \omega_0)\rangle = 0 \\ \langle \dot{u}_\varphi(r, \omega_0)\rangle = -g_{01}[\dot{u}_\varphi(r, \omega_0 - 0) - \operatorname{ctg}\omega_0 u_\varphi(r, \omega_0 - 0)] \\ g_{01} = (G_0 - G_1)G_1^{-1} = g - 1, \quad g = G_0G_1^{-1} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Будем считать внешнюю коническую поверхность конуса $\theta = \omega$ незагруженной, т.е. $\tau_{\theta\varphi}(r, \omega) = 0$, или при учете формул (1.4)

$$\dot{u}_\varphi(r, \omega) - \operatorname{ctg}\omega u_\varphi(r, \omega) = 0, \quad a < r < \infty \tag{1.6}$$

По сферической части границы $r = a$ рассматриваемого усеченного конуса приложим крутящую нагрузку, т.е.

$$\tau_{r\varphi}(a, \theta) = A\sin\theta, \quad A = \text{const} \tag{1.7}$$

которая приводится к крутящему моменту

$$M = 4\pi A_\omega Aa^3, \quad A_\omega = \sin^2\frac{\omega}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(\cos^2\omega + \cos\omega + 1)\right] \tag{1.8}$$

Граничное условие (1.7) при учете соотношений (1.1) и (1.4) запишем в виде

$$u'_\varphi(a, 0) - \frac{u_\varphi(a, \theta)}{a} = A\sin\theta\eta(\theta), \quad \eta(\theta) = \begin{cases} G_0^{-1}, & 0 \le \theta \le \omega_0 \\ G_1^{-1}, & \omega_0 < \theta \le \omega \end{cases} \tag{1.9}$$

Разрывная краевая задача (1.3), (1.5), (1.6) и (1.9) представляет собой вспомогательную задачу, которая имеет и самостоятельный интерес. Если она будет решена, то для решения поставленной задачи следует в полученном решении выполнить предельный переход $a \to 0$, но при этом следует увеличивать постоянную A в первом равенстве (1.8) так, чтобы

$$Aa^3 = \frac{M}{4\pi A_\omega} \tag{1.10}$$

где M – момент центра вращения.

Сформулированную вспомогательную задачу преобразуем с помощью замены

$$u_\varphi(r, \theta) = r^{-1/2}u(\ln r, \theta) \tag{1.11}$$

и далее положим $\ln r = x$. При этом переменная x будет меняться в интервале $\ln a < x < \infty$. От переменной x перейдем к переменной $\xi = x - \ln a$, которая будет меняться в интервале $0 < \xi < \infty$. В силу сделанных замен справедливы равенства

$$u(\ln r, \theta) = u(x, \theta) = u(\xi + \ln a, \theta) = \tilde{u}(\xi, \theta) \tag{1.12}$$

В качестве искомой функции возьмем функцию $\tilde{u}(\xi, \theta)$. Если она будет найдена, то согласно соотношениям (1.11) и (1.12)

$$u_\varphi(r, \theta) = r^{-1/2}\tilde{u}(\ln r/a, \theta) \tag{1.13}$$

Для введенной функции $\tilde{u}(\xi, \theta)$ вспомогательная задача (1.3), (1.5), (1.6), (1.9) при учете соотношений (1.11) и (1.12) сформулирована в виде следующей двумерной разрывной краевой задачи ($\theta \neq \omega_0$):

$$\tilde{u}''(\xi, \theta) - \frac{1}{4}\tilde{u}(\xi, \theta) + \frac{[\sin\theta\tilde{u}^{\bullet}(\xi, \theta)]^{\bullet}}{\sin\theta} - \frac{\tilde{u}(\xi, \theta)}{\sin^2\theta} = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad 0 < \theta < \omega$$

$$\begin{aligned} &\tilde{u}'(0, \theta) - \operatorname{ctg}\alpha\tilde{u}(0, \theta) = Aa^{3/2}\eta(\theta)\sin\theta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = 3/2 \\ &\tilde{u}^{\bullet}(\xi, \omega) - \operatorname{ctg}\omega\tilde{u}(\xi, \omega) = 0, \quad 0 \le \xi < \infty \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\langle\tilde{u}(\xi, \omega_0)\rangle = 0, \quad \langle\tilde{u}^{\bullet}(\xi, \omega_0)\rangle = -g_{01}[\tilde{u}^{\bullet}(\xi, \omega_0 - 0) - \operatorname{ctg}\omega_0\tilde{u}(\xi, \omega_0 - 0)]; \quad 0 \le \xi < \infty$$

2. Сведение вспомогательной задачи к одномерной разрывной краевой задаче. Чтобы привести краевую задачу (1.14) к одномерной, необходимо применить интегральное преобразование по переменной ξ, причем так, чтобы было удовлетворено граничное условие при $\xi = 0$.

Займемся получением такого преобразования. С этой целью решим следующую сингулярную задачу Штурма–Лиувилля [4–6]:

$$-y''(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad 0 < x < \infty; \quad \cos\alpha y(0, \lambda) - \sin\alpha y'(0, \lambda) = 0 \tag{2.1}$$

Граничное условие в задаче (2.1) эквивалентно следующему:

$$y'(0, \lambda) - \operatorname{ctg}\alpha y(0, \lambda) = 0$$

Согласно (1.14) для дальнейшего важен случай $\operatorname{ctg}\alpha = 3/2$.

Решение краевой задачи (2.1) будем искать известным методом [4, 5]. Строим два линейно независимых решения $\chi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ уравнения (2.1), удовлетворяющих условиям

$$\chi(0, \lambda) = \cos\alpha, \quad \chi'(0, \lambda) = -\sin\alpha; \quad \psi(0, \lambda) = \cos\alpha, \quad \psi'(0, \lambda) = \sin\alpha$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned} \chi(x, \lambda) &= -\lambda^{-1/2}\sin\alpha\sin(x\sqrt{\lambda}) + \cos\alpha\cos(x\sqrt{\lambda}) \\ \psi(x, \lambda) &= \lambda^{-1/2}\cos\alpha\sin(x\sqrt{\lambda}) + \sin\alpha\cos(x\sqrt{\lambda}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Помимо задачи (2.1) рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{aligned} &-y''(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad 0 < x < b \\ &\cos\alpha y(0, \lambda) - \sin\alpha y'(0, \lambda) = 0, \quad \cos\beta y(b, \lambda) - \sin\beta y'(b, \lambda) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Общим решением дифференциального уравнения (2.3) будет функция

$$y(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + m(\lambda, b; \beta)\psi(x, \lambda) \tag{2.4}$$

причем выражение для $m(\lambda, b; \beta)$ найдем, удовлетворив второму граничному условию задачи (2.3). Оно одновременно будет определять уравнение окружности [4, 5] в плоскости комплексного переменного $m(\lambda, b; \beta)$; при этом все точки окружности будут обойдены при изменении параметра β от нуля до π. С ростом параметра b окружность сжимается в предельную точку, так как интеграл $\int\limits_0^\infty |\psi(x,\lambda)|^2 dx$ расходится [4, 5]. Соответствующее предельное значение $m(\lambda, b; \beta)$ в формуле (2.4) обозначим через $m_\infty(\lambda)$. Из условия существования [4, 5] при комплексном λ хотя бы одной функции (2.4), принадлежащей $L^2(0,\infty)$, находим

$$m_\infty(\lambda) = \frac{1 + i\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - i\sqrt{\lambda}}$$

Отсюда, учитывая, что в рассматриваемом случае $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, имеем

$$\operatorname{Im} m_\infty(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0; \quad \operatorname{Im} m_\infty(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin^2\alpha(\lambda + \operatorname{ctg}\alpha)}, \quad \lambda > 0 \tag{2.5}$$

и находим спектральную функцию

$$d\sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} m_\infty(\lambda + i\varepsilon)d\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\pi\sin^2\alpha(\lambda + \operatorname{ctg}^2\alpha)}$$

Поэтому при учете соотношений (2.5) и последнего равенства для любой функции $g(x)$ из $L^2(0,\infty)$ будет справедливо разложение со сходимостью в среднем [4, 5]

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\psi(x,\lambda)\sqrt{\lambda}}{\sin^2\alpha(\lambda + \operatorname{ctg}^2\alpha)}\left(\int\limits_0^\infty \psi(\xi,\lambda)g(\xi)d\xi\right)d\lambda \tag{2.6}$$

Если представить функцию, определяемую вторым равенством (2.2), в виде

$$\psi(x,\lambda) = \lambda^{-1/2}\sin\alpha\varphi_\lambda(x), \quad \varphi_\lambda(x) = \operatorname{ctg}\alpha\sin(x\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda}) \tag{2.7}$$

то на соотношение (2.6) можно смотреть как на интегральное преобразование для функции $g(x)$:

$$g_\lambda = \int\limits_0^\infty g(x)\varphi_\lambda(x)dx, \quad g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)g_\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda}(\lambda + \operatorname{ctg}^2\alpha)} \tag{2.8}$$

Первое равенство определяет трансформанту, а второе – формулу обращения.

Из построения вытекает, что функция $\varphi_\lambda(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению и граничному условию:

$$-\varphi_\lambda''(x) = \lambda\varphi_\lambda(x), \quad 0 < x < \infty; \quad \varphi_\lambda'(0) - \operatorname{ctg}\alpha\varphi_\lambda(0) = 0 \tag{2.9}$$

Задачу Штурма–Лиувилля (2.2) можно исследовать и методом Титчмарша, изложенным ранее [6], где рассмотрен пример, близкий к (2.1).

Применим полученное интегральное преобразование (2.8) к краевой задаче (1.14). Вместо функции $\tilde{u}(\xi,\theta)$ будем отыскивать ее трансформанту

$$\tilde{u}_\lambda(\theta) = \int\limits_0^\infty \varphi_\lambda(\xi)\tilde{u}(\xi,\theta)d\xi \tag{2.10}$$

Если она будет найдена, то согласно формуле обращения (2.8) будем иметь

$$\tilde{u}(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi)\tilde{u}_\lambda(\theta)d\lambda}{\sqrt{\lambda}(\lambda + \operatorname{ctg}^2\alpha)} \tag{2.11}$$

Учитывая соотношения (2.9), для трансформанты (2.10) из задачи (1.14) получим следующую одномерную краевую задачу:

$$L_s\tilde{u}_\lambda(\theta) \equiv -[\sin\theta\dot{\tilde{u}}_\lambda(\theta)]^{\cdot} + \frac{\tilde{u}_\lambda(\theta)}{\sin\theta} + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\sin\theta\tilde{u}_\lambda(\theta) = g(\theta)$$

$$g(\theta) = -Aa^{3/2}\sqrt{\lambda}h(\theta), \quad h(\theta) = \eta(\theta)\sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \omega, \quad \theta \neq \omega_0 \tag{2.12}$$

$$\tilde{u}_\lambda(\omega) - \operatorname{ctg}\omega\tilde{u}_\lambda(\omega) = 0, \quad \langle\tilde{u}_\lambda(\omega_0)\rangle = 0, \quad \langle\dot{\tilde{u}}_\lambda(\omega_0)\rangle = -g_{01}X_\lambda(\omega_0)$$

где

$$X_\lambda(\omega_0) = \dot{\tilde{u}}_\lambda(\omega_0 - 0) - \operatorname{ctg}\omega_0\tilde{u}_\lambda(\omega_0 - 0) \tag{2.13}$$

Для решения полученной одномерной разрывной краевой задачи (2.12), согласно теории, изложенной ранее [2], следует построить функцию Грина $G_\lambda(\theta, t)$ краевой задачи

$$L_s y(\theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \omega, \quad y^{\cdot}(\omega) - \operatorname{ctg}\omega y(\omega) = 0 \tag{2.14}$$

3. Построение функции Грина краевой задачи (2.14). Будем строить функцию Грина задачи (2.14) на основе ее определяющих свойств [2]. Краевая задача самосопряжена [2], поэтому функция Грина должна быть симметричной, т.е.

$$G_\lambda(\theta, t) = G_\lambda(t, \theta) \tag{3.1}$$

Можно убедиться, что фундаментальной системой решений однородного дифференциального уравнения из (2.14) будут сферические функции $P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)$, $Q_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)$, при $\bar{\nu} = -1/2 - ip$, $p = \sqrt{\lambda}$, причем первая функция будет вещественной [7], а вторая – комплекснозначной. Общее вещественное решение разбираемого уравнения строим в виде

$$y(\theta) = C_0P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) + C_1\operatorname{Re}Q_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) \tag{3.2}$$

Пользуясь этим решением, построим функцию

$$\psi_p(\theta) = P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) - C_p(\omega)\operatorname{Re}Q_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) \tag{3.3}$$

где

$$C_p(\omega) = \frac{P_{\bar{\nu}}^{1\cdot}(\cos\omega) - \operatorname{ctg}\omega P_{\bar{\nu}}^1(\cos\omega)}{\operatorname{Re}Q_{\bar{\nu}}^{1\cdot}(\cos\omega) - \operatorname{ctg}\omega\operatorname{Re}Q_{\bar{\nu}}^1(\cos\omega)} = \frac{P_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega)}{\operatorname{Re}Q_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega)} \tag{3.4}$$

Последнее равенство следует из известных формул ([7], формулы 3.6.1(6) и 3.6.1(7)). Функция (3.3) удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению и граничному условию задачи (2.12).

Чтобы для функции Грина $G_\lambda(\theta, t)$ выполнялось условие (3.1) и граничное условие задачи (2.12), она должна иметь вид

$$G_\lambda(\theta, t) = c_0\begin{cases} P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)\psi_p(t), & \theta < t, \\ \psi_p(\theta)P_{\bar{\nu}}^1(\cos t), & \theta > t, \end{cases} \quad \bar{\nu} = -\frac{1}{2} - ip, \quad p = \sqrt{\lambda} \tag{3.5}$$

Постоянную c_0 найдем из условия разрывности первой производной по θ функции Грина [2]. В результате получим

$$c_0 = [C_p(\omega)(\lambda + 1/4)]^{-1} \tag{3.6}$$

При этом была использована известная формула ([7], формула 3.4.(25)), которая позволяет вычислить вронскиан функций, стоящих в правой части равенства (3.2), т.е.

$$P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)\mathrm{Re}\dot{Q}_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) - \dot{P}_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)\mathrm{Re}Q_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta) = (\lambda + 1/4)(\sin\theta)^{-1} \tag{3.7}$$

а также функций $P_{\bar{\nu}}^1(\cos\theta)$ и $\psi_p(\theta)$.

4. Решение одномерной разрывной краевой задачи (2.12). Согласно теории, изложенной ранее [2], решение разрывной краевой задачи (2.12) имеет вид

$$\tilde{u}_\lambda(\theta) = -a^{3/2}A\sqrt{\lambda}\int_0^\omega G_\lambda(\theta, t)h(t)dt - g_{01}\sin\omega_0 X_\lambda(\omega_0)G_\lambda(\theta, \omega_0) \tag{4.1}$$

С учетом разрывности функции $h(t)$, а также представления функции Грина (3.5), (3.6), формулу (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\lambda(\theta) = -\frac{1}{(\lambda + 1/4)P_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega)}\Bigg[a^{3/2}A\sqrt{\lambda}\left(\frac{R_{0,\theta}^p + S_{\theta,\omega_0}^p}{G_0} + \frac{S_{\omega_0,\omega}^p}{G_1}\right) - \\ - g_{01}\sin\omega_0 X_\lambda(\omega_0)Q_\omega(p, \omega_0, \theta)\Bigg], \quad 0 \le \theta \le \omega_0\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered} Q_k(p, \theta, \omega) = P_{\bar{\nu}}^k(\cos\theta)\mathrm{Re}Q_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega) - \mathrm{Re}Q_{\bar{\nu}}^k(\cos\theta)P_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega), \quad k = 1, 2 \\ Q_2(p, \theta, \omega) = \dot{Q}_1(p, \theta, \omega), \quad Q_\omega(p, \theta, t) = Q_1(p, \theta, \omega)P_\nu^1(\cos t) \\ R_{\alpha,\beta}^p = \int_\alpha^\beta Q_\omega(p, \theta, t)\sin^2 t dt, \quad S_{\alpha,\beta}^p = \int_\alpha^\beta Q_\omega(p, t, \theta)\sin^2 t dt \end{gathered} \tag{4.3}$$

и учтены равенства

$$\dot{\psi}_p(\theta) - \mathrm{ctg}\,\theta\,\psi_p(\theta) = \frac{Q_2(p, \theta, \omega)}{P_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega)}, \quad \frac{\psi_p(\theta)}{C_p(\theta)} = \frac{Q_1(p, \theta, \omega)}{P_{\bar{\nu}}^2(\cos\omega)} \tag{4.4}$$

справедливость которых устанавливается при помощи соотношений (3.3), (3.4).

К аналогичному виду можно привести формулу (4.1) при $\omega_0 \le \theta \le \omega$.

Пользуясь формулой (4.2), подсчитаем комбинацию, входящую в правую часть формулы (2.13). В результате получим уравнение для $X_\lambda(\omega_0)$, из которого найдем

$$X_\lambda(\omega_0) = -a^{3/2}A\sqrt{\lambda}C_\omega(p,\omega_0)/\sin\omega_0, \quad C_\omega(p,\omega_0) = A_\omega(p,\omega_0)/B_\omega(p,\omega_0) \tag{4.5}$$

где

$$A_\omega(p,\omega_0) = \frac{Q_2(p,\omega_0,\omega)}{G_0}\int\limits_0^{\omega_0} P_{\bar\nu}(\cos t)\sin^2 t dt + \frac{P_{\bar\nu}^2(\cos\omega_0)}{G_1}\int\limits_{\omega_0}^{\omega} Q_1(p,t,\omega)\sin^2 t dt \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} B_\omega(p,\omega_0) &= (\lambda+1/4)(\sin\omega_0)^{-1}P_{\bar\nu}^2(\cos\omega) + g_{01}P_{\bar\nu}^2(\cos\omega_0)Q_1(p,\omega_0,\omega) = \\ &= gP_{\bar\nu}^2(\cos\omega_0)Q_1(p,\omega_0,\omega) - P_{\bar\nu}^1(\cos\omega_0)Q_2(p,\omega_0,\omega) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Второе равенство в формуле (4.7) получено на основании равенств (3.7) и (1.5).

Теперь решение одномерной краевой задачи (2.12) дается формулами

$$\tilde u_\lambda(\theta) = -\frac{a^{3/2}A\sqrt{\lambda}}{(\lambda+1/4)P_{\bar\nu}^2(\cos\omega)}\left[\frac{R_{0,\theta}^p + S_{\theta,\omega_0}^p}{G_0} + \frac{S_{\omega_0,\omega}^p}{G_1} - g_{01}Q_\omega(p,\omega_0,\theta)C_\omega(p,\omega_0)\right], \tag{4.8}$$

$0 \le \theta \le \omega_0$

$$\tilde u_\lambda(\theta) = -\frac{a^{3/2}A\sqrt{\lambda}}{(\lambda+1/4)P_{\bar\nu}^2(\cos\omega)}\left[\frac{R_{0,\omega_0}^p}{G_0} + \frac{R_{\omega_0,\omega}^p + S_{\theta,\omega}^p}{G_1} - g_{01}Q_\omega(p,\theta,\omega_0)C_\omega(p,\omega_0)\right], \tag{4.9}$$

$\omega_0 \le \theta \le \omega$

5. Построение решения двумерной разрывной краевой задачи (1.14) и точного решения вспомогательной задачи. Решение краевой задачи (1.14) получим по формуле (2.11). Если учесть структуру функции $\varphi_\lambda(\xi)$, вытекающую из формулы (2.7), и ввести интегралы

$$\left\|\begin{matrix} I_0(\xi,\theta) \\ I_1(\xi,\theta)\end{matrix}\right\| = \frac{1}{G_0}\left\|\begin{matrix} R_{0,\theta} + \tilde R_{0,\omega_0} \\ R_{0,\omega_0}\end{matrix}\right\| + \frac{1}{G_1}\left\|\begin{matrix} \tilde R_{\omega_0,\omega} \\ R_{\omega_0,\theta} + \tilde R_{\theta,\omega_0}\end{matrix}\right\| - g_{01}\left\|\begin{matrix} J_1(\xi,\omega_0,\theta) \\ J_1(\xi,\theta,\omega_0)\end{matrix}\right\| \tag{5.1}$$

где

$$\left\|\begin{matrix} R_{\alpha,\beta}(\xi,\theta) \\ \tilde R_{\alpha,\beta}(\xi,\theta)\end{matrix}\right\| = \int\limits_\alpha^\beta \sin^2 t\left\|\begin{matrix} J_0(\xi,\theta,t) \\ J_0(\xi,t,\theta)\end{matrix}\right\| dt \tag{5.2}$$

$$J_n(\xi,\theta,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2pe^{ip\xi}Q_\omega(p,\theta,t)[\delta_{n0} + \delta_{n1}C_\omega(p,\omega_0)]}{(p^2+1/4)(p^2+9/4)P_{\bar\nu}^2(\cos\omega)}dp \tag{5.3}$$

$$n = 0, 1, \quad \delta_{00} = \delta_{11} = 1, \quad \delta_{01} = \delta_{10} = 0, \quad \bar\nu = -1/2 - ip, \quad 0 < \xi < \infty$$

то формулу (2.11) можно представить в виде

$$\tilde u(\xi,\theta) = -a^{3/2}A\left[\frac{3}{2}I_n(\xi,\theta) + I_n'(\xi,\theta)\right], \quad n = \begin{cases} 0, & 0 \le \theta \le \omega_0 \\ 1, & \omega_0 < \theta \le \omega\end{cases} \tag{5.4}$$

При записи интегралов (5.3) сделана замена $\sqrt{\lambda} = p$, $d\lambda = 2pdp$ и учтено, что содержащиеся в них сферические функции – четные по переменной p.

Располагая формулами (5.4), с помощью равенства (1.13) можно построить решение вспомогательной задачи, но для этого предварительно нужно убедиться в сходимости интегралов (5.3) и дать способ их вычисления.

Чтобы проверить сходимость этих интегралов, необходимо располагать асимптотическими формулами для функций конуса $P^m_{-1/2-ip}(\cos\theta)$, $Q^m_{-1/2-ip}(\cos\theta)$ при $p \to \infty$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Нужные формулы получим, если воспользуемся известными асимптотическими формулами ([7], формулы 3.9.1(1) и 3.9.1(2)) для сферических функций при больших комплексных значениях нижних индексов, принимая во внимание, что

$$P^m_{-1/2-ip}(s) = \mathrm{Re}P^m_{-1/2-ip}(s) = [P^m_{-1/2-ip}(s) + P^m_{-1/2+ip}(s)]/2$$

$$\mathrm{Re}Q^m_{-1/2-ip}(s) = [Q^m_{-1/2-ip}(s) + Q^m_{-1/2+ip}(s)]/2; \quad s = \cos\theta$$

Последующее использование для правых частей этих равенств указанных асимптотических формул, а также соотношений

$$\Gamma(1/2 + m \pm ip)\Gamma^{-1}(1 \pm ip) = (\pm i)^{m-1/2} p^{m-1/2}[1 + O(1/p)], \quad p \to \infty$$

вытекающих из известного асимптотического равенства ([7], формула 1.18(4)), приводит к требуемым асимптотическим формулам ($m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} P^m_{-1/2-ip}(\cos\theta) &= \mathrm{Re}P^m_{-1/2-ip}(\cos\theta) = \frac{p^{m-1/2}e^{p\theta}}{\sqrt{2\pi\sin\theta}}[1 + O(1/p)], \quad p \to \infty \\ \mathrm{Re}Q^m_{-1/2-ip}(\cos\theta) &= \frac{\cos m\pi}{2^{3/2}}\sqrt{\frac{\pi}{\sin\theta}}\,p^{m-1/2}e^{-p\theta}[1 + O(1/p)], \quad p \to \infty \end{aligned} \tag{5.5}$$

Располагая формулами (5.5), можно убедиться, что интегралы (5.3) сходятся при $\theta > t$, и для их вычисления можно применить метод контурного интегрирования на плоскости комплексного переменного p. В качестве контура надлежит взять полуокружность достаточно большого радиуса R, лежащую в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}p > 0$, с диаметром на вещественной оси $\mathrm{Im}p = 0$. Условия леммы Жордана будут выполнены на основании известных асимптотических формул ([7], формулы 3.9.1 (1) и 3.9.1 (2)), а также формул (5.5).

Особыми точками в верхней полуплоскости в подынтегральных выражениях интегралов (5.3) будут полюса, которые находятся среди корней знаменателей подынтегральных выражений. Корень $p = i/2$ не приводит к полюсу в указанных подынтегральных выражениях даже при наличии корня при $p = i/2$ у функции $P^2_{\nu}(\cos\omega)$, в чем можно убедиться на основании известного тождества ([8], формула 8.753(3)) .

Эта точка не является особой и для подынтегрального выражения в интеграле (5.3) при $n = 1$, несмотря на то, что точка $p = i/2$ – корень функции $B_{\omega}(p, \omega_0)$ в силу того же тождества.

Следующий корень, $p = 3i/2$, будет полюсом второго порядка.

Следующей серией полюсов будут корни уравнения $P^2_{\nu}(\cos\omega) = 0$. Можно убедиться, что оно имеет счетное множество чисто мнимых корней $p = iq_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$), которые совпадают с корнями уравнения

$$P^2_{-1/2+q_j}(\cos\omega) = P^2_{\nu_j}(\cos\omega) = 0, \quad \nu_j = -1/2 + q_j$$

Таблица 1

ω	$j = 2$	3	4	5	6
$\pi/4$	10.28	46.45	50.45	54.46	58.46
$\pi/3$	10.68	19.69	28.71	37.72	46.73
$\pi/6$	9.37	27.78	39.85	51.88	63.90

причем первые два корня $q_0 = 1/2$ ($\nu_0 = 0$), $q_1 = 3/2$ ($\nu_1 = 1$) уже были использованы, остальные (ν_j, $j \geq 2$) находились численно с помощью пакета прикладных программ "MAPLE 6" и их значения приводятся в табл. 1, из которой видно, что $q_j > 3/2$ при $j \geq 2$.

Наконец, еще одну серию полюсов будут давать корни функции $B_\omega(p, \omega_0)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} p > 0$. Как видим из (4.7), коэффициенты трансцендентного уравнения

$$B_\omega(p, \omega_0) = 0 \tag{5.6}$$

вещественные, и потому корни его должны быть сопряженными. Поэтому, если имеется комплексный корень $p_j = \rho_j + iq_j^1$, то корнем будет и $\bar{p}_j = \rho_j - iq_j^1$, и должно выполняться равенство

$$B_\omega(\rho_j + iq_j^1, \omega_0) = B_\omega(\rho_j - iq_j^1, \omega_0)$$

С другой стороны, для сферических функций справедливы [7] равенства

$$P_\nu^m(z) = P_{-\nu-1}^m(z), \quad Q_\nu^m(z) = Q_{-\nu-1}^m(z)$$

для любых комплексных значений ν. Учитывая это, приходим к выводу, что $\rho_j = 0$, т.е. корни уравнения (5.6) чисто мнимые. В силу представления (4.9) и обозначения $\nu_j^1 = -1/2 + q_j$ трансцендентное уравнение (5.6) приобретает вид

$$B_\omega(iq_j, \omega_0) \equiv gP_{\nu_j^1}^2(\cos\omega_0)[P_{\nu_j^1}^2(\cos\omega_0)Q_{\nu_j^1}^2(\cos\omega) - Q_{\nu_j^1}^1(\cos\omega_0)P_{\nu_j^1}(\cos\omega)] -$$
$$- P_{\nu_j^1}^1(\cos\omega_0)[P_{\nu_j^1}^2(\cos\omega_0)Q_{\nu_j^1}^2(\cos\omega) - Q_{\nu_j^1}^2(\cos\omega_0)P_{\nu_j^1}^2(\cos\omega)] = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

причем первый корень $q_0^1 = -1/2 + \nu_0^1$ в силу уже использованного тождества ([8], формула 8.753 (3)) будет равен 1/2, а $\nu_0^1 = 0$, что и было учтено выше. Остальные корни ν_j^1 ($j \geq 1$) находились численно с помощью пакета прикладных программ "MAPLE 6". Их значения приводятся в табл. 2, из которой видно, что $q_j^1 > 3/2, j \geq 1$.

Для подсчета вычетов в перечисленных полюсах необходимо выполнить следующие предельные переходы:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{P_{1+\varepsilon}^2(\cos\omega)} = \left[\sin^2\frac{\omega}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{C_0(\omega)}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\varepsilon}{P_{1+\varepsilon}^2(\cos\omega)} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2(\omega/2)[1 + 2\ln(\cos(\omega/2))(2 + \operatorname{cosec}^2(\omega/2))]}{3 + \operatorname{tg}^2(\omega/2)} = C_1(\omega)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Q_\omega(i\varepsilon + i3/2, \theta, t) = Q_1^2(\cos\omega)\sin\theta\sin t$$

Таблица 2

ω	$\frac{G_0}{G_1}$	ω_0	$j=1$	2	3	4	5	6
$\pi/4$	0.1	$\pi/8$	14.80	22.10	27.02	37.55	47.13	49.73
		$\pi/6$	13.32	23.34	30.88	49.35	59.27	85.35
	10	$\pi/8$	11.25	21.30	29.27	37.29	45.45	53.67
		$\pi/6$	9.51	17.54	27.45	33.91	45.95	57.98
$\pi/3$	0.1	$\pi/6$	10.29	19.12	29.44	77.38	79.15	89.37
		$\pi/4$	11.37	20.36	23.31	32.37	35.29	44.37
	10	$\pi/6$	9.68	20.28	21.94	32.30	34.02	44.31
		$\pi/4$	10.33	18.72	29.17	38.32	41.19	50.33

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{d\varepsilon} Q_\omega(i\varepsilon + i3/2, \theta, t) = D_\omega(\theta, t) \tag{5.7}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{Q_\omega(i\varepsilon + i3/2, \theta, t)(2\varepsilon + 3)}{(\varepsilon + 3)[1/4 - (\varepsilon + 3/2)^2]} = -\frac{1}{2} D_\omega(\theta, t) + \frac{3}{2} Q_1^2(\cos\omega)\sin\theta\sin t$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} B_\omega(i\varepsilon + iq_j^1, \omega_0)\Big|_{\varepsilon = 0} = \tilde{C}_j(\omega, \omega_0)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_\omega(i\varepsilon + i3/2, \omega_0) = C_0(\omega, \omega_0), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{d\varepsilon} C_\omega(i\varepsilon + i3/2, \omega_0) = C_1(\omega, \omega_0)$$

Кроме того, удобно ввести обозначения

$$D_\omega^0(\theta, t) = [3 - C_0(\omega)C_1(\omega)]Q_1^2(\cos\omega)\sin\theta\sin t - D_\omega(\theta, t)$$

$$D_\omega^1(\theta, t) = Q_1^2(\cos\omega)D(\omega, \omega_0)\sin\theta\sin t - D_\omega(\theta, t)$$

$$D(\omega, \omega_0) = [3 - C_0(\omega)C_1(\omega)]C_0(\omega, \omega_0) - C_1(\omega, \omega_0)$$

$$D(q) = \frac{2q}{(1/4 - q^2)(9/4 - q)^2} \tag{5.8}$$

$$E_\omega(q) = \frac{D(q)}{\tilde{P}_\omega(q)} Q_\nu^2(\cos\omega), \quad \tilde{E}_\omega(q) = \frac{D(q)Q_\nu^2(\cos\omega)}{P_\nu^2(\cos\omega)}, \quad \tilde{P}_\omega(q) = \frac{dP_\nu^2(\cos\omega)}{d\nu}; \quad \nu = -\frac{1}{2} + q$$

$$A_\omega(iq_j^1, \omega_0) = \bar{C}_j(\omega, \omega_0), \quad C_\omega(iq_j, \omega_0) = C_j^*(\omega, \omega_0), \quad \tilde{E}_j(\omega, \omega_0) = \tilde{E}_\omega(q_j^1)\frac{\bar{C}_j(\omega, \omega_0)}{\tilde{C}_j(\omega, \omega_0)}$$

При вычислении пределов (5.7) необходимы формулы производных сферических функций по нижнему индексу. В нашем случае верхний индекс – целое положительное число. Воспользовавшись известными представлениями ([7], формулы 3.6.1(2)) устанавливаем формулу

$$\frac{dP_\nu^m(\cos\theta)}{d\nu} = \frac{\sin^m\theta}{(-2)^m m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sin\theta/2)^{2j}}{j!(1+m)_j} \frac{\Gamma(\nu + m + 1 + j)\Gamma(m - \nu + j)}{\Gamma(\nu - m + 1)\Gamma(m - \nu)} \times \tag{5.9}$$

$$\times [\psi(\nu + m + 1 + j) - \psi(m - \nu + j) - \psi(\nu - m + 1) - \psi(m - \nu)], \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Для вычисления $dQ_\nu^m(\cos\theta)/d\nu$ следует воспользоваться известным разложением ([7], формулой 3.5(3)). Например, его использование позволило получить равенство

$$Q_1^2(\cos\omega) = 2\operatorname{cosec}^2\omega \tag{5.10}$$

Вычислив вычеты в перечисленных выше полюсах с помощью формул (5.9) и (5.10), найдем значения интегралов (5.3)

$$\begin{aligned} J_n(\xi, \theta, t) &= \frac{e^{-3\xi/2}}{2C_0(\omega)}[\xi(\delta_{n0} + \delta_{n1}C_0(\omega, \omega_0))Q_1^2(\cos\omega)\sin\theta\sin t + D_\omega^n(\theta, t)] + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} E_\omega(q_j)(\delta_{n0} + \delta_{n1}C_j^*(\omega, \omega_0))e^{-q_j\xi}P_{\nu_j}^1(\cos\theta)P_{\nu_j}^1(\cos t) + \\ &+ \delta_{n1}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{E}_j(\omega, \omega_0)e^{-q_j^1\xi}\left\{P_{\nu_j^1}^1(\cos\theta)P_{\nu_j^1}^1(\cos t) - \frac{P_{\nu_j^1}^2(\cos\omega)}{Q_{\nu_j^1}^2(\cos\omega)}Q_{\nu_j^1}^1(\cos\theta)P_{\nu_j^1}^1(\cos t)\right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

$\nu_j = -1/2 + q_j$ (корни уравнения $P_{\nu_j}^2(\cos\omega = 0)$), $\nu_j^1 = -1/2 + q_j^1$ (корни уравнения (5.6)).

Подставляя полученные выражения (5.11) в соотношения (5.3), (5.2) и (5.1), а затем в формулу (5.4), получим окончательный вид решения разрывной краевой задачи (1.14). Использование его, а также равенства (1.13), позволяет получить решение вспомогательной задачи (1.3), (1.5), (1.6), (1.9) в виде

$$u_\varphi(r, \theta) = -a^{3/2}Ar^{-1/2}[F(r, \theta) + \tilde{F}(r, \theta)], \quad a \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \omega \tag{5.12}$$

где

$$\tilde{F}(r, \theta) = g_{01}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2} - q_j^1\right)\tilde{E}_j(\omega, \omega_0)\frac{P_{\nu_j^1}^2(\cos\omega)}{Q_{\nu_j^1}^2(\cos\omega)}\left(\frac{a}{r}\right)^{q_j^1}\begin{cases} Q_{\nu_j^1}^1(\cos\omega_0)P_{\nu_j^1}^1(\cos\theta), & 0 \le \theta \le \omega_0 \\ P_{\nu_j^1}^1(\cos\omega_0)Q_{\nu_j^1}^1(\cos\theta), & \omega_0 \le \theta \le \omega \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= \frac{Q_1^2(\cos\omega)}{C_0(\omega)}\left(\frac{A_{\omega_0}}{G_0} + \frac{A_\omega - A_{\omega_0}}{G_1}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}\sin\theta + S_\omega^1(r, \theta) - \\ &- g_{01}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2} - q_j^1\right)\tilde{E}_j(\omega, \omega_0)P_{\nu_j^1}^1(\cos\omega_0)\left(\frac{a}{r}\right)^{q_j^1}P_{\nu_j^1}^1(\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \omega \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} S_\omega^l(r, \theta) &= \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2} - q_j\right)E_\omega(q_j)\left[\frac{I_{\omega_0}^*(\nu_j)}{G_0} + \frac{I_\omega^*(\nu_j) - I_{\omega_0}^*(\nu_j)}{G_1} - \right. \\ &\left. - g_{01}C_j^*(\omega, \omega_0)P_{\nu_j}^1(\cos\omega_0)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{q_j}P_{\nu_j}^1(\cos\theta), \quad l = 1, 2; \quad I_\omega^*(\nu) = \int_0^\omega P_\nu^1(\cos t)\sin^2 t\,dt \end{aligned}$$

6. Решение задачи кручения составного конуса с острием при наличии центра вращения у острия. Согласно изложенному в разд. 1 решение рассматриваемой задачи получим предельным переходом $a \to 0$ из построенного решения вспомогательной задачи (5.12). С этой целью воспользовавшись равенством (1.10), запишем решение вспомогательной задачи (5.12) в виде:

$$u_\varphi(r,\theta) = -\frac{Mr^{-1/2}}{4\pi A_\omega}\left[\frac{F(r,\theta)}{a^{3/2}} + \frac{\tilde{F}(r,\theta)}{a^{3/2}}\right], \quad a \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \omega \tag{6.1}$$

и совершим в правой части полученного равенства предельный переход при $a \to 0$.

Учитывая формулы (5.14) и (5.13), а также, что $q_j - 3/2 > 0$ при $j \ge 2$ и $q_j^1 - 3/2 > 0$ при $j \ge 1$ (это видно из табл. 1 и 2), приходим к равенствам

$$\lim_{a\to 0}\frac{\tilde{F}(r,\theta)}{a^{3/2}} = 0, \quad \lim_{a\to 0}\frac{F(r,\theta)}{a^{3/2}} = \frac{1}{r^{3/2}}\frac{Q_1^2(\cos\omega)}{C_0(\omega)}\left(\frac{A_{\omega_0}}{G_0} + \frac{A_\omega - A_{\omega_0}}{G_1}\right)\sin\theta \tag{6.2}$$

Примем во внимание, что из формул (1.8), (5.7) и (5.10) вытекают равенства

$$\frac{Q_1^2(\cos\omega)}{C_0(\omega)} = \frac{1}{3A_\omega} = \frac{1}{2}\left[\sin^4\frac{\omega}{2}\left(1 + 2\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-1} \tag{6.3}$$

В силу соотношений (6.1)–(6.3) решение поставленной задачи примет вид

$$u_\varphi(r,\theta) = -\frac{M}{12\pi A_\omega}\left(\frac{A_{\omega_0}}{G_0} + \frac{A_\omega - A_{\omega_0}}{G_1}\right)\frac{\sin\theta}{r^2}, \quad 0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \omega \tag{6.4}$$

На основании формулы (1.4) отсюда следует, что

$$\tau_{\theta\varphi}(r,\theta) \equiv 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \omega$$

Таким образом, и для составного (неоднородного) конуса при наличии центра вращения у острия конуса разрезы по внутренним коническим поверхностям не вызывают концентрации напряжений, т.е. ситуация, выявленная для однородного конуса [1], сохраняется и для составного конуса.

К результату, полученному ранее [1] принципиально другим методом, приходим из соотношения (6.4), полагая в нем $G_0 = G_1 = G$. Имеем

$$u_\varphi(r,\theta) = -\frac{M}{12\pi G}\frac{\sin\theta}{r^2} = -\frac{M}{4\pi G}\frac{Q_1^2(\cos\omega)}{C_0(\omega)}\frac{\sin\theta}{r^2}, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \omega \tag{6.5}$$

что совпадает с формулой, полученной ранее [1] (где следует исправить опечатку: вместо $\gamma_0 = 2A_\omega$ должно быть $\gamma_0 = -2A_\omega$).

Ситуация существенно меняется, если в составном конусе удалим острие, а на сферической поверхности $r = a$ приложим напряжения (1.7), либо эквивалентный им крутящий момент (1.8). В последнем случае величину A в соотношении (1.7) нужно представить в виде

$$A = M[4\pi A_\omega a^3]^{-1} \tag{6.6}$$

Смещение $u_\varphi(r, \theta)$ для такого конуса будет представлено формулой (5.12), в которой вместо A можно взять правую часть равенства (6.6). По этим смещениям по формуле (1.4) с учетом соотношения (1.1) найдем напряжение

$$\tau_{\theta\varphi}(r,\theta) = -A\begin{Bmatrix} G_0, & 0\le\theta\le\omega_0 \\ G_1, & \omega_0<\theta\le\omega \end{Bmatrix}[S_\omega^2(r,\theta)+\tilde{F}^{\bullet}(r,\theta)]\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}, \quad a\le r<\infty, \quad 0\le\theta\le\omega \tag{6.7}$$

Функция S_ω^2 определена формулой (5.15).

Как видим, здесь $\tau_{\theta\varphi}(r, \theta) \ne 0$. Следовательно, если в составном конусе удалить острие, а вместо него приложить напряжения (1.7), эквивалентные крутящему моменту (1.8), то концентрация напряжений по разрезам, по внутренним коническим поверхностям в общем случае будет иметь место.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я.* Задача о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного трещинами // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 337–348.
2. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. *Nowacki W.* Teoria sprezystosci. Warczawa: PWN, 1973 = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики: М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
5. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. N. Y. etc.: McGraw-Hill, 1955 = *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
6. *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations. Oxford: Clarendon Press, 1946 = *Титчмарш Э.И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
7. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1955 = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Одесса
e-mail: popovgya@mail.ru

Поступила в редакцию
4.X.2005