

УДК 531.391

© 2006 г. В. Г. Вильке

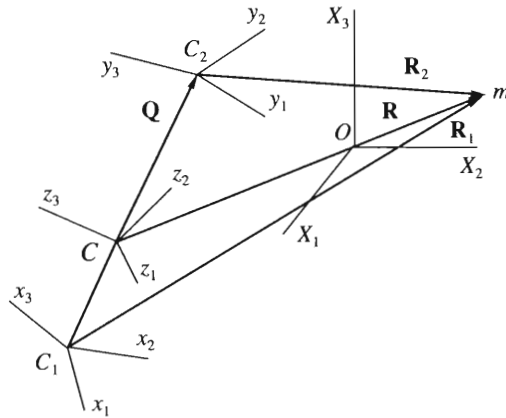
ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЯДРА И ОБОЛОЧКИ ПЛАНЕТЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

Рассматривается модель планеты, состоящей из двух твердых тел – ядра и оболочки, между которыми находится сферический слой вязкой несжимаемой жидкости. Учитывается гравитационное взаимодействие ядра и оболочки. Задача исследуется в ограниченной постановке, когда центр масс планеты движется по фиксированной эллиптической орбите в поле тяготения точечной массы, а определению подлежат взаимные перемещения ядра и оболочки. Взаимные перемещения ядра и оболочки планеты, а также поле скоростей вязкой жидкости в сферическом слое получены в рамках многопараметрической теории возмущений, где в качестве малых параметров приняты число Рейнольдса, эксцентриситет орбиты, отношение радиуса планеты к расстоянию до притягивающего центра. Кроме того, при анализе уравнений движения использована приближенная теория гироскопов. Полученные результаты иллюстрируются на примере движения системы Земля–Луна.

Сложная внутренняя структура планет Солнечной системы порождает относительное движение ее составных частей и влияет на динамические процессы (вращение планеты вокруг центра масс, приливные явления, эволюция орбиты, тектонические процессы как следствие относительных смещений частей планеты) [1–4]. Выбор той или иной модели для описания движения планеты и ее составных частей зависит от ее размеров (массы), которые определяют гравитационное поле внутри планеты и влияют на физическое состояние вещества планеты. Если размеры планеты малы, то она представляется твердым деформируемым телом. При увеличении массы планеты внутри нее может сформироваться жидкий слой.

Ранее [5] рассматривалась модель при условии, что сплошная среда между ядром и оболочкой планеты наделена вязкоупругими свойствами, что не позволяло изучить “провороты” ядра относительно оболочки.

1. Постановка задачи. Пусть планета состоит из ядра и оболочки, между которыми имеется сферический слой однородной вязкой несжимаемой жидкости. Модель подобного типа соответствует современным представлениям о внутреннем строении Земли, состоящей из твердого ядра, сферического слоя вязкой жидкости и твердой оболочки. Фазовые переходы от одного типа сплошной среды к другому (твердое тело – жидкость – твердое тело) связаны с величиной давления внутри Земли, возрастающего по мере приближения к центру Земли, и распределением температуры внутри Земли. В оболочке температура и давление невелики и, как следствие этого, вещество находится в твердом состоянии (модель абсолютно твердого или деформируемого тела). По мере приближения к центру Земли температура и давление растут, и на некотором расстоянии r до центра Земли ($r = b$) давление $p(r)$ становится равным $p_*(T(b))$, где $p_*(T)$ – функция, определяющая зависимость давления от температуры T , при которой осуществляется фазовый переход твердое тело – жидкость. Далее по мере приближения к центру Земли давление и температура изменяются таким образом, что при $r = a$ давление становится равным $p_*(T(a))$, при котором осуществляется обратный переход от жидкой фазы к твердой. Зависимость давления от расстояния до центра Земли r в основном опре-



деляется гравитационным взаимодействием частиц внутри Земли и центробежными силами из-за суточного вращения Земли, которые не превышают 0.3% от гравитационных сил. В связи с этим изобары внутри Земли и границы жидкого слоя можно считать сферическими. Сведения о внутреннем строении Земли основываются на изучении характера прохождения сейсмических волн [2, 3].

Пусть ядро и оболочка планеты – твердые тела. Система координат $C_1x_1x_2x_3$ связана с ядром, занимающим область $V_1 = \{r_1^2 < a^2, \mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)\}$, точка C_1 – центр масс ядра, а $J_1 = \text{diag}\{A_1, A_1, C_1\}$ – тензор инерции ядра относительно системы координат $C_1x_1x_2x_3$. Будем полагать, что главный центральный момент инерции $C_1 > A_1$ (это связано с достаточно быстрым вращением планеты вокруг оси C_1x_3). Относительно оболочки также предположим, что она занимает область V_2 , внутренняя поверхность которой задается уравнением $\mathbf{r}_2^2 = b^2$, $\mathbf{r}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ в системе координат $C_2y_1y_2y_3$. Здесь C_2 – центр масс оболочки, $b - a = l$ – толщина жидкого слоя между ядром и оболочкой. Тензор инерции оболочки в системе координат $C_2y_1y_2y_3$ равен $J_2 = \text{diag}\{A_2, A_2, C_2\}$, $C_2 > A_2$. Поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $a \leq |\mathbf{r}| \leq b$ жидкости будем рассматривать в предположении, что системы координат $C_1x_1x_2x_3$ и $C_2y_1y_2y_3$ совпадают, а поле скоростей, описывающее их взаимное движение, не равно тождественно нулю и определяет граничные значения поля скоростей точек жидкого слоя.

Система координат $CX_1X_2X_3$ связана с центром масс планеты, а ее оси параллельны осям инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$, начало которой – центр масс планеты и материальной точки массы m (фигура). При смещении центра масс оболочки относительно центра масс ядра справедливы векторные равенства в системе координат $CX_1X_2X_3$

$$CC_1 = \xi_1 \mathbf{Q}, \quad CC_2 = \xi_2 \mathbf{Q}; \quad \xi_1 = -\frac{m_r}{m_{10}}, \quad \xi_2 = \frac{m_r}{m_{20}}, \quad m_r = \frac{m_{10}m_{20}}{M}, \quad M = m_0 + m_1 + m_2 \quad (1.1)$$

$$m_{10} = m_1 - m_{01} > 0, \quad m_{20} = m_2 + m_{02}, \quad m_0 = m_{02} - m_{01}, \quad m_{01} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3, \quad m_{02} = \frac{4}{3}\pi\rho b^3$$

где m_0, m_1, m_2 – массы жидкого слоя, ядра и оболочки соответственно, ρ – плотность жидкости, \mathbf{Q} – вектор C_1C_2 .

Далее найдем $\mathbf{P}_k = \xi_k \mathbf{Q} + \Gamma_k \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k \in V_k$ ($k = 1, 2$), где $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ – векторы точек ядра и оболочки, Γ_1, Γ_2 – ортогональные операторы перехода от систем координат $C_1x_1x_2x_3$,

$C_2y_1y_2y_3$ к системе $CX_1X_2X_3$. Если $\mathbf{Q} = 0$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_0$, то ядро планеты находится внутри оболочки, и их главные оси инерции совпадают, а жидкость заполняет сферический слой между ядром и оболочкой. Оператор поворота Γ_0 определяет переход от системы координат $CX_1X_2X_3$ к системе $Cz_1z_2z_3$, связанной с планетой в невозмущенном движении.

При движении планеты имеют место малые смещения и повороты оболочки планеты относительно ее ядра, за исключением поворотов относительно осей динамической симметрии ядра и оболочки, которые могут носить вековой характер. В системе координат $Cz_1z_2z_3$ это смещение равно $\mathbf{q} = \Gamma_0^{-1} \mathbf{Q}$, а относительный оператор поворота $\Gamma = \Gamma_1^{-1} \Gamma_2$ – матрица поворота оболочки относительно системы координат $C_1x_1x_2x_3$, связанной с ядром. Вектор смещения \mathbf{q} представляется малым в том смысле, что мало отношение $|\mathbf{q}|/l$. Если операторы Γ_1, Γ_2 задать с помощью углов Эйлера, то окажутся справедливыми равенства

$$\Gamma_k = O_3(\psi + \psi_k)O_1(\theta + \theta_k)O_3(\phi + \phi_k), \quad k = 1, 2$$

$$O_1(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & -\sin \chi \\ 0 & \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}, \quad O_3(\chi) = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Углы Эйлера ψ, θ, ϕ определяют оператор поворота Γ_0 и описывают вращение планеты, когда ее ядро и оболочка составляют единое целое, а возмущения ψ_k, θ_k, ϕ_k ($k = 1, 2$) равны нулю. Используя соотношения (1.2), получим

$$(\Gamma_1 \mathbf{e}_3, \Gamma_2 \mathbf{e}_3) \cong 1 - \frac{1}{2}[(\Delta\theta)^2 + (\Delta\psi)^2 \sin^2 \theta], \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \quad \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (1.3)$$

где выражение в квадратных скобках представляет квадрат угла между осями симметрии ядра C_1x_3 и оболочки C_2y_3 . В равенстве (1.3) опущены члены третьего порядка малости и выше относительно малых величин $\Delta\psi, \Delta\theta$. В отличие от рассмотренного ранее случая [5] возмущение $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ может иметь вековой характер, поскольку ядро и оболочка не связаны упругим образом, а гравитационное взаимодействие в системе не зависит от $\Delta\phi$.

В качестве невозмущенного движения системы рассмотрим движение планеты как твердого тела, когда все относительные перемещения ядра, оболочки и жидкости отсутствуют. При этом будем считать, что центр масс планеты описывает эллиптическую орбиту под действием гравитации точечной массы m и планета вращается с постоянной скоростью вокруг оси симметрии. В ограниченной постановке задачи примем движение центра масс планеты за невозмущенное и исследуем взаимное движение ядра, оболочки и жидкости.

Кинетическая энергия системы вычисляется на основе теоремы Кёнига и равна

$$T = \frac{mM}{2(m+M)} \mathbf{R}^2 + \frac{m_1 \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2}{2} (\dot{\mathbf{q}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}])^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (J_k \boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\omega}_k) + \frac{\rho}{2} \int_{V_0} (\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}])^2 dx$$

где \mathbf{R} – вектор, соединяющий центр масс планеты и точку с массой m , $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ – угловые скорости ядра и оболочки в системах координат, связанных с каждым из них, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – поле скоростей жидкости в области V_0 между ядром и оболочкой, заданное в равномерно вращающейся системе координат $Cz_1z_2z_3$. Справедливы соотношения

$$\frac{1}{2}(J_k \boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\omega}_k) = \frac{1}{2} A_k [\psi_k^2 \sin^2(\theta + \theta_k) + \theta_k^2] + \frac{1}{2} C_k [\phi + \phi_k + \psi_k \cos(\theta + \theta_k)]^2, \quad k = 1, 2$$

В приближении Стокса (числа Рейнольдса $Re = v^{-1}l \max(|\dot{\mathbf{q}}|, |\Gamma_2 \boldsymbol{\omega}_2 - \Gamma_1 \boldsymbol{\omega}_1|/l)$ полагаем малыми) при условии квазистационарности течения уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в жидком слое в равномерно вращающейся системе координат $Cz_1z_2z_3$ и граничные условия на поверхности ядра ∂V_1 и на внутренней поверхности оболочки ∂V_2 имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \nabla p &= -\nabla \Pi(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Pi(\mathbf{r}, t) = \Pi_g(\mathbf{r}, t) - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2/2 \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in \partial V_k} &= \xi_k \dot{\mathbf{q}} + [(\Gamma_0^{-1} \Gamma_k \boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}], \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, $p(\mathbf{r}, t)$ – давление жидкости, $\Pi_g(\mathbf{r}, t)$ – потенциал массовых сил гравитационного взаимодействия всех частей системы. В дальнейшем при определении поля скоростей пренебрежем малым смещением оболочки относительно ядра (вектор $\dot{\mathbf{q}}$) и будем считать, что уравнения (1.4) справедливы в сферическом слое $V_0 = \{\mathbf{r} : a \leq |\mathbf{r}| \leq b\}$ и на его границах соответственно.

Уравнения движения и неразрывности (1.4) линейны относительно неизвестных функций $p(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, что позволяет найти их решение в виде

$$p = p_0 + p_1 + p_2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad p_0 = -\rho \Pi$$

причем введенные функции удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$\rho^{-1} \nabla p_k = \nu \Delta \mathbf{v}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0; \quad k = 1, 2 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=a} = \xi_1 \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=b} = \xi_2 \dot{\mathbf{q}} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=a} = [(\Gamma_0^{-1} \Gamma_1 \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}], \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=b} = [(\Gamma_0^{-1} \Gamma_2 \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}] \quad (1.7)$$

Имея в виду сферическую симметрию области, занимаемой жидкостью, задачу (1.5), (1.6) удобно решать в сферической системе координат, полагая, что скорость оболочки относительно ядра $\dot{\mathbf{q}}$ направлена по оси Cz . Вычитая из поля скоростей жидкости скорость поступательного движения ядра, получим ту же задачу (1.5), (1.6) с измененными граничными условиями

$$v_r(a, \theta) = v_\theta(a, \theta) = 0, \quad v_r(b, \theta) = \dot{q} \cos \theta, \quad v_\theta(b, \theta) = -\dot{q} \sin \theta; \quad \dot{q} = |\dot{\mathbf{q}}|$$

Здесь $v_r(r, \theta)$, $v_\theta(r, \theta)$ – компоненты поля скоростей жидкости в сферической системе координат, а компонента поля скоростей, соответствующая углу φ сферической системы координат, тождественно равна нулю.

По аналогии с решением Стокса, решение этой задачи найдем в виде

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= f(r) \cos \theta, \quad v_\theta(r, \theta) = -g(r) \sin \theta, \quad p(r, \theta) = pvh(r) \cos \theta \\ f &= Ar^{-3} + Br^{-1} + C + Dr^2, \quad g(r) = -2Ar^{-3} + 2Br^{-1} + C + 2Dr^2, \quad h = Br^{-2} + 10Dr \end{aligned}$$

Коэффициенты A, B, C, D определяются из граничных условий

$$A = 3a^3(\xi^4 + \xi^5)F(\xi)\dot{q}, \quad B = -a(4\xi + 4\xi^2 + 4\xi^3 + 9\xi^4 + 9\xi^5)F(\xi)\dot{q}$$

$$C = 6(\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^5)F(\xi)\dot{q}, \quad D = 2a^{-2}(\xi + \xi^2 + \xi^3)F(\xi)\dot{q}$$

$$F(\xi) = (1 - \xi)^{-3}(4 + 7\xi + 4\xi^2)^{-1}, \quad \xi = b/a > 1$$

Напряжения на элементах поверхности сферического ядра при учете граничных условий и условия несжимаемости таковы [6]:

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\mu h(a) \cos \theta, \quad p_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + a^{-1} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = -\mu g'(a) \sin \theta$$

Здесь $\mu = \rho v$, штрих означает дифференцирование по r .

Результирующая давления на ядро направлена по вектору $\dot{\mathbf{q}}$ и вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} F_1 &= \int \int_{\partial V_1} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) d\sigma = -2\pi\mu a^2 \dot{q} \int_0^\pi [h(a) \cos^2 \theta - g'(a) \sin^2 \theta] \sin \theta d\theta = \\ &= -\frac{4}{3}\pi\mu a^2 \dot{q} [h(a) - 2g'(a)] = -d_1 \dot{q}, \quad d_1 = \frac{4}{3}\pi\mu a \frac{4\xi + 4\xi^2 + 4\xi^3 + 21\xi^4 + 21\xi^5}{(\xi - 1)^3(4 + 7\xi + 4\xi^2)} \end{aligned}$$

Сила, действующая на внутреннюю поверхность оболочки, равна и противоположна силе F_1 , а соответствующая диссипативная функция имеет вид

$$D_1 = \frac{1}{2} d_1 \dot{\mathbf{q}}^2 \tag{1.8}$$

Задача (1.5), (1.7) также решается в сферических координатах [6]. В результате определяется момент взаимодействия ядра и оболочки за счет их взаимного вращения и соответствующая диссипативная функция

$$M = d_2 |\Gamma_1 \boldsymbol{\omega}_1 - \Gamma_2 \boldsymbol{\omega}_2|, \quad D_2 = \frac{1}{2} d_2 (\Gamma_1 \boldsymbol{\omega}_1 - \Gamma_2 \boldsymbol{\omega}_2)^2; \quad d_2 = \frac{8\mu\pi a^3 b^3}{b^3 - a^3} \tag{1.9}$$

Осталось рассмотреть потенциальную компоненту давления

$$p_0 = -\rho^{-1} \Pi(\mathbf{r}, t)$$

в жидком слое и воздействие этого давления на оболочку и на ядро планеты. Речь идет о работе на возможных перемещениях поля потенциальных сил $-\nabla \Pi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in V_0$, где V_0 – область, занимаемая жидкостью. Используя формулу Остроградского – Гаусса и условие несжимаемости жидкости, представим эту работу в виде

$$\delta A_p = - \int_{V_0} \nabla \Pi \delta \mathbf{R} dx = - \int_{V_0} \operatorname{div}(\Pi \delta \mathbf{R}) dx = - \int_{\partial V_0} \Pi n \delta \mathbf{R} d\sigma \tag{1.10}$$

Здесь $\delta \mathbf{R}(\mathbf{r})$ – поле возможных перемещений, удовлетворяющее связям $\operatorname{div} \delta \mathbf{R} = 0$, $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – внешняя нормаль к поверхности жидкого слоя [7].

Заметим, что на границе жидкого слоя возможные перемещения совпадают с возможными перемещениями соответствующих точек поверхности ядра или внутренней поверхности оболочки. Используя это обстоятельство, разобьем последний интеграл в равенстве (1.10) на два интеграла. К каждому из них применим формулу Остроградского – Гаусса, продолжая поле возможных перемещений на поверхности ядра на область, занимаемую ядром, как поле возможных перемещений ядра, а поле возможных перемещений, заданное на внутренней поверхности оболочки, продолжим внутрь всей оболоч-

ки как поле возможных перемещений оболочки, продолженное на всю внутреннюю полость. В результате получим

$$\delta A_p = \int_{\partial V_1} \Pi \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{R}_1 d\sigma - \int_{\partial V_2} \Pi \mathbf{n}_2 \delta \mathbf{R}_2 d\sigma = \int_{V_1} \nabla \Pi \delta \mathbf{R}_1 dx - \int_{V_1 \cup V_0} \nabla \Pi \delta \mathbf{R}_2 dx$$

где $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}, t)$ – внешняя нормаль к поверхности ядра, $\delta \mathbf{R}_1(\mathbf{r})$ – поле возможных перемещений точек ядра как твердого тела, $\mathbf{n}_2(\mathbf{r}, t)$ – внешняя нормаль к внутренней поверхности оболочки, направленная в сторону оболочки, $\delta \mathbf{R}_2(\mathbf{r})$ – поле возможных перемещений точек внутри всей полости оболочки, совпадающее с аналогичным полем твердого тела, жестко связанного с оболочкой. Полученное свойство справедливо для любой формы полости, заполненной несжимаемой жидкостью.

Рассмотрим движение ядра и оболочки планеты относительно инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$, используя уравнения Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат примем координаты вектора \mathbf{q} и возмущения углов Эйлера $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ ($k = 1, 2$), а радиус-вектор \mathbf{R} , соединяющий центр масс планеты и материальную точку m , соответствует невозмущенному движению (фигура).

Как было показано выше, гравитационное взаимодействие ядра, оболочки и жидкости останется неизменным, если предположить, что вся полость $V_1 \cup V_0$ (сфера внутри оболочки) заполнена несжимаемой жидкостью плотности ρ , а плотность вещества в сферической области, занимаемой ядром, уменьшена на величину плотности жидкости ρ . Предположение о сферичности соответствующих областей несущественно. С точки зрения гравитационного взаимодействия частей планеты, а также ее гравитационного взаимодействия с внешними телами, планету можно считать состоящей из двух твердотельных частей: оболочки с присоединенной внутренней сферической полостью, представленной твердым телом с постоянной плотностью ρ , и ядром, плотность вещества которого уменьшена на величину ρ . Взаимодействие ядра и оболочки складывается из их гравитационного взаимодействия и взаимодействия, связанного с наличием между ними слоя однородной вязкой жидкости. Потенциал гравитационного взаимодействия имеет вид [5]

$$\Pi_{12} = -\frac{g_1}{2} [q_1^2 + q_2^2 - 2q_3^2] + \frac{h}{2} [(\Delta\psi)^2 \sin^2 \theta + (\Delta\theta)^2]$$

$$g_1 = \frac{\gamma m_{10}(C_2 - A_2)}{2r_0^5} > 0, \quad h = \frac{\gamma(C_1 - A_1)(C_2 - A_2)}{ar_0(r_0 - a)^3} > 0$$

где r_0 – внешний радиус оболочки (радиус планеты), γ – универсальная гравитационная постоянная.

Определим воздействие на ядро и на оболочку планеты составляющей давления p_0 , связанной с вращением системы координат $Cz_1z_2z_3$ и равной $\rho[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2/2$. Переход от поверхностных интегралов к объемным позволяет получить выражение эквивалентного потенциала центробежных сил

$$\Pi_0 = \frac{m_{01}\xi_1^2 - m_{02}\xi_2^2}{2} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]^2 + \frac{m_{02}b^2 - m_{01}a^2}{5} \boldsymbol{\omega}^2$$

в котором опустим последнее слагаемое, не зависящее от обобщенных координат. Учитывая последнее выражение для потенциала центробежных сил, представим разность кинетической энергии системы ядро–оболочка и потенциала центробежных сил в виде

$$T_{12} - \Pi_0 = \frac{m_1\xi_1^2 + m_2\xi_2^2}{2} (\dot{\mathbf{q}}^2 + 2\dot{\mathbf{q}}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]) + \frac{m_r}{2} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (J_k \boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\omega}_k)$$

Найдем потенциальную энергию гравитационного взаимодействия трех компонент планеты с точечной массой m . Наличие жидкого слоя между ядром и оболочкой может быть учтено путем присоединения к оболочке тела массы m_{02} с постоянной плотностью целиком заполняющего область $V_0 \cup V_1$. Одновременно с этим следует уменьшить плотность вещества, составляющего ядро планеты, на величину плотности жидкости ρ . Таким образом, гравитационное взаимодействие планеты с внешней точечной массой сводится к взаимодействию с этой массой двух твердых тел – модифицированными оболочкой и ядром. Согласно соотношениям (1.1), потенциальная энергия этого взаимодействия представляется функциями [8]

$$\Pi_{k3} \equiv -\gamma m \left[\frac{m_{k0}}{|\mathbf{R}_k|} - \frac{A_k - C_k}{2|\mathbf{R}_k|^3} (1 - 3\alpha_{3k}^2) \right] \quad (1.11)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R} - \xi_k \Gamma_0 \mathbf{q}, \quad \alpha_{3k} = \Gamma_k \mathbf{e}_3 \mathbf{R}_k^\circ, \quad \mathbf{R}_k^\circ = \mathbf{R}_k / |\mathbf{R}_k|; \quad k = 1, 2$$

В соотношениях (1.11) имеются члены, порядок малости которых определяется степенью отношения r_0/R , и малые члены порядка $|\mathbf{q}|/R$, $\Delta\psi$, $\Delta\theta$ и выше. Учитывая это, сохраним в выражении (1.11) члены низшего порядка малости и получим

$$\Pi_{13} + \Pi_{23} \equiv -\frac{\gamma m M}{R} + \frac{\gamma m m_r}{2R^3} [\mathbf{q}^2 - 3(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_0 \mathbf{q})^2] + \Sigma$$

$$\Sigma = \frac{\gamma m}{2R^3} \sum_{k=1}^2 (A_k - C_k) \left\{ 1 - 3(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_k \mathbf{e}_3)^2 + \right.$$

$$\left. + 3 \frac{\xi_k}{R} [(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_0 \mathbf{q}) + 2(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_k \mathbf{e}_3)(\Gamma_k \mathbf{e}_3, \Gamma_0 \mathbf{q}) - 5(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_k \mathbf{e}_3)^2 (\mathbf{R}^\circ, \Gamma_0 \mathbf{q})] \right\}; \quad \mathbf{R}^\circ = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

В рамках ограниченной постановки задачи центр масс планеты движется по невозможной кеплеровской орбите, а ядро и оболочка планеты составляют единое целое – твердое тело, которое вращается с постоянной скоростью вокруг оси симметрии. Таким образом, невозмущенное движение системы описывается соотношениями

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad \mathbf{R}^\circ = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \psi_k = \theta_k = \dot{\varphi}_k = 0; \quad k = 1, 2$$

Здесь p , e , ϑ – параметр, эксцентриситет и истинная аномалия орбиты центра масс планеты. Функция Лагранжа представляется в форме

$$L = \frac{m_{12}}{2} (\dot{\mathbf{q}}^2 + 2\dot{\mathbf{q}}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]) + \frac{m_r}{2} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \{ A_k [\dot{\psi}_k^2 \sin^2(\theta + \theta_k) + \dot{\theta}_k^2] + C_k [\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_k + \dot{\psi}_k \cos(\theta + \theta_k)]^2 \} + \quad (1.12)$$

$$+ \frac{g_1}{2} [q_1^2 + q_2^2 - 2q_3^2] - \frac{h}{2} [(\Delta\psi)^2 \sin^2 \theta + (\Delta\theta)^2] -$$

$$- \frac{\gamma m m_r}{2R^3} [\mathbf{q}^2 - 3(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_0 \mathbf{q})^2] + \Sigma, \quad m_{12} = m_1 \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2$$

Функцию Лагранжа (1.12) используем для составления уравнений движения механической системы.

2. Уравнения движения и исследование их решений. Уравнение Лагранжа относительно переменной \mathbf{q} при учете диссипативной функции (1.8) имеет вид

$$\begin{aligned} m_{12}\ddot{\mathbf{q}} + d_1\dot{\mathbf{q}} + 2m_{12}[\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}] + m_r[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}]] + K_{12}\mathbf{q} + \frac{\gamma m m_r}{R^3}[\mathbf{q} - 3(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_0\mathbf{q})\Gamma_0^{-1}\mathbf{R}^\circ] = \\ = \frac{3\gamma m}{2R^4} \sum_{k=1}^2 (A_k - C_k)[\Gamma_0^{-1}\mathbf{R}^\circ + 2(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_k\mathbf{e}_3)\Gamma_0^{-1}\Gamma_k\mathbf{e}_3 - 5(\mathbf{R}^\circ, \Gamma_k\mathbf{e}_3)^2\Gamma_0^{-1}\mathbf{R}^\circ] \quad (2.1) \\ K_{12} = g_1 \text{diag}\{-1, -1, 1/2\} \end{aligned}$$

В уравнении (2.1) сохранены члены, линейные относительно переменных \mathbf{q} , ψ_k , θ_k ($k = 1, 2$). Если нулевое решение однородного уравнения (2.1) асимптотически устойчиво, то его частное решение будет описывать вынужденные колебания около положения относительного равновесия. Поскольку эксцентриситеты орбит планет Солнечной системы достаточно малы, представляет определенный интерес рассмотреть вначале круговые орбиты, когда $e = 0$, $p = R$. В уравнении (2.1) содержатся две периодические функции времени, соответствующие частоте собственного вращения планеты ω и частоте орбитального движения $\dot{\vartheta} = \Omega = \sqrt{\gamma m R^{-3}}$. Предположим, что $\Omega \ll \omega$, и усредним все коэффициенты при переменных \mathbf{q} , ψ_k , θ_k ($k = 1, 2$) по переменным φ , ϑ , а возмущающие силы – только по переменной φ . В результате уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} m_{12}\ddot{\mathbf{q}} + d_1\dot{\mathbf{q}} + 2m_{12}\omega[\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{q}}] - m_r\omega^2[\mathbf{q} - (\mathbf{q}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3] + K_{12}\mathbf{q} + K_3\mathbf{q} = \\ = -\frac{1}{R} \sum_{k=1}^2 \xi_k M_k (-\sin\theta \sin g + 2\sin 2\theta \sin g + 5\sin^3\theta \sin^3 g)\mathbf{e}_3 \quad (2.2) \\ M_k = \frac{3}{2}\Omega^2(C_k - A_k), \quad g = \vartheta - \psi, \quad K_3 = \frac{1}{4}m_r\Omega^2(3\cos^2\theta - 1)\text{diag}\{1, 1, -2\} \end{aligned}$$

Уравнение (2.2) эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений второго порядка, которые разделяются на систему уравнений относительно переменных q_1 , q_2 и уравнения относительно переменной q_3 . Кроме того, уравнения (2.2) не содержат переменных ψ_k , θ_k ($k = 1, 2$). Уравнения относительно переменных q_1 , q_2 представляются в форме

$$\ddot{q}_1 + d_{10}\dot{q}_1 - 2\omega\dot{q}_2 + k_{12}q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + d_{10}\dot{q}_2 + 2\omega\dot{q}_1 + k_{12}q_2 = 0 \quad (2.3)$$

где

$$d_{10} = \frac{d_1}{m_{12}}, \quad k_{12} = -\frac{1}{m_{12}}\left[m_r\omega^2 + g_1 - \frac{1}{4}m_r\Omega^2(3\cos^2\theta - 1)\right] \quad (2.4)$$

В проекции на ось Cz_3 уравнение (2.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + d_{10}\dot{q}_3 + k_3q_3 = P_1 \sin g + P_3 \sin 3g \\ P_1 = P\left(2\sin 2\theta - \sin\theta + \frac{15}{4}\sin^3\theta\right), \quad P_3 = -\frac{5}{4}P\sin^3\theta \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$P = \frac{m_r}{Rm_{12}}\left(\frac{M_1}{m_{10}} - \frac{M_2}{m_{20}}\right), \quad k_3 = \frac{2g_1}{m_{12}} + \frac{m_r\Omega^2}{m_{12}}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right)$$

Систему уравнений (2.3) удобно записать в виде одного уравнения относительно комплексной переменной $z = q_1 + iq_2$. В результате получим однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + k_{12}z = 0, \quad \varepsilon = d_{10}/2 + i\omega \tag{2.6}$$

общее решение которого имеет вид

$$z = E_+ \exp(\lambda_+ t) + E_- \exp(\lambda_- t), \quad \lambda_{\pm} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k_{12}}$$

где E_+, E_- – произвольные комплексные постоянные.

Согласно второй формуле (2.4), коэффициент $k_{12} < 0$ и $\text{Re}\lambda_+ > 0, \text{Re}\lambda_- < 0$. Следовательно, нулевое решение уравнения (2.6) неустойчиво: решение, соответствующее корню характеристического уравнения λ_- , затухает, а соответствующее λ_+ – возрастает. В результате проекция центра ядра на экваториальную плоскость (плоскость Cz_1z_2) описывает раскручивающуюся спираль. Это движение можно описать формулой

$$z(t) = r \exp(t \text{Re}\lambda_+) \exp[i(t \text{Im}\lambda_+ + \alpha)], \quad r \exp(i\alpha) = E_+$$

Из физических соображений следует, что по мере удаления центров ядра и оболочки от центра планеты в невозмущенном движении точки C части ядра и оболочки попадают в зоны, где имеющееся давление недостаточно для сохранения фазовых состояний. Это означает, что на части поверхности ядра, удаляющейся от центра планеты, в связи с понижением давления твердая фаза будет переходить в жидкую, а на противоположной стороне ядра, наоборот, – жидкая фаза в твердую. Аналогичная картина будет наблюдаться на внутренней поверхности оболочки: в областях сближения оболочки и ядра вещество будет переходить из твердой фазы в жидкую, а на противоположной стороне – из жидкой фазы в твердую. Модуль числа $z(t)$ не будет расти до бесконечности и в установившемся движении окажется постоянным. При этом проекция вектора \mathbf{q} на экваториальную плоскость планеты будет вращаться с периодом $2\pi|\text{Im}\lambda_+|^{-1/2}$. Величина смещения ядра относительно оболочки в экваториальной плоскости зависит от физических свойств материала планеты и распределения давления внутри планеты.

Собственные колебания ядра относительно оболочки в проекции на ось симметрии Cz_3 затухнут, поскольку в уравнении (2.5) величины d_{10} и k_3 положительны. В результате, по прошествии некоторого времени будут наблюдаться только вынужденные колебания, описываемые формулой

$$q_3(t) = \sum_{n=1,3} P_n \frac{(k_3 - n^2\Omega^2) \sin ng - d_{10}n\Omega \cos ng}{(k_3 - n^2\Omega^2)^2 + (d_{10}n\Omega)^2}$$

Уравнения Лагранжа, соответствующие угловым переменным ψ_k, θ_k, ϕ_k ($k = 1, 2$), после линеаризации и усреднения коэффициентов уравнений по быстрым переменным ϕ, g , а правых частей уравнений только по быстрой переменной ϕ примут вид

$$A_k \ddot{\psi}_k \sin^2 \theta + C_k (\ddot{\phi}_k + \dot{\psi}_k \cos \theta) \cos \theta - H_k \dot{\theta}_k \sin \theta + (-1)^k [h \Delta \psi \sin^2 \theta + d_2 (\Delta \psi + \Delta \phi \cos \theta - \dot{\phi} \sin \theta \Delta \theta)] = -M_k \sin^2 \theta \sin 2g; \quad k = 1, 2 \tag{2.7}$$

$$A_k \ddot{\theta}_k + H_k \dot{\psi}_k \sin \theta + (-1)^k [h \Delta \theta + d_2 (\Delta \dot{\theta} + \dot{\phi} \Delta \psi \sin \theta)] = -\frac{1}{2} M_k [2 \cos 2\theta \theta_k + \sin 2\theta (1 - \cos 2g)]; \quad H_k = C_k \dot{\phi}; \quad k = 1, 2 \tag{2.8}$$

$$C_k(\ddot{\phi}_k + \ddot{\psi}_k \cos \theta) + (-1)^k d_2(\Delta \dot{\phi} + \Delta \dot{\psi} \cos \theta) = 0; \quad k = 1, 2 \quad (2.9)$$

При составлении уравнений (2.7)–(2.9) учитывалась диссипативная функция (1.9). Выражения при коэффициенте d_2 в уравнениях (2.7)–(2.9) представляют разность угловых скоростей оболочки и ядра планеты в проекциях на оси вращения, соответствующих изменениям углов Эйлера ψ , θ , ϕ . В проекциях на оси системы координат $Cz_1z_2z_3$, связанной с планетой в невозмущенном движении, разность угловых скоростей оболочки и ядра представляется в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_0 &= \Gamma_0^{-1}(\Gamma_2 \boldsymbol{\omega}_2 - \Gamma_1 \boldsymbol{\omega}_1) \equiv (\Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3, \quad \varphi = \omega t \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Omega_1 = (\Delta \dot{\theta} + \dot{\phi} \Delta \psi \sin \theta), \quad \Omega_2 = \Delta \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\phi} \Delta \theta, \quad \Omega_3 = \Delta \dot{\psi} \cos \theta + \Delta \dot{\phi}$$

Здесь \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 – орты системы координат $Cz_1z_2z_3$.

Линейная система уравнений (2.7)–(2.9) содержит две циклические координаты φ_1 и φ_2 , а структура системы такова, что позволяет понизить ее порядок с двенадцатого до восьмого, исключив эти координаты из уравнений (2.7), (2.8), используя уравнения (2.9). В результате получим систему, состоящую из уравнений (2.7), в которых отсутствует второе слагаемое в левой части и коэффициент при d_2 представлен в форме $\Delta \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\phi} \sin \theta \Delta \theta$, и уравнений (2.8); назовем ее системой S .

Исследуем систему S в рамках приближенной теории гироскопов, пренебрегая вторыми производными угловых переменных, что исключает из рассмотрения быстрые нутационные колебания с малой амплитудой. В этом случае система S представляется в виде

$$\begin{aligned} H_1 \dot{\theta}_1 + H_2 \dot{\theta}_2 &= (M_1 + M_2) \sin \theta \sin 2g \\ \dot{x} - \eta(hy + d_2 \dot{y} - d_2 \dot{\phi} x) &= (\zeta_2 - \zeta_1) \sin \theta \sin 2g, \quad x = \Delta \theta \\ \dot{y} + \eta(hx + d_2 \dot{x} + d_2 \dot{\phi} y) - (\zeta_1 \theta_1 - \zeta_2 \theta_2) \cos 2\theta &= \\ &= \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2) \sin 2\theta (1 - \cos 2g), \quad y = \Delta \psi \sin \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\eta = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}, \quad \zeta_k = \frac{M_k}{H_k}; \quad k = 1, 2$$

Вопрос об устойчивости нулевого решения однородной системы уравнений (2.11) сводится к исследованию корней характеристического уравнения, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda(c_0 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2) &= 0 \\ c_0 &= 1 + d_2^2 \eta^2 > 0, \quad c_1 = d_2 \left[\frac{2}{H_1 H_2} \dot{\phi} + 2h\eta^2 + \left(\frac{\zeta_1}{H_1} + \frac{\zeta_2}{H_2} \right) \cos 2\theta \right] > 0 \\ c_2 &= (h^2 + d_2^2 \dot{\phi}^2) \eta^2 + h \left(\frac{\zeta_1}{H_1} + \frac{\zeta_2}{H_2} \right) \cos 2\theta > 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что один корень равен нулю (следствие первого интеграла $H_1 \theta_1 + H_2 \theta_2 = \text{const}$), а два других корня имеют отрицательные действительные части.

Частное решение, соответствующее постоянному возмущению в правой части уравнений (2.11), найдем в форме

$$\psi_1 = \psi_2 = \dot{\alpha}, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0, \quad \Delta\theta \neq 0, \quad \Delta\psi \neq 0, \quad \dot{\alpha} = -\frac{M_1 + M_2}{H_1 + H_2} \cos\theta$$

В результате получим

$$\theta_1 = QM_2, \quad \theta_2 = -QM_1, \quad x_0 = -Q(M_1 + M_2), \quad y_0 = \frac{d_2\dot{\phi}}{h}x_0 \tag{2.12}$$

$$Q = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2\eta[M_1M_2 \cos 2\theta + (M_1 + M_2)(h^2 + d_2^2\dot{\phi}^2)h^{-1}]} \sin 2\theta$$

Периодическое частное решение удовлетворяет уравнениям, полученным из системы (2.11)

$$\begin{aligned} \dot{x} - \eta(hy + d_2\dot{y} - d_2\dot{\phi}x) &= B_1 \sin 2g \\ \dot{y} + \eta(hy + d_2\dot{x} + d_2\dot{\phi}\omega + a_3x) &= sB_1 \cos 2g \\ B_1 &= (\zeta_2 - \zeta_1) \sin\theta, \quad a_3 = \left(\frac{M_1H_2}{H_1} + \frac{M_2H_1}{H_2}\right) \frac{\cos 2\theta}{H_1 + H_2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$s = \frac{M_1 + M_2}{2\Omega(H_1 + H_2)} \cos 2\theta + \cos\theta$$

Решение системы (2.13) ищется в виде

$$x = \Delta\theta = \text{Re}[X \exp(2ig)], \quad y = \Delta\psi \sin\theta = \text{Re}[Y \exp(2ig)]$$

Комплексные коэффициенты X и Y удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, вытекающей из уравнений (2.13),

$$(a_1 + ib_1)X - (a_2 + ib_2)Y = -iB_1, \quad (a_2 + ib_2)X + (a_1 + a_3 + ib_1)Y = sB_1$$

$$a_1 + ib_1 = \eta d_2\omega + 2i\Omega, \quad a_2 + ib_2 = \eta(h + 2i\Omega d_2)$$

В результате найдем

$$\begin{aligned} X &= B_1[sa_2 + b_1 + i(sb_2 - a_1 - a_3)]W, \quad Y = B_1[sa_1 - b_2 + i(sb_1 + a_2)]W \\ W &= [a_1^2 + a_2^2 + a_1a_3 - b_1^2 - b_2^2 + 2i(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_1/2)]^{-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Согласно соотношениям (2.10) получим вектор относительной угловой скорости Ω_0 для установившегося движения, описываемого равенствами (2.12) и (2.14), где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \text{Re}\{[2i\Omega X + \omega Y] \exp(2ig)\} + \omega y_0 \\ \Omega_2 &= \text{Re}\{[2i\Omega Y - \omega X] \exp(2ig)\} - \omega x_0, \quad \Omega_3 = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Поскольку угловая скорость оболочки относительно ядра мала и системы координат $Cx_1x_2x_3$ и $Cy_1y_2y_3$, связанные с оболочкой и ядром, близки друг к другу, то их взаимное положение удобно описывать углами Крылова α, β, γ , полагая [9]

$$O_1(\alpha)O_2(\beta)O_3(\gamma) = \Gamma_2^{-1}\Gamma_1$$

$$O_2(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \sin \beta \\ \dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \\ \dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi \\ \Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Последнее векторное уравнение получено с учетом соотношения (2.10), и из него следуют с точностью до малых второго порядка включительно по углам Крылова и их производным равенства

$$\dot{\alpha} \equiv \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi, \quad \dot{\beta} \equiv \Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi, \quad \dot{\gamma} \equiv -\dot{\beta} \alpha$$

Компоненты угловой скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ малы и представляются суммой гармоник с частотами ω , $\omega \pm 2\Omega$, а компонента $\dot{\gamma}$ помимо отмеченных выше гармоник имеет постоянную составляющую $\langle -\dot{\beta} \alpha \rangle$, где угловые скобки означают среднее по времени содержащейся в них величины. Учитывая соотношения (2.10), (2.12), (2.15) и малость отношения $2\Omega/\omega$, получим приближенную оценку средней угловой скорости в виде

$$\langle \dot{\gamma} \rangle = -\frac{\omega}{2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{1}{2\omega}[|2i\Omega X + \omega Y|^2 + |2i\Omega Y - \omega X|^2] \quad (2.16)$$

Аналогичный эффект обнаруживается в гироскопических приборах на подвижном основании [9]. В установившемся режиме $\Delta\phi = -\Delta\psi \cos \theta$.

Если ядро и оболочка планеты динамически подобны друг другу, что означает равенство отношений $A_1 C_1^{-1} = A_2 C_2^{-1}$, то тогда $Q = 0$, $B_1 = 0$ и отмеченные выше механические эффекты отсутствуют, т.е. ядро и оболочка планеты движутся как единое твердое тело.

Проведенный анализ уравнений движения базировался на приближенных уравнениях, полученных в результате усреднения по быстрым переменным, и ряде допущений относительно членов, содержащих ускорения, что, естественно, приводит к приближенным результатам.

3. Взаимные движения ядра и оболочки в системе Земля–Луна. В качестве примера рассмотрим систему Земля–Луна, воспользовавшись данными [3] о строении Земли. В качестве основных единиц размерных величин используем кг, м, с и примем следующие числовые значения необходимых для вычислений величин:

для твердого ядра Земли

$$a = 1.25 \cdot 10^6, \quad m_1 = 9.82 \cdot 10^{22}, \quad C_1 = 5.87 \cdot 10^{34}, \quad A_1 = 5.86 \cdot 10^{34}, \quad \rho_1 = 1.20 \cdot 10^4$$

для оболочки

$$b = 3.49 \cdot 10^6, \quad m_2 = 417 \cdot 10^{22}, \quad C_2 = 7130 \cdot 10^{34}, \quad A_2 = 7100 \cdot 10^{34}, \quad \rho_2 = 0.46 \cdot 10^4$$

для жидкого сферического слоя

$$m_0 = 170 \cdot 10^{22}, \quad C_0 = 908 \cdot 10^{34}, \quad A_0 = 906 \cdot 10^{34}, \quad \rho = 10^4, \quad \xi = b/a = 2.79$$

Радиус Земли, угловые скорости суточного вращения и вращения Луны вокруг Земли соответственно таковы:

$$r_0 = 6.37 \cdot 10^6, \quad \omega = 7.29 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega = 2.67 \cdot 10^{-6}$$

Для угла наклона оси Земли к плоскости орбиты Луны примем $\theta = 23^\circ$.

В результате расчета по формулам, приведенным в разд. 2, получим следующие числовые значения величин:

$$m_{10} = 1.64 \cdot 10^{22}, \quad m_{20} = 595 \cdot 10^{22}, \quad m_r = 1.63 \cdot 10^{22}, \quad m_{12} = 9.7 \cdot 10^{22}$$

$$\xi_1 = -0.994, \quad \xi_2 = 2.7 \cdot 10^{-3}, \quad g_1/m_{12} = 1.62 \cdot 10^{-10}, \quad h = 1.87 \cdot 10^{24}$$

$$\omega^2 m_r/m_{12} = 8.9 \cdot 10^{-10}, \quad \Omega^2 m_r/(4m_{12}) = 0.3 \cdot 10^{-12}$$

В настоящее время нет надежных данных о вязких свойствах жидкого слоя Земли. Примем в качестве оценки $\mu = 5 \cdot 10^7$ Па · с [3]. Далее получим коэффициенты в уравнениях (2.3)

$$d_{10} = 4.3 \cdot 10^{-8}, \quad k_{12} = -1.06 \cdot 10^{-9}$$

и корни характеристического уравнения

$$\lambda_+ = 2.53 \cdot 10^{-9} + i7.7 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_- = -4.56 \cdot 10^{-8} + i1.38 \cdot 10^{-4}$$

Корень λ_- определяет затухающие собственные колебания центра ядра относительно оболочки в проекции на плоскость Cz_1z_2 . Это движение можно трактовать как перемещение точки на плоскости по спирали, наматывающейся на начало координат. Период вращения по спирали составляет около 12.5 часов. Второй корень λ_+ , наоборот, определяет движение по разматывающейся спирали с периодом около 9.5 суток. Это движение характеризует неустойчивость положения равновесия и, как было отмечено выше, должно привести к некоторому стационарному движению центра ядра планеты относительно оболочки за счет возникновения фазовых переходов между жидким слоем, ядром и оболочкой. Определения радиуса этого установившегося движения возможно на основе соответствующих моделей фазовых переходов и распределения температуры внутри Земли. Круг этих вопросов выходит за рамки данной статьи.

Движение центра ядра относительно центра оболочки в проекции на ось Cz_3 описывается уравнением (2.5), коэффициенты в котором таковы:

$$k_3 = 3.24 \cdot 10^{-10}, \quad P = -2.07 \cdot 10^{-10}, \quad P_1 = -2.63 \cdot 10^{-10}, \quad P_3 = 0.154 \cdot 10^{-10}$$

В результате получим вынужденные колебания вдоль оси Cz_3 в виде

$$q_3(t) = -0.85 \sin g + 3.2 \cdot 10^{-4} \cos g + 0.059 \sin 3g - 0.72 \cdot 10^{-4} \cos 3g$$

Движение представляется как сумма двух гармонических колебаний, одно из которых имеет амплитуду 85 см и период один месяц, а второе – амплитуду 6 см и период одна треть месяца.

Для оценки поворотов ядра относительно оболочки в стационарном движении воспользуемся формулами (2.12), (2.14). Соответствующие параметры для Земли примем такими:

$$M_1 = 0.107 \cdot 10^{22}, \quad M_2 = 321 \cdot 10^{22}, \quad H_1 = 4.28 \cdot 10^{30}, \quad H_2 = 5.2 \cdot 10^{33}$$

$$h = 1.87 \cdot 10^{24}, \quad d_2 = 2.58 \cdot 10^{27}, \quad Q = 0.96 \cdot 10^{-28}$$

В результате получим стационарные значения переменных

$$\dot{\alpha} = -5.7 \cdot 10^{-10}, \quad \theta_1 = 3.08 \cdot 10^{-4} (1.06'), \quad \theta_2 = -1.03 \cdot 10^{-7} (-0.02'')$$

$$\Delta\theta = x_0 = -3.08 \cdot 10^{-4}(-1.06'), \quad \Delta\psi \sin\theta = y_0 = -3.1 \cdot 10^{-5}(-6.4'')$$

Средняя угловая скорость вращения ядра относительно оболочки оценивает согласно формуле (2.16) величиной $\langle \dot{\gamma} \rangle = -3.5 \cdot 10^{-12}$. Это означает, что за год ядро планеты повернется относительно оболочки на угол 0.38'.

Кроме постоянных отклонений осей, связанных с ядром планеты, от осей, связанных с ее оболочкой, имеются периодические изменения углов между ними на частоте 2Ω , амплитуды которых определяются формулами (2.14). Расчет величин этих амплитуд для принятых выше числовых значений параметров приводит к следующим оценкам:

$$|\Delta\theta| = 7.66 \cdot 10^{-7}(0.037''), \quad |\Delta\psi| = 1.52 \cdot 10^{-5}(0.74'')$$

Это означает, что угол между осями симметрии оболочки и ядра периодически изменяется с указанными амплитудами. Согласно измерениям угловой скорости вращения Земли, в ее спектре обнаруживаются гармоники с полумесячным периодом [3].

Описанные выше динамические эффекты могут быть причиной сейсмической активности наряду с приливными эффектами в деформируемых оболочке и ядре Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-05-64107).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Darwin G.H.* The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System. London: John Murray, 1898. 360 p. = *Дарвин Дж.Г.* Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. М.: Наука, 1965.
2. *Жарков В.Н.* Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983. 415 с.
3. *Сидоренков Н.С.* Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Физматлит, 2002. 380 с.
4. *Баркин Ю.В.* Объяснение эндогенной активности планет и спутников и ее цикличности // Изв. РАЕН. Сек. наук о Земле. 2002. Вып. 9. С. 45–97.
5. *Вильке В.Г.* О движении планеты со сложной структурой. Космич. исследования. 2004. Т. 42. № 4. С. 388–396.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 583 с.; ч. 2. 727 с.
7. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. СПб.: Лань. 2003. 301 с.
8. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
9. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.

Москва
e-mail: vano1979@online.ru

Поступила в редакцию
11.IV.2005