

УДК 624.042.8:534.1

© 2006 г. С. Н. Гаврилов

**ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ,
ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО СТРУНЕ НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ**

Получено простое по форме и физически наглядное асимптотическое решение задачи о движении (без трения) материальной точки под действием заданной внешней силы по струне на винклеровском основании, при учете силы волнового сопротивления движению. Показано, что материальная точка движется вдоль струны так, как двигалась бы точка с переменной, зависящей от скорости массой под действием только внешней силы (без учета силы сопротивления).

Задача о движении по струне материальной точки под действием заданной внешней силы, когда продольная компонента силы взаимодействия между точкой и струной представляет собой так называемую силу вибрационного давления [1–3] (силу волнового сопротивления движению), рассматривалась ранее [4–7] в разных постановках. Однако для докритического режима движения были получены лишь частные результаты, причем в громоздкой форме, что связано с необходимостью исследования нелинейной нестационарной задачи для уравнения в частных производных. Заметим, что задачи со сходной математической формулировкой могут возникать в теории фазовых переходов в упругих телах (в приближении малых деформаций) и теории дислокаций [8, 9].

Ниже получено простое по форме асимптотическое решение задачи с нулевыми начальными условиями, допускающее наглядное физическое истолкование. В случае ненулевых начальных условий задачу также удастся существенно упростить. Решение основано на результатах асимптотического анализа движения данной системы при заданном законе движения материальной точки [10]; получены обобщения этих результатов. Среди работ по данной тематике следует отметить также исследования [11, 12] более простых частных случаев задачи, рассмотренной в [10].

Отдельно рассматривается движение материальной точки по струне без упругого основания. Показано, что сила волнового сопротивления в этом случае ведет себя как сила вязкого трения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим натянутую прямолинейную в недеформированном состоянии струну на винклеровском упругом основании. По струне движется без трения материальная точка, к которой приложена заданная внешняя сила.

Введем обозначения: \mathbf{e}_\parallel , \mathbf{e}_\perp – орты, связанные с направлением струны и некоторым перпендикулярным к нему направлением соответственно, $u(x, t)\mathbf{e}_\perp$ – поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t , T_0 – сила натяжения невозмущенной струны, ρ – погонная плотность струны, $c = \sqrt{T_0/\rho}$ – скорость звука (критическая скорость), $l(t)$ – координата материальной точки, $k_0 = T_0k > 0$ – коэффициент упругости основания, $\mathbf{f}_0 = T_0(f_\parallel\mathbf{e}_\parallel + f_\perp\mathbf{e}_\perp)$ – заданная внешняя сила, действующая на материальную точку, $\mathbf{F}_0 = T_0(F_\parallel\mathbf{e}_\parallel + F_\perp\mathbf{e}_\perp)$ – сила, действующая на струну со стороны материальной точки, $m_0 = T_0m$ – масса материальной точки. Скачок и среднее значение произвольной величины ζ , разрывной при $x = l(t)$, будем обозначать как $[\zeta]$ и $\langle \zeta \rangle$ соответственно.

Рассмотрим докритический режим движения материальной точки вдоль струны ($|\dot{l}| < c$ при всех t). Поперечные перемещения точек струны должны удовлетворять уравнению

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} - ku = -F_{\perp}\delta(x-l(t)) \quad (1.1)$$

Уравнения поперечных колебаний материальной точки и ее продольного движения вдоль струны имеют вид

$$m d^2 u(l(t), t) / dt^2 = f_{\perp} - F_{\perp}, \quad m \dot{l} = f_{\parallel} - F_{\parallel} \quad (1.2)$$

Продольная сила ($-F_{\parallel}$), действующая на материальную точку со стороны струны, представляет собой силу волнового сопротивления движению [1–3, 8, 13]

$$-F_{\parallel} = -\kappa^2 [u'^2] / 2, \quad \kappa = \kappa(t) = \sqrt{1 - (\dot{l}(t))^2 / c^2} \quad (1.3)$$

Природа этой силы вызывала дискуссии [8, 13, 14] и здесь обсуждаться не будет.

Рассмотрим произвольные достаточно гладкие начальные условия для перемещений u , ненулевые лишь на компактном подмножестве вещественной оси. Соответственно будем требовать, чтобы $u \equiv 0$ для всех достаточно больших $|x|$ для любого конечного t . Будем полагать, что

$$l(0) = 0, \quad \dot{l}(0) = v_0, \quad |v_0| < c \quad (1.4)$$

Положим

$$f_{\perp} = O(\epsilon), \quad f_{\parallel} = O(\epsilon^2) \quad (1.5)$$

(ϵ – формальный малый параметр). Будем полагать также, что силы f_{\perp}, f_{\parallel} – (не строго) монотонные медленно меняющиеся функции времени

$$f_{\perp} = O(\epsilon^2), \quad f_{\parallel} = O(\epsilon^2) \quad (1.6)$$

Было показано [13], что приведенная выше формулировка задачи для уравнений (1.1)–(1.2) вытекает из полной геометрически нелинейной постановки задачи при условиях (1.5) и является корректной только при выполнении этих условий. Если продольная сила f_{\parallel} достаточно велика, так что второе соотношение (1.5) не выполняется, то вместо уравнения (1.1) следует рассматривать систему из двух связанных между собой уравнений, описывающих поперечные и продольные движения струны соответственно. При выполнении условий (1.5) продольная динамика струны может быть рассмотрена независимо после решения задачи для уравнений (1.1), (1.2).

Цель исследования – определение закона движения $l(t)$ материальной точки. Сформулированная задача является нестационарной (движение происходит с переменной скоростью) и нелинейной (в силу второго уравнения (1.2)).

Решение уравнения (1.1) можно представить как

$$u = u_{\text{ext}} + u_{\text{int}} \quad (1.7)$$

где u_{ext} – вклад от ненулевых начальных условий, u_{int} – вклад от правой части уравнения (1.1), удовлетворяющий нулевым начальным условиям. Из уравнения (1.1) следует, что

$$-F_{\perp} = \kappa^2 [u'] \quad (1.8)$$

Поэтому второе уравнение (1.2) может быть переписано в эквивалентной форме

$$m\dot{l} = F_{\perp} \langle u' \rangle + f_{\parallel} \tag{1.9}$$

Если начальные данные достаточно гладкие, то решение u_{ext} также гладкое ($[u'_{\text{ext}}] = 0$). Следовательно,

$$m\dot{l} = \Phi_{\text{int}} + \Phi_{\text{ext}} + f_{\parallel}; \quad \Phi_{\text{int}} = F_{\perp} \langle u'_{\text{int}} \rangle, \quad \Phi_{\text{ext}} = F_{\perp} u'_{\text{ext}} \tag{1.10}$$

Слагаемое Φ_{int} в правой части уравнения (1.10) отвечает за самовоздействие (взаимодействие материальной точки с полем, порожденным ею самой), Φ_{ext} – за взаимодействие с внешним полем. Используя выражение (1.8), можно показать, что

$$\Phi_{\text{int}} = -\kappa^2 [u'_{\text{int}}]^2 / 2 \tag{1.11}$$

Заметим, что $\Phi_{\text{int}} \equiv 0$, если $\dot{l} = 0$ для всех $t > 0$, так как $[u'_{\text{int}}] \equiv 0$ в силу симметрии решения уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями.

Ниже будет изучен эффект самовоздействия, т.е. будет исследовано влияние силы волнового сопротивления Φ_{int} на продольное движение материальной точки.

2. Решение задачи при заданном законе движения материальной точки. В этом разделе будем полагать, что $u_{\text{ext}} = 0$, так что $u \equiv u_{\text{int}}$. Для решения поставленной задачи о движении материальной точки под действием заданной внешней силы используем результаты, полученные [10] для случая заданного закона $l(t)$ движения материальной точки по струне. Асимптотическое решение было построено на основе предположений о (нестрогой) монотонности функции $\dot{l}(t)$ и о совместном выполнении требований

$$\dot{l} = O(\varepsilon^2), \quad t = O(\varepsilon^{-2}), \quad |\dot{l}| = \left| \int_0^t \ddot{l}(\zeta) d\zeta \right| < c \tag{2.1}$$

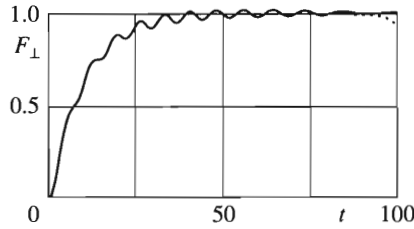
Использовался подход, основанный на асимптотических методах стационарной фазы и многих масштабов. Ниже кратко приводятся основные формулы, полученные ранее [10], а также даются некоторые необходимые обобщения этих формул. Отметим, что введенному прежде [10] малому параметру ε в обозначениях данной работы соответствует величина ε^2 .

Рассмотрим движущуюся вместе с материальной точкой систему координат $\xi = x - l(t)$, $\tau = t$. Решение задачи $u(\xi, \tau)|_{\xi=0}$ аппроксимируется суммой мод колебаний $w_{\delta}^{\Omega}(0, \tau)$ с частотами $\delta\Omega$, $\delta = \pm 1$, $\Omega \in \sigma$, где σ – набор неотрицательных частот (быть может, медленно меняющихся), характерных для данной системы. В данном случае таких частот две: медленно меняющаяся частота собственных локализованных колебаний $\Omega_0 = \Omega_0(\tau)$, причем

$$\Omega_0^2 = 2 \frac{\sqrt{1 + m^2 c^4 \kappa^2 k} - 1}{m^2 c^2} \tag{2.2}$$

и нулевая частота, отвечающая вкладу от внешней медленно меняющейся силы f_{\perp} , т.е. $\sigma = \{\Omega_0, 0\}$.

Амплитуды колебаний – также медленно меняющиеся функции.



При условиях (2.1) вертикальное движение материальной точки описывается соотношением [10]

$$w(0, \tau) = \frac{C_0 c \kappa}{\sqrt{\Omega_0(m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2)}} \cos \left(\int_0^{\tau} \Omega_0(\zeta) d\zeta - D_0 \right) + \frac{f_{\perp}}{2\kappa\sqrt{k}} + O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

В частном случае $f_{\perp}(t) = f_0 H(t)$ [10], где $H(t)$ – функция Хевисайда, имеем

$$C_0 = f_0 Z, \quad Z = -\frac{mc\sqrt{\Omega_0(0)}}{\kappa(0)\sqrt{(m^2 c^2 \Omega_0^2(0) + 2)}}, \quad D_0 = 0 \quad (2.4)$$

В более общем случае предположим, что медленно меняющаяся функция $f_{\perp}(t)$ равна нулю при $t < 0$, ограничена и имеет преобразование Фурье

$$f_{\perp}^F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\perp}(t) \exp(i\Omega t) dt \quad (2.5)$$

(понимаемое, если необходимо, в обобщенном смысле). Если $f_{\perp}^F(\Omega)$ не имеет особенностей в некоторой окрестности каждой точки на вещественной оси, за исключением, быть может, точки нуль, то, действуя аналогично описанному ранее [10], получим

$$C_0 = |\psi| Z, \quad D_0 = \arg \psi, \quad \psi = -i f_{\perp}^F(\Omega_0(0)) \Omega_0(0) \quad (2.6)$$

Например, если

$$f_{\perp}(t) = f_0 H(t) (1 - \exp(-\lambda t)) \quad (2.7)$$

где $f_0 > 0, \lambda > 0$, имеем [15]

$$\psi = \frac{i\lambda f_0}{\Omega_0(0) + i\lambda}; \quad |\psi| = \frac{\lambda f_0}{\sqrt{\Omega_0(0)^2 + \lambda^2}}, \quad \arg \psi = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\lambda}{\Omega_0(0)} \quad (2.8)$$

Численные расчеты, проведенные для случая (2.7) по той же методике, что и ранее [10], полностью подтверждают справедливость формул (2.3), (2.6) (фигура). Штриховая линия – численные результаты для неизвестной функции $F_{\perp}(t)$, определяемой из совместного решения уравнений (1.1) и первого уравнения (1.2) с нулевыми начальными условиями; сплошная – аналитические. Вычисления проводились для следующих значений параметров:

$$c = 1, \quad k = 1, \quad m = 1, \quad \dot{i} = \text{const} = 0.01, \quad f_0 = 1, \quad \gamma = 0.1, \quad f_{\perp} = 1, \quad v_0 = 0$$

Видно, что расхождение графиков асимптотического и численного решений становится заметным лишь при приближении скорости \dot{l} материальной точки к критическому значению c (при $t = 100$).

Для $\xi \neq 0$ решение будем искать в виде [10]

$$w(\xi, \tau) = \sum_{\Omega(0, T) \in \sigma \delta = \pm 1} \sum_{\Omega(0, T) \in \sigma \delta = \pm 1} w_{\delta}^{\Omega}(\xi, \tau) \equiv \sum_{\Omega(0, T) \in \sigma \delta = \pm 1} \sum_{\Omega(0, T) \in \sigma \delta = \pm 1} W_{\delta}^{\Omega}(X, T) \exp \varphi_{\delta}^{\Omega}(\xi, \tau) \quad (2.9)$$

$$X = \varepsilon^2 \xi, \quad T = \varepsilon^2 \tau, \quad (\varphi_{\delta}^{\Omega})'_{\xi} = i \omega_{\delta}^{\Omega}(X, T), \quad (\varphi_{\delta}^{\Omega})'_{\tau} = -i \delta \Omega(X, T)$$

Таким образом, решение при $\xi \neq 0$ аппроксимируется конечной суммой $w(\xi, \tau)$ мод колебаний w_{δ}^{Ω} с медленно меняющимися частотами $\delta \Omega(X, T)$, $\delta = \pm 1$, такими, что функции $\Omega(X, T)$ являются продолжениями на $X \neq 0$ частот $\Omega(T)$ из набора σ . При этом волновые числа $\omega_{\delta}^{\Omega}(X, T)$ (вообще говоря, комплексные) определяются в силу дисперсионного соотношения

$$\omega^2 - 2B(\delta \Omega)\omega + A^2(\delta \Omega) = 0 \quad (2.10)$$

и удовлетворяют уравнению

$$\delta \Omega'_X + \omega'_T = 0 \quad (2.11)$$

вытекающему из двух последних уравнений (2.9). Здесь и далее индексы Ω и δ у волновых чисел ω для краткости опущены. Уравнение (2.10) и условие ограниченности при $\xi \rightarrow \infty$ дают

$$\omega = B(\delta \Omega) + i \operatorname{sign} \xi S(\delta \Omega) \quad (2.12)$$

В уравнениях (2.10), (2.12) использованы обозначения

$$A^2(\Omega) = \kappa^{-2}(k - \Omega^2/c^2), \quad B(\Omega) = \kappa^{-2}c^{-2}\dot{l}\Omega, \quad S^2(\Omega) = A^2(\Omega) - B^2(\Omega) \quad (2.13)$$

Здесь $A(\Omega) > 0$, $S(\Omega) > 0$, если $\Omega^2 < kc^2\kappa^2$. Функция w и производная w'_T должны удовлетворять условиям непрерывности при $\xi \rightarrow \pm 0$. При этом производные W'_X и φ'_{ξ} – вообще говоря, разрывные функции при $\xi = 0$.

Из уравнения (2.3) следует, что

$$W_{\delta}^{\Omega_0}(0, T) = C_0 \frac{c\kappa}{2\sqrt{\Omega_0(m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2)}}, \quad W_{\delta}^0(0, T) = \frac{f_{\perp}}{4\kappa\sqrt{k}} \quad (2.14)$$

Используя представление для решения (2.9), (2.10) и применяя метод многих масштабов, можно получить следующее выражение для $(W_{\delta}^{\Omega})'_X$ при $X = \pm 0$ [10]:

$$W'_X|_{X=\pm 0} = -\frac{\operatorname{sign} X}{2iS(\delta \Omega)c^2\kappa^2}(F_0 + F_1 + F_2) + o(\varepsilon^2) \quad (2.15)$$

$$F_0 = \dot{l}\omega W, \quad F_1 = 2(\dot{l}\omega + \delta \Omega)W'_T, \quad F_2 = (-c^2\kappa^2\omega'_{\delta\Omega}\omega'_T + 2i\omega'_T + \delta \Omega'_T)W$$

В формулах (2.15) индексы Ω и δ у функции W для краткости опущены.

Заметим, что соотношения (2.15) ранее были получены [10] только для амплитуды W^{Ω_0} локализованной моды колебаний. Их вывод для амплитуды W^0 моды с нулевой частотой аналогичен.

Вычислим силу волнового сопротивления (1.3), используя представление для решения (2.9). При $\xi = \pm 0$ имеем

$$u'^2 \approx 2(w_1^{\Omega_0})'_\xi (w_{-1}^{\Omega_0})'_\xi + 4(w_{\pm 1}^0)'_\xi{}^2 + \Psi$$

$$\Psi = (w_1^{\Omega_0})'_\xi{}^2 + (w_{-1}^{\Omega_0})'_\xi{}^2 + 4(w_{\pm 1}^0)'_\xi (w_{-1}^{\Omega_0})'_\xi + 4(w_{\pm 1}^0)'_\xi (w_1^{\Omega_0})'_\xi$$
(2.16)

Функция Ψ – осциллирующая функция быстрой фазы φ^{Ω_0} с нулевым средним. Поэтому средний вклад от нее за период собственных колебаний равен нулю. Дифференцируя функцию $w_\delta^{\Omega_0}$ по ξ с учетом представлений (2.9) получим

$$[(w_1^{\Omega_0})'_\xi (w_{-1}^{\Omega_0})'_\xi] = i \sum_{\delta = \pm 1} W_\delta [(W_{-\delta}^{\Omega_0})'_\xi \omega_\delta] + o(\varepsilon^2)$$
(2.17)

Здесь учтено, что $[\omega_{-1} \omega_1] = 0$ в силу соотношений (2.12), (2.13).

Рассмотрим теперь установившийся режим движения материальной точки по струне с докритической постоянной скоростью $|\dot{l}| = \text{const} < c$. Пусть также $f_\perp = \text{const}$. В этом случае амплитуды мод $W_\delta^{\Omega_0}$ и W_δ^0 – постоянные. Из соотношений (1.3), (2.16), (2.17) теперь следует, что сила волнового сопротивления в среднем за период собственных колебаний равна нулю. Если же локализованные колебания отсутствуют (первое слагаемое в правой части выражения (2.3) равно нулю), то сила сопротивления равна нулю в точности. Данный эффект – следствие симметрии профиля струны в подвижной системе координат при наличии винклеровского основания. В то же время, в случае ускоренного движения материальной точки ($\dot{l} \neq 0$) профиль струны становится несимметричным, что приводит к появлению волнового сопротивления.

3. Решение задачи при заданной внешней силе. Воспользуемся результатами, полученными для случая заданного закона движения $l(t)$ материальной точки. Именно, выразим силу вибрационного давления Φ_{int} (1.11) через $\dot{l}(t)$ при помощи формул (2.3), (2.9), (2.12), (2.15)–(2.17).

Ниже рассмотрен случай, когда в правой части соотношения (2.3) можно пренебречь первым слагаемым, которое описывает собственные локализованные колебания, по сравнению со вторым (и, как следствие, положить $F_\perp \approx f_\perp$). Это возможно в двух случаях:

1) при $C_0 \approx 0$; в частности, это условие будет выполнено (см. формулу (2.6)) при достаточно малой массе материальной точки m или, если сила f_\perp задается по формуле (2.7) причем коэффициент λ достаточно мал;

2) при скорости $\dot{l}(t)$, достаточно близкой к c (при условии, что ускорение \ddot{l} достаточно мало, так что решение можно считать нерезонансным); в этом случае получим $W_\delta^{\Omega_0}(0, T) \approx 0$ в силу первой формулы (2.14) (см. [10]).

В силу соотношения (2.16) при $\xi = \pm 0$ имеем

$$u_{\text{int}}'^2 \approx w_\xi'^2 = 4(w_{\pm 1}^0)'_\xi{}^2$$
(3.1)

Используя полученный результат совместно с уравнением (1.11), находим

$$\Phi_{\text{int}} = -2\kappa^2 [(w_{\pm 1}^0)'_\xi{}^2]$$
(3.2)

Подставив выражения (2.12), (2.15) в уравнение (2.17) и отбросив малые высших порядков, получим (индексы $\Omega = 0$ и $\delta = \pm 1$ у функции W опущены)

$$[(w_{\pm 1}^0)_{\xi}^2] \approx \frac{W}{S(0)c^2\kappa^2} (i(A^2(0))_T' W + 2iA^2(0)W + 4iA^2(0)W_T') \quad (3.3)$$

Подставляя оценку (3.3) (причем W выражается по второй формуле (2.14)) в равенство (3.2), получим после упрощений

$$\Phi_{\text{int}} = -m\alpha \left(\frac{3i^2}{c^5\kappa^5} + \frac{1}{c^3\kappa^3} \right) \dot{l} - \frac{m\dot{\alpha}i}{c^3\kappa^3}, \quad \alpha = \frac{cf_{\perp}^2}{4m\sqrt{k}} \quad (3.4)$$

Подставляя выражение для Φ_{int} в первое уравнение (1.10) и интегрируя, приходим к окончательному результату

$$(M\dot{l})' = F_{\perp}u'_{\text{ext}} + f_{\parallel}, \quad M = m(1 + \alpha\kappa^{-3}) \quad (3.5)$$

Таким образом, эффект самовоздействия (нелинейного взаимодействия материальной точки с упругим полем, излученным ею самой) приводит к появлению у материальной точки “эффективной массы” M , зависящей от скорости \dot{l} . Величина M обращается в бесконечность при стремлении скорости \dot{l} к критическому значению c . Заметим, что “присоединенная масса” $M - m$ не зависит от m и возникает, таким образом, даже если $m = 0$.

Рассмотрим случай ненулевых начальных условий для u . Величина $F_{\perp}u'_{\text{ext}}$, определяющая взаимодействие материальной точки с полями, вызванными ненулевыми начальными условиями, играет роль дополнительной внешней продольной силы. Для решения задачи необходимо сначала найти u_{ext} . Для этого следует решить уравнение (1.1), положив в нем $F_{\perp} = 0$, с соответствующими начальными условиями. На втором этапе, положив $F_{\perp} = f_{\perp}$, необходимо решить первое уравнение (3.5) и определить тем самым закон движения $l(t)$ материальной точки. На третьем этапе следует решить уравнение (1.1) с нулевыми начальными условиями и определить u_{int} . Таким образом, исследование сводится к решению двух линейных задач для уравнения в частных производных и решению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (первое уравнение (3.5)), что существенно проще исходной задачи.

4. Движение материальной точки по свободной струне. Отдельно рассмотрим случай $k = 0$, соответствующий струне без винклеровского основания. Уравнение Клейна – Гордона (1.1) в этом случае вырождается в волновое уравнение, которое обладает существенно другими свойствами. В первую очередь заметим, что, в отличие от случая $k > 0$, уравнение (1.1) при $k = 0$ не допускает автомодельного решения для случая движения нагрузки $F_{\perp} = \text{const}$ с постоянной скоростью \dot{l} . Прогиб под нагрузкой оказывается линейно растущей функцией времени t , поэтому задача о бесконечной незакрепленной струне, вообще говоря, не вполне корректна. Кроме того, решение u_{int} , в отличие от случая $k > 0$, несимметрично относительно $\xi = 0$ при любой скорости $\dot{l} \neq 0$. Действительно, для любого докритического режима движения нагрузки $l(t)$ имеем ([16], формулы (5)–(7))

$$u'_{\text{int}} = -\frac{F_{\perp}(t')}{2} \left(\frac{H(x - l(t'))}{1 - \dot{l}(t')/c} - \frac{H(l(t') - x)}{1 + \dot{l}(t')/c} \right), \quad t' + \frac{|x - l(t')|}{c} = t \quad (4.1)$$

Принимая во внимание, что $t' = t$ при $\xi = \pm 0$, получим

$$u'_{\text{int}}(t)|_{\xi = \pm 0} = \frac{\mp F_{\perp}(t)}{2(1 \mp \dot{l}(t)/c)} \quad (4.2)$$

Отсюда

$$[u'_{\text{int}}]^2 = \frac{4F_{\perp}^2 \dot{l}}{c^2 k^4} \quad (4.3)$$

Таким образом, $[u'_{\text{int}}]^2 \neq 0$ при $\dot{l} \neq 0$, поэтому, в соответствии с формулой (1.11), на материальную точку всегда действует ненулевая сила волнового сопротивления при любой ненулевой скорости $0 < |\dot{l}| < c$. С этим связано обращение в бесконечность эффективной массы M в решении (3.5) при $k \rightarrow +0$. Напомним, что если условия, при которых справедлива формула (3.5), выполнены и $f_{\perp} = \text{const}$, то при $\dot{l} = \text{const}$ сила сопротивления отсутствует, она возникает лишь как реакция на ненулевое ускорение \ddot{l} материальной точки.

Найдем закон движения материальной точки при $k = 0$. Для простоты ограничимся случаем, когда масса материальной точки достаточно мала, так что можно положить $F_{\perp} \approx f_{\perp}$. Подставляя выражение (4.3) в соотношения (1.10), (1.11), имеем

$$m\ddot{l} + \frac{2f_{\perp}^2}{c^2 k^2} \dot{l} = F_{\perp} u'_{\text{ext}} + f_{\parallel} \quad (4.4)$$

Полученный результат, так же как и формула (4.2), справедлив для любого режима движения $l(t)$, такого, что $|\dot{l}| < c$ при всех t . Итак, в случае $k = 0$ при малых скоростях \dot{l} сила волнового сопротивления ведет себя как сила вязкого трения; при конечных докритических скоростях \dot{l} это трение становится нелинейным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00785-а), Программ фундаментальных исследований РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е.Л. К вопросу о давлении вибраций // Изв. СПб политехн. ин-та. Отдел техники, естествознания и математики. 1912. Т. 18. № 1. С. 49–60.
2. Nicolai E.L. On a dynamical illustration of the pressure of radiation // Phil. Mag. Ser. 6. 1925. V. 49. № 289. P. 171–177.
3. Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863–866.
4. Весницкий А.И., Уткин Г.А. Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 278–279.
5. Андрианов В.Л. О сопротивлении движению нагрузок вдоль упругих направляющих, вызванном излучением в них волн // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 156–160.
6. Лисенкова Е.Е., Маланов С.Б. Движение объекта вдоль струны под действием падающей волны // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 45–50.

7. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 703–706.
8. Gavrilov S.N. Configurational forces in elastic systems with moving loads // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Специальный выпуск “Нелинейные проблемы механики сплошных сред”. 2003. С. 7–14.
9. Gavrilov S.N. Dynamics of a free phase boundary in an elastic bar with variable crosssection area // Proc. of XXXII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics. St. Petersburg, IPME RAS, 2004. P. 156–161.
10. Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании – подвижное инерционное включение” // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 864–873.
11. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Колебания бесконечной струны на деформируемом основании при действии равноускоренно движущейся нагрузки. Переход через критическую скорость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 155–160.
12. Каплунов Ю.Д. Крутильные колебания стержня на деформируемом основании при действии движущейся инерционной нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 174–177.
13. Gavrilov S. Nonlinear investigation of the possibility to exceed the critical speed by a load on a string // Acta Mech. 2002. V. 154. P. 47–60.
14. Денисов Г.Г. К вопросу о давлении волн на преграду в случае поперечных колебаний струны // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 187–192.
15. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
16. Гаврилов С.Н. О преодолении критической скорости подвижной нагрузкой в упругом волноводе // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. № 4. С. 138–140.

Санкт-Петербург
e-mail: serge@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию
4.X.2005