УДК 532.5:534.1

© 2006 г. Д. Д.Захаров

ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ И АНАЛИЗ ИМПЕДАНСНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассматриваются поверхностные и внутренние волны в слоистой идеальной жидкости при заданных перемещениях дна. Верхняя поверхность жидкости либо свободна, либо на ней заданы перемещения. В длинноволновом приближении строятся асимптотически точные модели волн, распространяющихся вдоль поверхностей слоев несжимаемой жидкости как при сильной стратификации (отношение плотностей соседних слоев сопоставимы с малым параметром), так и для слабой стратификации. Исследуется важный случай такой задачи о динамическом контакте прочных тел через слой несжимаемой или сжимаемой жидкости. Строятся импедансные краевые условия высокого порядка, приводятся результаты их тестирования с помощью точных решений.

Для анализа поверхностных волн в одиночном слое ранее использовался метод, основанный на разложении в ряд по степеням малого параметра, которым является отношение толщины слоя к длине волны [1]. Ниже исследуется общий случай произвольного числа слоев на основании асимптотического анализа трехмерной задачи с учетом сильной или слабой стратификации слоев. Граничные условия на верхней поверхности жидкости отвечают либо заданному давлению, либо условию контакта жидкости с жестким покрытием. Результаты аналогичного анализа динамического контакта *прочных* тел через слой несжимаемой или сжимаемой жидкости позволяют построить так называемые *импедансные* краевые условия высокого порядка и существенно сократить размерность задачи в разумном диапазоне частот без потери точности. В отличие от существующих результатов [2–4] выведенные ниже соотношения могут использоваться практически до первого толщинного резонанса слоя. В таких прикладных задачах, как прозвучивание упругих тел ультразвуковыми трансдьюсерами через тонкий слой смазки, это имеет принципиальное значение, так как позволяет перейти к задаче меньшей размерности, комбинируя длинноволновый подход к тонкому слою с рассмотрением коротких волн по отношению к толстым упругим телам. При этом реальные частоты могут быть весьма высокими (при миллиметровых толщинах слоя до десятков и сотен МГц). Полученная асимптотически точная модель может также использоваться в задачах расчета собственных волн и спектров колебаний толстых слоистых тел (полупространств, пластин или весьма пологих оболочек), в которых контакт упругих или вязкоупругих слоев осуществляется через жидкую прослойку. Задачи с начальными условиями не рассматриваются.

1. Слабая стратификация. Пусть имеется N бесконечных горизонтальных слоев несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей, каждый из которых занимает область $-\infty < X_1, X_2 < \infty$, $Z_j \le Z \le Z_{j+1}$ $(j = 1, 2, \dots N)$ и имеет толщину $H_j = Z_{j+1} - Z_j$. Ось $Z = X_3$ направлена против силы тяжести.

Обозначим через $\mathbf{U}_j = (U_1, U_2, U_3)^j$ вектор перемещений точек жидкостей в j-м слое, Ψ_j – потенциалы перемещений, т.е $U_3^j = \partial_{X_3}\Psi_j$, $U_\alpha^j = \partial_{X_\alpha}\Psi_j$. Плотности слоев $\bar\rho_j$ удовлетворяют неравенствам $\bar\rho_1 > \bar\rho_2 > \dots > \bar\rho_N$. Соответственно, $P_j = -\bar\rho_j\partial_T^2\Psi_j$ – давление в слое (T – время). Вертикальное перемещение U_3 при $Z = Z_j$ обозначим ζ_j. Далее, как обычно, рассматриваются только динамические составляющие давления. Потенциалы Ψ_j удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$(\partial^2_{X_1} + \partial^2_{X_2} + \partial^2_{X_3})\Psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{1.1}$$

и условиям на границах раздела слоев $Z = Z_{j+1}$ ($j = 1, 2, \ldots N - 1$), т.е. условиям непрерывности вертикальных перемещений

$$\zeta_{j+1} = \partial_{X_3}\Psi_{j+1} = \partial_{X_3}\Psi_j \tag{1.2}$$

и условиям согласования давлений (с учетом избыточной гравитационной составляющей давления)

$$-\bar{\rho}_{j+1}(\partial^2_T\Psi_{j+1} + \zeta_{j+1}) = -\bar{\rho}_j(\partial^2_T\Psi_j + \zeta_{j+1}) \tag{1.3}$$

На поверхности дна $Z^- \equiv Z_1$ предполагается заданным вертикальное перемещение $\zeta^- \equiv \zeta_1$, т.е.

$$\partial_{X_3}\Psi_1 = \zeta_1 = \zeta^- \tag{1.4}$$

и для первого слоя неизвестной будет функция ζ_2. Аналогично, при нумерации снизу вверх вместе с уравнением для j-го слоя рассматривается новая граница $Z = Z_{j+1}$ и функция ζ_{j+1}.

К граничным условиям (1.2)–(1.4) следует добавить также условие на верхней поверхности $Z^+ \equiv Z_{N+1}$. Таким условием может служить условие на свободной поверхности, т.е. внутреннее давление на поверхности $Z = Z^+$ должно равняться сумме избыточной гравитационной составляющей давления и избыточного атмосферного давления P_0^+ (если оно имеется)

$$-\bar{\rho}_N\partial^2_T\Psi_N = \bar{\rho}_N g\zeta_{N+1} + P_0^+ \tag{1.5}$$

Другой вариант отвечает заданным вертикальным перемещениям на верхней поверхности $Z = Z^+$

$$\partial_{X_3}\Psi_N = \zeta_{N+1} = \zeta^+ \tag{1.6}$$

Уравнения (1.1) и граничные условия (1.2)–(1.5) (или (1.2)–(1.4),(1.6)) отвечают точной постановке задачи распространения волн в описанной слоистой среде под действием возмущения, заданного на верхней и нижней поверхностях. Закон изменения во времени может быть выбран гармонический – как для монохроматических волн, так и в задаче синтеза гармоник.

Выполним теперь преобразование масштабов. Пусть $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_N$ полная глубина слоя жидкости, L – характерный масштаб изменяемости величин в продольном направлении (минимальная длина волны). Введем малый параметр $\varepsilon = H/L \ll 1$ и перейдем к следующим безразмерным величинам:

$$\rho_j = \frac{\bar{\rho}_j}{\bar{\rho}_0},\ t = \frac{T}{T_0},\ z = \frac{Z}{H},\ x_\alpha = \frac{X_\alpha}{L},\ \alpha = 1, 2,\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{H},\ \psi = \frac{\Psi}{H^2},\ \zeta^\pm = \frac{\zeta^\pm}{L},\ p^+ = \frac{P^+}{\bar{\rho}_N C_0^2}$$

$$T_0 = LC_0^{-1}\varepsilon^{1-a/2}, \quad C_0 = \sqrt{gH}$$

где $\bar{\rho}_0$ – некоторая характерная плотность (например, максимальная среди плотностей слоев жидкости), а подлежащий определению параметр a характеризует "динамичность" процесса.

Для основных операторов и перемещений получаем соотношения

$$\partial_Z = H^{-1}\partial_z,\ \partial_{X_\alpha} = L^{-1}\partial_\alpha,\ \partial_T^2 = \varepsilon^a g H^{-1}\partial_t^2,\ \partial_{X_1}^2 + \partial_{X_2}^2 + \partial_{X_3}^2 = H^{-2}(\partial_z^2 + \varepsilon^2\Delta),\ \Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$$

$$u_\alpha = \varepsilon\partial_\alpha\psi,\quad u_3 = \partial_z\psi$$

Приведенные формулы, в частности, явно показывают малость производных в продольном направлении в сравнении с производной в поперечном направлении. Их отношение дает величины порядка ε. Таким образом, предполагается, что производные по безразмерным координатам ∂_α, ∂_z отвечают изменяемости функций одного порядка ($O(1)$, $\varepsilon \to 0$).

Потенциалы, перемещения и давления в слоях представим в виде асимптотических рядов (индекс слоя j в очевидных случаях опускаем)

$$\Psi = H^2\varepsilon^\lambda(\psi^0 + \varepsilon\psi^1 + \ldots)$$

$$U_\alpha = H\varepsilon^{\lambda+1}(u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \ldots),\ U_3 = H\varepsilon^\lambda(u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \ldots),\ P = \bar{\rho}_0 C_0^2\varepsilon^{\lambda+a}(p^0 + \varepsilon p^1 + \ldots)$$

Применительно к сформулированным выше задачам распространения волн выведем упрощенное их описание с одинаковой относительной погрешностью (порядком ε отброшенных членов по отношению к удержанным) для всех физических величин.

Для членов ряда соотношения (1.1)–(1.6) примут следующий рекуррентный вид:

$$\partial_z^2\psi^{l,j} = -\Delta\psi^{l-2,j},\quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} z = z_{j+1}\colon \zeta_{j+1}^l = \partial_z\psi^{l,j+1} = \partial_z\psi^{l,j},\ \rho_{j+1}\partial_t^2\psi^{l-a,j+1} - \rho_j\partial_t^2\psi^{l-a,j} = (\rho_j - \rho_{j+1})\zeta_{j+1}^l, \\ j = 1, 2, \ldots, N-1 \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$z = z^-\colon \partial_z\psi^{l,1} = \delta_{-1}^{\lambda+l}\zeta^- \tag{1.9}$$

$$z = z^+\colon \zeta_{N+1}^l \equiv \partial_z\psi^{l,N} = -\partial_t^2\psi^{l-a,N} - p_0^+\delta_0^{\lambda+l} \tag{1.10}$$

$$z = z^+\colon \partial_z\psi^{l,N} = \delta_{-1}^{\lambda+l}\zeta^+ \tag{1.11}$$

где δ_q^p – символ Кронекера.

Рассмотрим сначала случай *свободной* верхней поверхности жидкости, включая случай заданного на поверхности давления P_0^+. Для искомых членов асимптотического ряда должны выполняться соотношения (1.7)–(1.10). Полагаем, что индекс $l = 0,1$. Тогда из уравнения (1.7) получим $\psi^{l,j} = \psi_0^{l,j} + z\psi_1^{l,j}$, где функции $\psi_0^{l,j}$ и $\psi_1^{l,j}$ не зависят от z. Условия (1.8)–(1.10) дают

$$\zeta_{j+1}^l = \psi_1^{l,j+1} = \psi_1^{l,j} = \delta_{-1}^{\lambda+l}\zeta^-,\quad (\rho_j - \rho_{j+1})\psi_1^{l,j} = 0\ (\text{при } a > 0),\quad \psi_1^{l,N} = 0$$

Эта группа равенств будет непротиворечивой, если $\lambda \neq -1, -2$; $a > 1$ и $\psi_1^{l,j} = 0$ (т.е. $\psi^{l,j} = \psi_0^{l,j}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$).

Из допустимых значений выберем первое значение $\lambda = -3$, позволяющее получить содержательное соотношение на границе, и наименьший возможный масштаб времени $a = 2$ и рассмотрим следующие два члена асимптотического ряда с номерами $l + 2 = 2, 3$. Уравнение (1.7) приводит к равенству

$$\psi^{l+2,j} = \psi_0^{l+2,j} + z\psi_1^{l+2,j} - \frac{z^2}{2}\Delta\psi_0^{l,j} \tag{1.12}$$

где каждая функция с нижним индексом не зависит от z. Из условий (1.8)–(1.10) получаем ($j = 1, 2, \ldots, N-1$)

$$z = z_{j+1}\colon \zeta_{j+1}^{l+2} = \psi_1^{l+2,j+1} - z_{j+1}\Delta\psi_0^{l,j+1} = \psi_1^{l+2,j} - z_{j+1}\Delta\psi_0^{l,j} \tag{1.13}$$

$$z = z_{j+1}\colon \rho_{j+1}\partial_t^2\psi^{l,j+1} - \rho_j\partial_t^2\psi^{l,j} = (\rho_j - \rho_{j+1})\zeta_{j+1}^{l+2} \tag{1.14}$$

$$\zeta_{N+1}^{l+2} = \psi_1^{l+2,N} - z_{N+1}\Delta\psi_0^{l,N} = -\partial_t^2\psi^{l,N} - p^+\delta_0^{\lambda+l}, \quad \psi_1^{l+2,1} - z_1\Delta\psi_0^{l,1} = \delta_{-1}^{\lambda+l+2}\zeta^- \tag{1.15}$$

Отсюда после алгебраических преобразований выводим равенства

$$\zeta_{j+1}^{l+2} - \zeta_j^{l+2} = -h_j\Delta\psi_0^{l,j}, \quad \zeta_1^{l+2} = \delta_{-1}^{l-1}\zeta^- \tag{1.16}$$

$$\rho_j\partial_t^2\psi_0^{l,j} = -\rho_j\zeta_{j+1}^{l+2} - \textstyle\sum_{j+1}\rho_k(\zeta_{k+1}^{l+2} - \zeta_k^{l+2}), \quad \textstyle\sum_{j+1} \equiv \displaystyle\sum_{j+1}^{N} \tag{1.17}$$

дифференцируя которые по координатам и времени, приходим к системе уравнений для функций вертикального перемещения границ раздела

$$\partial_t^2\zeta_j^{l+2} = -h_{j-1}\textstyle\sum_{j+1}\displaystyle\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{j-1}}\Delta\zeta_j^{l+2} + h_{j-1}\frac{\rho_N}{\rho_{j-1}}\Delta\zeta_{N+1}^{l+2} + \partial_t^2\zeta_{j-1}^{l+2}, \quad j = 2, 3, \ldots, N$$

дополненной вторым равенством (1.16).

Приведем итоговый размерный вид главных членов ряда для искомых потенциалов и перемещений

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = L^2(\Psi^0 + \varepsilon\Psi^1), \quad U_\alpha = L(u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1), \quad U_3 = H(u_3^0 + \varepsilon u_3^1) \tag{1.18}$$

Вертикальные перемещения точек жидкости в j-м слое и избыточное давление на границах раздела слоев выражаются через размерные вертикальные перемещения на границах раздела слоев и потенциалы следующим образом:

$$U_3^j = \zeta_{j+1} + \frac{Z - Z_{j+1}}{H_j}(\zeta_{j+1} - \zeta_j), \quad U_\alpha^j = \partial_{X_\alpha}\Psi_j \tag{1.19}$$

$$Z = Z_{j+1}\colon P_{j+1} = g\{\bar\rho_j\zeta_{j+1} + \textstyle\sum_{j+1}\bar\rho_k(\zeta_{k+1} - \zeta_k)\} + P_0^+ \tag{1.20}$$

Потенциалы Ψ_j и вертикальные перемещения ζ_j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\partial_T^2\zeta_j = a_{j-1}^2\left\{\textstyle\sum_j\displaystyle\frac{\bar\rho_{k-1} - \bar\rho_k}{\bar\rho_{j-1}}\Delta_X\zeta_k + \frac{\bar\rho_N}{\bar\rho_{j-1}}\Delta_X\zeta_{N+1} + \frac{P_0^+}{g\bar\rho_{j-1}}\right\} + \partial_T^2\zeta_{j-1}, \quad \zeta_1 = \zeta^- \\ \partial_T^2\Psi_j = -g\zeta_{j+1} - \textstyle\sum_j\displaystyle\frac{\bar\rho_k}{\bar\rho_j}a_k^2\Delta_X\Psi_k \; (a_j^2 \equiv gH_j, \; \Delta_X \equiv \partial_{X_1}^2 + \partial_{X_2}^2)\end{gathered} \tag{1.21}$$

В частных случаях $N = 1$ и $N = 2$ уравнения (1.21) совпадают с известными [5–7].

Перейдем к исследованию случая, когда заданы вертикальные *перемещения* на верхней поверхности многослойной жидкости. Члены асимптотических рядов для искомых величин при этом должны удовлетворять равенствам (1.7)–(1.9) и (1.11). Так как только условия (1.10) заменяются на (1.11), то из остальных условий для членов ряда с номерами $l = 0$, 1 получаем

$$\psi^{l,j} = \psi_0^{l,j}(\mathbf{x}, t), \quad \lambda \neq -1, -2, \quad a > 1$$

Остается аналогичная допустимая комбинация $\lambda = -3$, $a = 2$, и для следующих членов ряда с номерами $l + 2 = 2$, 3 из соотношений (1.7)–(1.9) и (1.11) будем иметь равенства (1.12), (1.14), (1.16) и равенство

$$\zeta_{N+1}^{l+2} = \delta_{-1}^{l-1}\zeta^+$$

Дифференцируя все эти равенства по координатам и времени и складывая, приходим к соотношениям

$$\zeta_j^{l+2} = \delta_{-1}^{l-1}\zeta^+ + \sum_{k=j-1}^{N} h_k\Delta\psi_0^{l,k} = \delta_{-1}^{l-1}\zeta^- - \sum_{k=1}^{j-2} h_k\Delta\psi_0^{l,k}$$

$$\left\{\partial_t^2 + \frac{(\rho_j - \rho_{j-1})h_j h_{j-1}}{\rho_{j-1}h_j + \rho_j h_{j-1}}\right\}\zeta_j^{l+2} = \partial_t^2\left\{\frac{\rho_{j-1}h_j\zeta_{j-1}^{l+2} + \rho_j h_{j-1}\zeta_{j+1}^{l+2}}{\rho_{j-1}h_j + \rho_j h_{j-1}}\right\}$$

Для главных членов ряда (1.18) основные соотношения в размерном виде выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}\partial_T^2\zeta_j = b_j^2\Delta_X\zeta_j + d_j^2\partial_T^2\zeta_{j-1} + e_j^2\partial_T^2\zeta_{j+1}; \quad \zeta_1 = \zeta^-, \quad \zeta_{N+1} = \zeta^+ \\ b_j^2 = g(\bar\rho_{j-1} - \bar\rho_j)H_jH_{j-1}/\chi_j, \; d_j^2 = \bar\rho_{j-1}H_j/\chi_j, \; e_j^2 = \bar\rho_jH_{j-1}/\chi_j, \; \chi_j \equiv \bar\rho_{j-1}H_j + \bar\rho_jH_{j-1}\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\zeta_{j+1} - \zeta_j = -H_j\Delta_X\Psi_j, \quad P_j - P_i = g\sum_{k=i+1}^{j}(\bar\rho_{k-1} - \bar\rho_k)\zeta_k \tag{1.23}$$

Соотношения (1.19) для поперечных и продольных перемещений сохраняются без изменений.

2. Сильная стратификация. Предположим теперь, что отношение плотностей в слоях жидкости имеет порядок малого параметра ε в некоторой степени, т.е.

$$\bar\rho_N : \bar\rho_{N-1} : \ldots : \bar\rho_2 : \bar\rho_1 \sim \varepsilon^{\beta_N} : \varepsilon^{\beta_N} : \ldots : \varepsilon^{\beta_2} : \varepsilon^{\beta_1}$$

$$\beta_N \geq \beta_{N-1} \geq \ldots \geq \beta_2 \geq \beta_1 \geq 0, \quad \delta_j \equiv \beta_{j-1} - \beta_j$$

Разделим слои на подгруппы, так что внутри каждой из них $\delta_j = 0$ для соседних слоев. Полагая, для определенности, величины β_j целыми, введем обозначение N_m для множества индексов тех слоев, где $\beta_j = m$. Таким образом, сильно стратифицированная жидкость будет определена набором множеств $N_0, N_1, N_2, \ldots$ по возрастанию индексов слоев от тяжелых донных к более легким, приповерхностным слоям. Так как в длинноволновом приближении обычно полагают $\varepsilon \sim 10^{-2}$, то естественно ограничить рассмотрение несколькими реальными значениями $m = 0, 1, 2$ [8, 9].

Случай жидкости, соответствующей множеству N_0, уже был рассмотрен в разд. 1; обратимся теперь к сочетаниям разных значений m. Процедуру масштабирования координат и времени оставим без изменения. Вид асимптотических рядов для потенциалов и перемещений также сохраняется, тогда как для давлений и плотностей будем иметь

$$P_j = C_0^2\varepsilon^{\lambda + a + \beta_j}(p^0 + \varepsilon p^1 + \ldots)_j, \quad \bar\rho_j = \bar\rho_{0j}\varepsilon^{\beta_j}, \quad \bar\rho_{0j} = O(1), \quad \varepsilon \to +0$$

Соответственно изменятся условия согласования давлений, и вместо второго условия (1.8) получаем условие

$$-\rho_{0j}(\partial_t^2\psi^{l-a,\,j} + \zeta_{j+1}^l) = -\rho_{0j+1}(\partial_t^2\psi^{l-a-\delta_j,\,j+1} + \zeta_{j+1}^{l-\delta_j}) \tag{2.1}$$

где ρ_{0j} – безразмерные плотности порядка единицы. Уравнение (1.7), первое условие (1.8) и условия (1.9)–(1.11) остаются в силе.

Рассмотрим сначала жидкость, состоящую из двух групп слоев N_0, N_2 (N_0: $j = 1, 2, \ldots, N_0$ и N_2: $j = N_0 + 1, N_0 + 2, \ldots, N_0 + N_2$; $N = N_0 + N_2$), и построим ее асимптотическую модель с относительной погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Очевидно, что $\delta_{N_0} = 2$, а прочие $\delta_j = 0$, так как соседние слои будут принадлежать к одной группе. Для компонент асимптотического ряда с индексами $l = 0, 1$ выкладки не отличаются от приведенных в разделе 1. Для следующих членов $l + 2 = 2, 3$ с теми же допустимыми значениями $\lambda = -3$, $a = 2$ отличие появляется лишь во втором условии (1.8) на границе раздела групп N_0 и N_2, а условие (2.1) примет вид

$$\rho_{0N_0}(\partial_t^2\psi^{l,\,N_0} + \zeta_{N_0+1}^{l+2}) = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, можно говорить о раздельном описании групп слоев. Согласно условию (2.2), группа слоев N_0 ведет себя как жидкость со *свободной* границей $Z = Z_{N_0+1}$ при заданном возмущении ζ^- на дне $Z = Z^-$, а соответствующие размерные уравнения имеют вид (1.18)–(1.21) при $P^+ = 0$ для всех $j \in N_0$. Группа слоев N_2 воспринимает границу раздела $Z = Z_{N_0+1}$ как собственное "дно" с заданным возмущением ζ_{N_0+1} (полученным из решения для группы слоев N_0). В зависимости от того, задано ли условие на верхней поверхности $Z = Z^+$ в виде давления или перемещения, поведение группы N_2 описывается либо размерными уравнениями вида (1.18)–(1.21), либо уравнениями вида (1.22), (1.23). Изменить следует лишь индексы слоев и вести их отсчет от границы раздела $Z = Z_{N_0+1}$.

Очевидно, что все эти выводы сохранятся и для жидкости, состоящей из групп слоев N_0, N_m ($m > 2$) с той же точностью $O(\varepsilon^2)$.

Для слоистой жидкости из групп слоев N_0, N_1 приведенные выше соотношения и выводы сохранятся для членов асимптотического ряда $l = 0, 1$ и $l + 2 = 2$. Таким образом, с точностью $O(\varepsilon)$ можно использовать раздельное описание групп слоев N_0 и N_1. Если же учесть оба члена ряда $l + 2 = 2, 3$, то условие (2.2) следует заменить на соотношение

$$-\rho_{0N_0}(\partial_t^2\psi^{l,\,j} + \zeta_{N_0+1}^{l+2}) = -\rho_{0N_0+1}(\partial_t^2\psi^{l-1,\,N_0+1} + \zeta_{N_0+1}^{l+1}) \tag{2.3}$$

т.е. второй член асимптотики для группы слоев N_0 "возмущается" избыточным весовым давлением группы слоев N_1 меньшего порядка. Соотношение (2.3) означает в сущности лишь перегруппировку членов асимптотического ряда, и легко убедиться, что с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ жидкость из групп слоев N_0, N_1 удовлетворяет тем же размерным уравнениям, что и слабостратифицированная жидкость из разд. 1.

Если рассматривать более абстрактную комбинацию групп слоев вида $N_0, N_1, \ldots, N_m$, то с точностью $O(\varepsilon)$ их описание может быть раздельным. При этом для каждой группы

N_k, $k < m$ нижняя граница раздела воспринимается как собственное "дно", а верхняя "освобождается" от давления. Если между группами слоев $\delta_j = 1$, то с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно использовать уравнения, приведенные в разд. 1, для связанного описания слабостратифицированной жидкости. Если же между некоторыми соседними группами $\delta_j \geq 2$, то уравнения для групп слоев жидкостей, расположенных выше и ниже общей поверхности раздела, отделяются полностью, подобно сочетанию группы слоев N_0, N_2.

3. Импедансные краевые условия. *Случай несжимаемой жидкости.* Рассмотрим теперь одиночный слой жидкости, стесненный двумя плоскими твердыми поверхностями. Для удобства помимо толщины слоя введем также полутолщину $h = H/2$. Из соотношений (1.7), первого условия (1.8) и условий (1.9), (1.11) вытекают следующие рекуррентные формулы:

$$\psi^{l+2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{z^k}{k!}\psi_k^{l+2n}, \quad u_z^{l+2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\psi_k^{l+2n}; \quad l = 0, 1; \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$p^{l+2n} = -\partial_t^2\psi^{l+2n}, \quad \psi_{k+2}^{l+2n} = -\Delta\psi_k^{l+2n-2} \tag{3.1}$$

$$\psi_1^{l+2n} = \delta_+^{l+2n} - \delta_-^{l+2n}, \quad \delta_-^{l+2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{(k-1)!}\psi_k^{l+2n}; \quad \delta_\pm \equiv \frac{\zeta^+ \pm \zeta^-}{2}$$

При тех же значениях параметров λ и a, что и в разд. 1, аналогично величинам $\delta_\pm$ введем в рассмотрение полусумму и полуразность давлений на верхней и нижней поверхностях слоя $P = P^\pm$.

Следуя предыдущим выкладкам, для индексов $l = 0, 1$ получаем

$$\zeta^l = \psi_1^l = 0, \quad \psi_0^l \neq 0, \quad p^l = -\partial_t^2\psi_0^l(\mathbf{x}, t) = p^{l,\pm}$$

$$\frac{1}{2}(p^{l,+} - p^{l,-}) = 0, \quad \frac{1}{2}(p^{l,+} + p^{l,-}) = -\partial_t^2\psi_0^l(\mathbf{x}, t),$$

Для следующей пары индексов $l + 2 = 2, 3$ соотношения принимают вид

$$\zeta^{l+2} = \psi_1^{l+2} - z\Delta\psi_0^l, \quad -\frac{1}{2}\Delta\psi_0^l = \delta_-^{l+2}, \quad -\frac{1}{2}\partial_t^2\Delta\psi_0^l = \frac{1}{2}\Delta(p^{l,+} + p^{l,-}) = \partial_t^2\delta_-^{l+2}$$

с двумя итоговыми равенствами

$$\frac{1}{2}(p^{l,+} - p^{l,-}) = 0, \quad \frac{1}{2}\Delta(p^{l,+} + p^{l,-}) = \partial_t^2\delta_-^{l+2} \tag{3.2}$$

Рассматривая в соотношениях (3.1) последовательно индексы $n = 2, 3, 4$ и переходя к размерной записи формул, получим, аналогично (3.2), для старшего индекса $n = 4$ следующие равенства с относительной погрешностью $O(\varepsilon^{10})$:

$$P^+ - P^- = -h\bar{\rho}\partial_T^2 D^-(U_z^+ + U_z^-), \quad h\Delta_X(P^+ + P^-) = \partial_T^2 D^+(U_z^+ - U_z^-)$$

$$D^- \equiv 0 + 1 + \frac{1}{3}h^2\Delta_X + \frac{2}{15}h^4\Delta_X^2 + \frac{17}{315}h^6\Delta_X^3 \tag{3.3}$$

$$D^+ \equiv 1 - \frac{1}{3}h^2\Delta_X - \frac{1}{45}h^4\Delta_X^2 - \frac{2}{945}h^6\Delta_X^3 - \frac{1343}{38102400}h^8\Delta_X^4$$

Соотношения младших порядков получаются отбрасыванием последних членов в операторах $D^\pm$ в равенствах (3.3). В предельном случае $h \to +0$ имеем $P^+ = P^-$, $U_z^+ = U_z^-$.

Пусть теперь слой несжимаемой жидкости расположен между двумя упругими телами, каждое из которых может быть, например, толстой пластиной, весьма пологой оболочкой или полупространством из изотропного или анизотропного линейно упругого или вязкоупругого материала. Все величины, относящиеся к упругим телам, будем помечать верхним индексом "плюс" или "минус". К условиям (1.4) и (1.6) на межфазных поверхностях $Z = Z^{\pm}$ следует добавить условия непротекания (здесь $U_z^{\pm}$ – нормальные перемещения упругой среды)

$$Z = Z^{\pm}\colon U_z^{\pm} = \zeta^{\pm} \tag{3.4}$$

Нормальные напряжения должны удовлетворять условию баланса давлений

$$Z = Z^{\pm}\colon P^{\pm} = -\sigma_{zz}^{\pm} + (\bar{\rho}_{\pm} + \bar{\rho})gU_z^{\pm};\quad \sigma_{\alpha z}^{\pm} = 0,\quad \alpha = 1, 2 \tag{3.5}$$

Масштабирование величин и асимптотическое интегрирование в слое жидкости выполняются описанным выше способом. В упругих телах масштабирование координат X_1, X_2, Z ведется только для одного линейного размера L. Это означает, что для соответствующих членов асимптотических рядов в толстых телах, удовлетворяющих соотношениям (3.4), (3.5), выполняются обычные уравнения динамической теории упругости или вязкоупругости, так как подобное масштабирование не приводит к смешиванию различных индексов в соотношениях, если масштаб времени не меньше характерного времени упругих процессов. В результате приходим к тем же равенствам (3.3), где давления выражены через нормальные напряжения, определяемые по первой формуле (3.5). Величину порядка λ при этом не конкретизируем. Итоговые импедансные краевые условия (ИКУ) десятого порядка на межфазных поверхностях $Z = Z^{\pm}$ примут вид

$$\begin{aligned} &-\sigma_{zz}^{+} + (\bar{\rho}_{+} + \bar{\rho})gU_z^{+} + \sigma_{zz}^{-} - (\bar{\rho}_{-} + \bar{\rho})gU_z^{-} = -h\bar{\rho}\partial_T^2 D^{-}(U_z^{+} + U_z^{-}) \\ &h\Delta_X\{-\sigma_{zz}^{+} + (\bar{\rho}_{+} + \bar{\rho})gU_z^{+} - \sigma_{zz}^{-} + (\bar{\rho}_{-} + \bar{\rho})gU_z^{-}\} = \partial_T^2 D^{+}(U_z^{+} - U_z^{-}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Условия младших порядков, как и выше, получаются отбрасыванием последних членов в операторах $D^{\pm}$ в правых частях равенств (3.6).

Представленные выше ИКУ получены для случая, когда отношения плотностей в упругих телах к плотности жидкости – величины $O(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Физически очевидно, что случай легкой жидкости $\bar{\rho} \sim \varepsilon\bar{\rho}_{\pm}$ также будет описываться уравнениями (3.6). Случай тяжелой жидкости между весьма податливыми легкими телами здесь не рассматривается.

Проиллюстрируем диапазоны применимости полученных ИКУ на тестовом примере расчета характеристик парциальных волн. Такой тест представляется вполне приемлемым для оценки точности асимптотической модели, так как парциальные волны естественным образом возникают при рассмотрении любой спектральной задачи. Рассмотрим распространения волн в полупространствах из алюминия (плотность 2700 кг/м^3, скорости $C_p = 6320$ и $C_S = 3080$ м/с) и/или полистирола (плотность 1060 кг/м^3, $C_p = 2350$ и $C_S = 1150$ м/с) через слой воды (плотность 1060 кг/м^3), рассматриваемой сначала как несжимаемая жидкость. Для случая падения гармонической по времени P- или S- волны из верхней среды на границу раздела со слоем жидкости определим комплексные амплитуды M для P- и S-волн, отраженных в верхнюю среду, и волн, прошедших в нижнюю среду, отнесенные к амплитуде падающей волны M^{in}, а также среднеквадратическую относительную погрешность

$$e = \left\{\frac{1}{4}\sum\left|\frac{M^{as} - M^{ex}}{M^{ex}}\right|^2\right\}^{1/2}$$

n	1	2	3	4	5
Алюминий–вода–алюминий	0.015	0.4	0.65	0.8	0.9
	0.015	0.12	0.2	0.26	0.31
Полистирол–вода–алюминий	0.02	0.6	1.1	1.3	1.4
	0.02	0.13	0.22	0.28	0.32

где M^{ex} – комплексная амплитуда соответствующей волны, полученная из точного решения задачи о гидроупругом контакте, M^{as} – амплитуда, полученная из решения приближенной задачи, где влияние жидкости учтено посредством ИКУ (3.6), а суммирование ведется по всем типам волн в упругих средах.

Результаты расчетов максимальных значений H/L, при которых погрешность ИКУ $e \leq 0.01$ для разных углов падения P- и S-волн на границу раздела упругого тела с несжимаемой жидкостью, приведены в верхних строках таблицы. В качестве волнового масштаба использована длина волны $L = L^+ \equiv 2\pi C_S^+/\omega$ (ω – циклическая частота). Номера столбцов n соответствуют асимптотической ошибке $O(\varepsilon^{2n})$ в ИКУ вида (3.6). Как видно, интервал применимости ИКУ весьма широк, вплоть до случаев, когда параметр асимптотического разложения $\varepsilon = h/L$ или волновое число $kh = 2\pi\varepsilon = \pi H/L$ уже нельзя считать малыми. Заметим, что хотя масштабирование велось для скорости гравитационной волны в жидкости, итоговый результат справедлив и в масштабе скоростей упругих волн. Отметим и большую разницу в эффективности ИКУ различных асимптотических порядков.

Случай сжимаемой жидкости. Изложим кратко лишь основные отличия от предыдущего случая. Вместо уравнения (1.1) для потенциала перемещений используем уравнение

$$\{C^{-2}\partial_T^2 - \partial_Z^2 - \Delta_X\}\Psi = 0$$

где C – скорость звука в жидкости. Масштаб времени будет задаваться формулой $T_0 = \varepsilon^a L/C$. Из последующего анализа (аналогично сказанному в разд. 1 и 3) следует максимальное допустимое значение $a = 0$. Остальные выкладки аналогичны проведенным выше, если безразмерный оператор Δ заменить на $\Delta - \partial_t^2$. В размерных соотношениях (3.3) и в ИКУ (3.6) следует заменить Δ_X на $\Delta_X - C^{-2}\partial_T^2$. Отметим, что для большинства реальных физических материалов "весовая" добавка к напряжениям в формулах (3.6) оказывается малой и $P^\pm \approx -\sigma_{zz}^\pm$. Также отметим, что случаи тяжелой жидкости или жидкости, в которой скорость звука много больше скоростей распространения в упругих средах, здесь не рассматриваются.

Для иллюстрации снова рассмотрим контакт тех же сред, причем теперь вода – сжимаемая среда со скоростью звука $C = 1400$ м/с. Отношение $H/L = 1/2$ ($L = 2\pi C/\omega$) соответствует первой квазирезонансной частоте слоя жидкости. Результаты расчетов приведены в нижних строках таблицы.

Видно, что для ИКУ (3.6) при $n = 5$ относительная погрешность $e \leq 0.01$, если $H/L \leq 0.3$ (при $H/L = 0.4$ она составляет около 0.05). Ряд численных расчетов для других материалов, которые здесь не приводятся, подтверждает это заключение.

Существенно, что в отличие от результатов, полученных ранее [2–4] для ИКУ низшего порядка, представленные результаты покрывают практически весь интервал частот до первого квазирезонанса. Принципиальное отличие состоит в появлении в правой части ИКУ (3.6) итераций волнового оператора $\Delta_X - C^{-2}\partial_T^2$, что имеет место при $n \geq 2$, чем и объясняется резкое увеличение точности модели и аппроксимация частоты первого квазирезонанса в слое жидкости.

Автор благодарит Н.Л. Калиниченко за помощь в подготовке рукописи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00843).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface Waves // Handbuch der Physik, Ed. Flugge, Berlin: Spinger, 1960. Bd 9, S. 446–778.
2. *Rokhlin S.L., Wang Y.J.* Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids // J. Acoust. Soc. Amerika. 1991. V. 89. № 2. P. 503–515.
3. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces // J. Acoust. Soc. Amerika. 1980. V. 68. № 5. P. 1516–1527.
4. *Bovik P.* On the modeling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1994. V. 47. P. 17–42.
5. *Зволинский Н.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Свободные и вынужденные гравитационные волны в двухслойной жидкости// Исследования цунами. М.: Изд-во МГУ, 1990, № 4. С. 42–51.
6. *Le Blond P.H., Mysak L.A.* Waves in the Ocean. Amsterdam: Elsevier, 1978, 602 p.
7. *Секерж–Зенькович С.Я., Шингарева И.К.* О возбуждении сейсмическим центром расширения длинных гравитационных внутренних волн в океане // Изв. РАН. Физика Земли. 1997. № 4. С. 46–51.
8. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 303 с.
9. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: University Press, 1978, 496 p. = *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

Москва
e-mail:dd_zakh@mail.ru