

УДК 539.3:534.26

© 2006 г. Н. В. Ларин, Л. А. Толоконников

ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ ТЕРМОУПРУГИЙ СЛОЙ

Рассматривается отражение и преломление плоской звуковой волны неоднородным по толщине термоупругим плоским слоем, граничащим с невязкими теплопроводными жидкостями, в общем случае разными. Система уравнений для малых возмущений термоупругой среды сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, краевая задача для которой решена двумя способами: методом сплайн-коллокации и методом степенных рядов. Получены аналитические выражения, описывающие волновые поля вне слоя. Представлены результаты расчетов коэффициента прозрачности звуковой волны по интенсивности.

Отражение и преломление плоской звуковой волны неоднородным изотропным плоским слоем исследовалось ранее [1]. Было получено решение задачи о прохождении плоской монохроматической звуковой волны через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой [2]. Исследовано прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями [3]. Найдено решение задачи об отражении и преломлении акустической волны плоским неоднородным слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида [4]. Во всех указанных работах тепловые процессы в упругих неоднородных слоях не учитывались.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный термоупругий плоский слой толщиной $2H$, имеющий в невозмущенном состоянии постоянную температуру T_0 . Источники тепла в слое отсутствуют. Система прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 выбрана таким образом, что ось x_1 лежит в средней плоскости слоя, а ось x_3 направлена вниз по нормали к поверхности слоя. Модули упругости, температурный коэффициент линейного расширения и коэффициент теплопроводности материала слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты x_3 . Плотность материала слоя и его объемная теплоемкость описываются непрерывными функциями координаты x_3 . Полагая, что нижняя и верхняя поверхности слоя граничат с невязкими теплопроводными однородными жидкостями, которые имеют температуру T_0 , плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $x_3 < -H$ на термоупругий слой падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = A_i \exp\{i[k_{21}^1 x_1 + k_{21}^3(x_3 + H) - \omega t]\} \quad (1.1)$$

где A_i – амплитуда падающей волны, $k_{21}^1 = k_{21} \sin \theta_1$ и $k_{21}^3 = k_{21} \cos \theta_1$ – проекции волнового вектора \mathbf{k}_{21} на оси координат x_1 и x_3 соответственно, k_{21} – волновое число звуковых волн в верхнем полупространстве, ω – круговая частота, θ_1 – угол падения плоской волны. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Определим отраженные от слоя и прошедшие через слой волны, а также найдем поля смещений и температуры в термоупругом слое.

2. Уравнения волновых полей. Распространение термоупругих волн в неоднородном изотропном слое описывается общими уравнениями движения сплошной среды [5]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 3 \quad (2.1)$$

и уравнением притока тепла [6]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u} = c_v \dot{T} \quad (2.2)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, которые связаны с компонентами тензора деформаций ϵ_{ij} и изменением температуры T возмущенного слоя соотношениями Дюгамеля–Неймана [6]

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon^{ij} + (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T) \delta_{ij}; \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (2.3)$$

u_i – проекция вектора смещения \mathbf{u} на ось x_i , $\rho = \rho(x_3)$ – плотность материала слоя, $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$ – модули упругости материала слоя, $\beta = \beta(x_3) = 3\alpha_T K$, $\alpha_T = \alpha_T(x_3)$ – температурный коэффициент линейного расширения материала слоя, $K = \lambda + (2/3)\mu$ – изотермический модуль объемного расширения, $\lambda_T = \lambda_T(x_3)$ и $c_v = c_v(x_3)$ – коэффициент теплопроводности и объемная теплоемкость материала слоя соответственно, $\gamma = T_0 \beta$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Поскольку волновой вектор падающей волны лежит в плоскости x_1, x_3 и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2 , а неоднородность материала слоя проявляется лишь по оси x_3 , от координаты x_2 не должны зависеть ни отраженное, ни прошедшее в полупространство $x_3 > H$, ни возбужденные в термоупругом слое поля. Так как слой изотропный, составляющая u_2 вектора смещения \mathbf{u} равна нулю. Заметим также, что, согласно закону Снеллиуса [7], зависимость двух других составляющих вектора смещения и приращения температуры от координаты x_1 будет иметь вид $\exp(ik_{21}^1 x_1)$, поэтому проекции вектора смещения и приращение температуры будем искать в виде

$$u_r = U_r(x_3) \exp(ik_{21}^1 x_1), \quad r = 1, 3; \quad T = \tilde{T}(x_3) \exp(ik_{21}^1 x_1) \quad (2.4)$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{x_3}{H}, \quad U_1^* = \frac{U_1}{H}, \quad U_3^* = \frac{U_3}{H}, \quad T^* = \frac{\tilde{T}}{T_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \alpha_T^* = \frac{\alpha_T}{\alpha_T^0}, \quad \lambda_T^* = \frac{\lambda_T}{\lambda_T^0}, \quad c_v^* = \frac{c_v}{c_v^0}$$

Здесь $\lambda_0, \mu_0, \rho_0, \alpha_T^0, \lambda_T^0, c_v^0$ – характерные величины.

Подставляя выражения (2.3) и (2.4) в уравнения (2.1), (2.2), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1^*(x), U_3^*(x), T^*(x)$

$$A\mathbf{F}'' + B\mathbf{F}' + C\mathbf{F} = 0 \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{F} = (U_1^*, U_3^*, T^*)^T$$

$$A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \quad B = \|b_{\alpha\beta}\|, \quad C = \|c_{\alpha\beta}\|; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$$a_{11} = \mu^*, \quad a_{22} = l\lambda^* + 2\mu^*, \quad a_{33} = \lambda_T^*$$

$$b_{11} = \mu^{*'}, \quad b_{12} = s_1(l\lambda^* + \mu^*), \quad b_{13} = b_{31} = 0$$

$$b_{21} = s_1(l\lambda^* + \mu^*), \quad b_{22} = l\lambda^{*'} + 2\mu^{*'}, \quad b_{23} = -l_1\beta^*, \quad b_{32} = s\beta^*, \quad b_{33} = \lambda_T^{*'} \quad (2.6)$$

$$c_{11} = q_0\rho^* + s_1^2(l\lambda^* + 2\mu^*), \quad c_{12} = s_1\mu^{*'}, \quad c_{13} = -s_1l_1\beta^*$$

$$c_{21} = s_1l\lambda^{*'}, \quad c_{22} = q_0\rho^* + s_1^2\mu^*, \quad c_{23} = -l_1\beta^{*'}$$

$$c_{31} = ss_1\beta^*, \quad c_{32} = 0, \quad c_{33} = q_1c_v^* + s_1^2\lambda_T^*$$

$$\beta^* = 3\alpha_T^* \left[l\lambda^* + \frac{2}{3}\mu^* \right], \quad l = \frac{\lambda_0}{\mu_0}, \quad l_1 = \alpha_T^0 T_0$$

$$s = i \frac{\omega H^2 \alpha_T^0 \mu_0}{\lambda_T^0}, \quad s_1 = ik_{21}^1 H, \quad q_0 = \frac{\rho_0 \omega^2 H^2}{\mu_0}, \quad q_1 = i \frac{\omega H^2 c_v^0}{\lambda_T^0}$$

Штрихом обозначена производная по x .

Скорость частиц жидкости в нижнем ($j = 1$) и верхнем ($j = 2$) полупространствах представим в виде

$$\mathbf{v}_j = \text{grad}(\Psi_j + \Phi_j), \quad j = 1, 2$$

Потенциалы скоростей звуковых Ψ_j и тепловых Φ_j волн – решения следующих уравнений:

$$\Delta \Psi_j + k_{j1}^2 \Psi_j = 0, \quad \Delta \Phi_j + k_{j2}^2 \Phi_j = 0; \quad j = 1, 2$$

где $\Psi_2 = \Psi_i + \Psi_s$, Ψ_s – потенциал скоростей отраженной звуковой волны, k_{j1} , k_{j2} – волновые числа звуковых и тепловых волн соответственно. При этом

$$k_{jl}^2 = \frac{-M_j - (-1)^l \sqrt{M_j^2 + 4L_j N_j}}{2N_j}, \quad j, l = 1, 2$$

где

$$L_j = \frac{\omega^2}{c_j^2} \gamma_j, \quad M_j = \left(1 - \frac{i\omega\chi_j}{c_j^2} \right) \gamma_j, \quad N_j = \frac{i\chi_j}{\omega}$$

γ_j – отношение удельных теплоемкостей жидкости при постоянных давлении и объеме, χ_j – коэффициент температуропроводности жидкости.

Потенциалы скоростей прошедших через слой и отраженных от слоя волн будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_1 \exp\{i[k_{11}^1 x_1 + k_{11}^3(x_3 - H)]\} \\ \Psi_s &= A_2 \exp\{i[k_{21}^1 x_1 - k_{21}^3(x_3 + H)]\} \\ \Phi_j &= B_j \exp\{i[k_{j2}^1 x_1 - (-1)^j k_{j2}^3(x_3 + (-1)^j H)]\}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где k_{jl}^i ($j, l = 1, 2; i = 1, 3$) – проекция волнового вектора \mathbf{k}_{jl} на ось x_i , $(k_{jl}^1)^2 + (k_{jl}^3)^2 = k_{jl}^2$.

Согласно закону Снеллиуса $k_{11}^1 = k_{12}^1 = k_{21}^1 = k_{22}^1$.

Коэффициенты A_j, B_j ($j = 1, 2$) подлежат определению из граничных условий, заключающихся в равенстве нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости на обеих поверхностях плоского слоя, отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, в непрерывности акустической температуры и теплового потока на поверхностях слоя:

$$\begin{aligned} x_3 = (-1)^{j-1} H: \quad -i\omega u_3 = v_{jn}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_j \\ T = T_j, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x_3} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x_3}; \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_{jn} &= \frac{\partial(\Psi_j + \Phi_j)}{\partial x_3}, \quad p_j = i\omega p_j(\Psi_j + \Phi_j) \\ T_j &= \frac{1}{\alpha_j} \left[\frac{i\omega \gamma_j}{c_j^2} (\Psi_j + \Phi_j) + \frac{i}{\omega} \Delta(\Psi_j + \Phi_j) \right]; \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

где v_{jn} – нормальные компоненты скоростей частиц жидкости, p_j – акустические давления, T_j – акустические температуры, α_j и λ_j – коэффициенты температурного расширения и теплопроводности соответственно в нижнем ($j = 1$) и верхнем ($j = 2$) полупространствах.

Подставив выражения (1.1), (2.3), (2.4) и (2.7) в граничные условия (2.8), получим систему десяти уравнений, из которых находим выражения для коэффициентов A_j, B_j ($j = 1, 2$):

$$\mathbf{X}_j = E_j \mathbf{Y} \Big|_{x = (-1)^{j-1}}, \quad j = 1, 2 \quad (2.9)$$

и шесть условий для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (2.5):

$$(\mathbf{A}\mathbf{F}' + G_j \mathbf{F}) \Big|_{x = (-1)^{j-1}} = \mathbf{D}_j, \quad j = 1, 2 \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{X}_j = (A_j, B_j)^T, \quad \mathbf{Y} = (U_3^*, T^*, A_i)^T, \quad \mathbf{D}_j = (0, d_2 \delta_{j2}, d_3 \delta_{j2})^T$$

$$E_j = \left\| \begin{array}{ccc} e_{11}^j & e_{12}^j & e_{13}^2 \delta_{j2} \\ e_{21}^j & e_{22}^j & e_{23}^2 \delta_{j2} \end{array} \right\|, \quad G_j = \|g_{\alpha\beta}^j\|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Здесь

$$d_2 = -\frac{i\omega\rho_2}{\mu_0}(1 + e_{13}^2 + e_{23}^2)A_i, \quad d_3 = -z_2[\xi_{21}k_{21}^3(1 - e_{13}^2) - \xi_{22}k_{22}^3e_{23}^2]A_i$$

$$e_{11}^j = (-1)^j \frac{\xi_{j2}\omega H}{w_j}, \quad e_{12}^j = \frac{ik_{j2}^3\alpha_j T_0}{w_j}, \quad e_{13}^2 = \frac{\xi_{22}k_{21}^3 + \xi_{21}k_{22}^3}{w_2}$$

$$e_{21}^j = (-1)^{j-1} \frac{\xi_{j1}\omega H}{w_j}, \quad e_{22}^j = -\frac{ik_{j1}^3\alpha_j T_0}{w_j}, \quad e_{23}^2 = -\frac{2\xi_{21}k_{21}^3}{w_2}$$

$$w_j = \xi_{j2}k_{j1}^3 - \xi_{j1}k_{j2}^3, \quad z_j = \frac{\lambda_j H}{\lambda_T^0 \alpha_j T_0}, \quad \xi_{jl} = \frac{\omega\gamma_j}{c_j^2} - \frac{k_{jl}^2}{\omega}, \quad l = 1, 2$$

$$g_{11}^j = g_{13}^j = g_{31}^j = 0, \quad g_{12}^j = s_1\mu^*$$

$$g_{21}^j = s_1 l \lambda^*, \quad g_{2\gamma}^j = \frac{i\omega\rho_j}{\mu_0}(e_{1,\gamma-1}^j + e_{2,\gamma-1}^j) - l_1 \beta^* \delta_{\gamma 3}$$

$$g_{3\gamma}^j = (-1)^{j-1} z_j (\xi_{j2}k_{j2}^3 e_{2,\gamma-1}^j + \xi_{j1}k_{j1}^3 e_{1,\gamma-1}^j), \quad \gamma = 2, 3$$

Из системы (2.9) следует, что коэффициенты A_j, B_j могут быть вычислены лишь после определения значений функций $U_3^*(x), T^*(x)$ на поверхностях слоя.

3. Решение краевой задачи методом сплайн-коллокации. Для нахождения функций U_3^*, T^* необходимо решить краевую задачу (2.5), (2.10). Решение этой задачи найдем методом сплайн-коллокации [8]. Введем на отрезке $[-1, 1]$ равномерную сетку $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ с шагом h . Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$ дефекта 1 с узлами на сетке. Здесь S_1, S_2, S_3 – сплайн-функции, приближающие функции U_1^*, U_3^*, T^* соответственно.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических В-сплайнов [8]

$$S_i(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} b_k^i B_k(x), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

где b_k^i – коэффициенты разложения, которые подлежат определению, $B_k(x)$ – базисная сплайн-функция, определенная на интервале-носителе со средним узлом x_k . Для того чтобы все базисные функции в (3.1) были определены, сетка должна быть дополнена узлами

$$x_{j-3} = x_0 + (j-3)h, \quad x_{N+3-j} = x_N + (3-j)h, \quad j = 0, 1, 2$$

Потребуем, чтобы сплайны $S_i(x)$ удовлетворяли системе (2.5) и краевым условиям (2.10) в узлах коллокации, совпадающих с узлами введенной сетки. Используя выраже-

ния для узловых значений В-сплайна и его производных [8], получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения

$$P_0 \mathbf{b}_0 = \mathbf{S}_0, \quad Q_k \mathbf{b}_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad R_N \mathbf{b}_N = 0$$

$$\mathbf{b}_k = (b_{k-1}^1, b_{k-1}^2, b_{k-1}^3, b_k^1, b_k^2, b_k^3, b_{k+1}^1, b_{k+1}^2, b_{k+1}^3)^T \quad (3.2)$$

где \mathbf{S}_0 – вектор, состоящий из трех компонент, в котором первая компонента равна нулю, P_0, Q_k, R_N – матрицы размерности 3×9 .

Решив систему (3.2), состоящую из $3N + 9$ уравнений относительно $3N + 9$ неизвестных коэффициентов, и подставив найденные значения в выражения (3.1), найдем приближенное решение краевой задачи.

Определив по выражениям (2.9) коэффициенты для отраженных и прошедших волн, получим аналитическое описание волновых полей вне термоупругого слоя по формулам (2.7).

4. Решение краевой задачи методом степенных рядов. Построим приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.5), (2.10), применяя метод степенных рядов [9]. При этом необходимо выполнение требований, чтобы на отрезке $[-1, 1]$ функции $\rho^*(x)$ и $c_v^*(x)$ были непрерывны со своей производной, а функции $\lambda^*(x), \mu^*(x), \alpha_T^*(x), \lambda_T^*(x)$ были непрерывны и имели непрерывные производные до второго порядка включительно. Предположим, что все эти функции, а также функция $\beta^*(x)$ имеют вид многочленов относительно x (или аппроксимированы такими многочленами)

$$\rho^*(x) = \sum_{m=0}^R \rho^{(m)} x^m, \quad \lambda^*(x) = \sum_{m=0}^R \lambda^{(m)} x^m, \quad \mu^*(x) = \sum_{m=0}^R \mu^{(m)} x^m$$

$$c_v^*(x) = \sum_{m=0}^R c_v^{(m)} x^m, \quad \beta^*(x) = \sum_{m=0}^R \beta^{(m)} x^m \quad (4.1)$$

$$\alpha_T^*(x) = \sum_{m=0}^R \alpha_T^{(m)} x^m, \quad \lambda_T^*(x) = \sum_{m=0}^R \lambda_T^{(m)} x^m$$

где R – максимальная степень используемых многочленов.

С учетом указанных выше ограничений решение системы (2.5) можно искать в виде рядов

$$U_r^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_r^{(n)} x^n, \quad r = 1, 3; \quad T^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} x^n \quad (4.2)$$

сходящихся на отрезке $[-1, 1]$.

Подставляя ряды (4.1), (4.2) в систему (2.5) и приравнявая нулю коэффициенты при разных степенях x , получим уравнения для определения коэффициентов $U_1^{(n)}, U_3^{(n)}, T^{(n)}$.

Разрешая последние относительно $U_1^{(n+2)}, U_3^{(n+2)}, T^{(n+2)}$, находим

$$\mathbf{F}^{(n+2)} = -\frac{A^{(0)-1}}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{R_1} \{(n+1-m)[(n-m)A^{(m+1)} + B^{(m)}] \times$$

$$\times \mathbf{F}^{(n+1-m)} + C^{(m)} \mathbf{F}^{(n-m)}\}, \quad R_1 = \min\{R, n\} \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{F}^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_3^{(n)}, T^{(n)})^T$$

Элементы матриц $A^{(m)}$, $B^{(m)}$, $C^{(m)}$, кроме

$$b_{11}^{(m)} = (m+1)\mu^{(m+1)}, \quad b_{22}^{(m)} = (m+1)(l\lambda^{(m+1)} + 2\mu^{(m+1)}), \quad b_{33}^{(m)} = (m+1)\lambda_T^{(m+1)}$$

$$c_{12}^{(m)} = s_1(m+1)\mu^{(m+1)}, \quad c_{21}^{(m)} = s_1 l(m+1)\lambda^{(m+1)}, \quad c_{23}^{(m)} = -l_1(m+1)\beta^{(m+1)}$$

определяются по формулам, аналогичным (2.6), при замене индекса звездочка на индекс (m) .

Заметим, что при $m > R$ коэффициенты $\rho^{(m)}$, $c_v^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$, $\alpha_T^{(m)}$, $\lambda_T^{(m)}$, $\beta^{(m)}$ обращаются в нуль.

Рекуррентные соотношения (4.3) позволяют вычислить все коэффициенты разложения (4.2), за исключением $\mathbf{F}^{(0)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$. Коэффициенты $\mathbf{F}^{(0)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$ легко определить, если использовать сведение краевой задачи (2.5), (2.10) к задачам Коши.

Пусть $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_6$ образуют фундаментальную систему решений уравнений (2.5) на интервале $(-1, 1)$. В качестве фундаментальной системы решений можно выбрать любые шесть решений задачи Коши для системы (2.5) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми. Такими начальными условиями могут быть следующие:

$$\mathbf{F}_\tau = (\delta_{1\tau}, \delta_{2\tau}, \delta_{3\tau})^T, \quad \mathbf{F}'_\tau = (\delta_{4\tau}, \delta_{5\tau}, \delta_{6\tau})^T, \quad \tau = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.4)$$

где τ – порядковый номер задачи Коши, а в качестве начальной точки можно взять точку $x = 0$. Тогда решением \mathbf{F} краевой задачи будет любая линейная комбинация

$$\mathbf{F} = \sum_{\tau=1}^6 C_\tau \mathbf{F}_\tau \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{F}_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_\tau^{(n)} x^n, \quad \mathbf{F}_\tau^{(n)} = (U_{1\tau}^{(n)}, U_{3\tau}^{(n)}, T_\tau^{(n)})^T \quad (4.6)$$

Из соотношений (4.4) и (4.6) получим (для задачи Коши с номером τ)

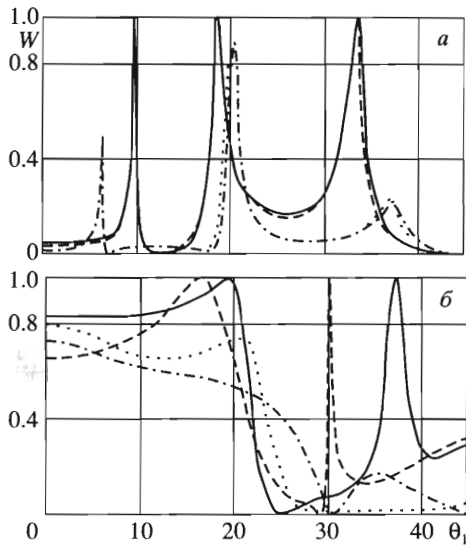
$$\mathbf{F}_\tau^{(n)} = (\delta_{1\tau}, \delta_{2\tau}, \delta_{3\tau})^T, \quad \mathbf{F}'_\tau^{(1)} = (\delta_{4\tau}, \delta_{5\tau}, \delta_{6\tau})^T, \quad \tau = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.7)$$

Таким образом, коэффициенты $\mathbf{F}_\tau^{(n)}$ в разложении (4.6) вычисляются по формулам (4.3), (4.7).

Подставив выражение (4.5) в граничные условия (2.10), получим систему шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_τ ($\tau = 1, 2, \dots, 6$)

$$\sum_{\tau=1}^6 C_\tau (A\mathbf{F}'_\tau + G_j \mathbf{F}_\tau) \Big|_{x=(-1)^{j-1}} = \mathbf{D}_j, \quad j = 1, 2 \quad (4.8)$$

После нахождения коэффициентов C_τ получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.5), (2.10) в виде (4.5).



Фиг. 1

5. Результаты расчетов. На основе полученного решения задачи проведены расчеты коэффициента прозрачности по интенсивности

$$W = \frac{\rho_1 c_2 |A_1|^2}{\rho_2 c_1 |A_i|^2}$$

для пластин в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = c_2 = 1485 \text{ м/с}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.1 \times 10^{-4} \text{ 1/К}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.59 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\chi_1 = \chi_2 = 1.43 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.006$, $T_0 = 293 \text{ К}$). Амплитуда падающей звуковой волны полагалась равной единице, а типы материала пластин определялись физико-механическими характеристиками, приведенными в таблице.

Материал типа А по своим физико-механическим характеристикам сходен с металлами (алюминий), а материал типа Б – с полимерами (поливинилбутираль).

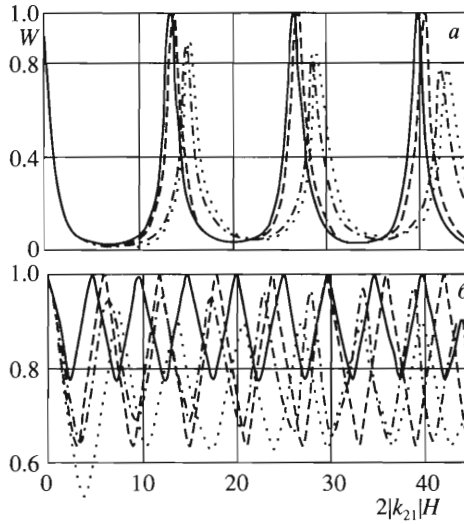
Расчеты проводились как для однородных материалов, так и для материалов, безразмерная плотность которых меняется по толщине слоя по линейному закону: $\rho^*(x) = a(1.1 + x)$. При этом множитель a выбран так, чтобы среднее значение функции $\rho^*(x)$ по толщине слоя было равно единице.

Для оценки влияния термоупругости материала пластин на прохождение звука расчеты выполнялись и для упругих пластин при изотермическом процессе.

Краевая задача (2.5), (2.10) решалась двумя способами: методом сплайн-коллокации и методом степенных рядов. Результаты вычислений, полученные двумя способами, показали хорошее совпадение.

На фиг. 1 представлены зависимости коэффициента прозрачности W от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta_1 \leq 50^\circ$ при фиксированном волновом размере пласти-

Тип материала	$\lambda_0, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$\mu_0, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$\rho_0, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_v^0, \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$	$\alpha_T^0, \frac{1}{\text{К}}$	$\lambda_T^0, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
А	$5.6 \cdot 10^{10}$	$2.6 \cdot 10^{10}$	2700	$2.3 \cdot 10^6$	$25.5 \cdot 10^{-6}$	236
Б	$3.9 \cdot 10^9$	$9.8 \cdot 10^8$	1070	$1.2 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	0.2



Фиг. 2

ны $2|k_{21}|H = 8.5$. Здесь и далее сплошные линии соответствуют однородному упругому материалу, штриховые – однородному термоупругому, штрихпунктирные – неоднородному упругому, пунктирные – неоднородному термоупругому. Сравнение графиков на фиг. 1 для материала типа А показывает слабое влияние на угловые зависимости термоупругости материала. Влияние неоднородности плотности материала сказывается, во-первых, в некотором снижении как максимумов угловых характеристик, так и их среднего уровня, во-вторых, в смещении положений максимумов коэффициента прозрачности. Так, первый максимум смещается в область меньших углов падения, следующие два – в область больших углов падения.

Термоупругость материала типа Б заметно влияет на прохождение звука, что иллюстрируют зависимости, приведенные в нижней части фиг. 1. Это проявляется в отчетливом смещении резонансных пиков угловых характеристик в область меньших углов падения. При этом в случае пластины с переменной плотностью резонансный пик смещается более значительно. Анализ графиков для упругих и термоупругих пластин показывает, что линейный закон изменения плотности материала сглаживает угловые зависимости. Для кривых, соответствующих неоднородному материалу, характерно уменьшение глобальных максимумов почти на 20–30%. Кроме того, в пределах исследуемой области углов падения на характеристиках наблюдается только один резонансный пик (для упругого слоя – вблизи угла $\theta_1 = 35^\circ$, для термоупругого слоя – вблизи угла $\theta_1 = 20^\circ$). При этом высота пика в термоупругом случае примерно в 4.5 раза больше по сравнению с упругим случаем. Последняя особенность угловой характеристики коэффициента прозрачности, построенной для неоднородного термоупругого материала, обусловлена взаимным влиянием неоднородности и термоупругости материала типа Б.

На фиг. 2 представлены зависимости коэффициента прозрачности от волнового числа в интервале $0 < 2|k_{21}|H \leq 45$ при нормальном падении звуковой волны. Видно, что в области низких частот ($2|k_{21}|H < 1$) на прохождение звука не влияет ни термоупругость, ни неоднородность материала. По мере увеличения волнового числа влияние как термоупругости, так и неоднородности все заметнее сказывается в смещении резонансов в область более высоких частот. При этом степень влияния термоупругости материала типа Б выражена сильнее. Графики, построенные для однородного материала, показывают,

что на резонансных частотах слой оказывается полностью прозрачным для падающей звуковой волны. Переменная плотность материала приводит к некоторому уменьшению значений максимумов частотных характеристик.

Из сравнения графиков, представленных на верхней (материал типа А) и нижней (материал типа Б) частях фиг. 2, следует, что в рассматриваемом диапазоне частот для кривых, соответствующих материалу типа Б, характерно большее количество резонансных пиков и значительное сужение диапазона изменения коэффициента прозрачности. Особенностью влияния на частотные зависимости термоупругости материала типа Б является уменьшение минимальных значений коэффициента прозрачности в межрезонансной области. Наиболее ярко это проявляется в однородном случае, где минимальный уровень коэффициента W снижается почти на 60%. Схожая особенность влияния на зависимости $W(2|k_{21}|H)$ свойственна и неоднородному материалу рассматриваемого типа. Однако в поведении кривой, рассчитанной для случая термоупругого слоя, наблюдается также взаимное влияние неоднородности и термоупругости материала. Так, в интервале $20 \leq 2|k_{21}|H \leq 45$ минимальные значения характеристик, соответствующих однородному и неоднородному термоупругим материалам, почти выравниваются. Кроме того, из сравнения графиков для упругой и термоупругой пластин с переменной плотностью видно, что в термоупругом случае значения локальных максимумов частотной характеристики несколько меньше.

Таким образом, анализ результатов численных расчетов показывает, что термоупругость материала слоя, как и его неоднородность, заметно влияет на прохождение звука, причем степень этого влияния существенно зависит от типа материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 212–218.
2. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 740–744.
3. Толоконников Л.А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029–1035.
4. Толоконников Л.А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.
5. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973 = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.