

УДК 531.36:534.1

© 2006 г. И. А. Пасынкова

БИФУРКАЦИИ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА

Исследуется потеря устойчивости цилиндрической и конической прецессии жесткого неуровновешенного ротора в нелинейных упругих опорах с диссипацией при изменении угловой скорости вращения ротора. Предполагается, что ротор имеет четыре степени свободы. По уравнениям первого приближения установлено, что потеря устойчивости цилиндрической и конической прецессии при переходе через нулевой корень может сопровождаться возбуждением прямой синхронной прецессии гиперболоидального типа. Кроме того, получено уравнение границы возникновения автоколебаний и путем численного моделирования показано, что может иметь место суперкритическая бифуркация Хопфа и странный аттрактор.

При анализе динамики неуровновешенного жесткого ротора с четырьмя степенями свободы рассматривалась задача о вынужденных колебаниях статически и динамически неуровновешенного ротора в линейных упругих опорах [1] и задача о роторе в нелинейных упругих опорах без учета сил сопротивления, причем получены параметры цилиндрической и конической прецессии полностью уравновешенного ротора [2, 3]¹. Были найдены условия устойчивости цилиндрической прецессии статически неуровновешенного ротора в нелинейных подшипниках с двумя степенями свободы в предположении, что ротор совершает плоско-параллельное движение, в линейном приближении [4, 5] и в силу полных уравнений [6].

Было установлено [7–9], что статически и динамически неуровновешенный ротор, вертикально и симметрично (центр тяжести расположен в середине между опорами) укрепленный в нелинейных упругих опорах, может совершать стационарное движение, которое является прямой синхронной прецессией, при этом характер прецессии (цилиндрическая, коническая или гиперболоидальная) определяется видом поверхности, которую замечает ось вращения ротора в пространстве.

В данной работе на основе линейного анализа изучаются условия потери устойчивости прецессионного движения неуровновешенного ротора с четырьмя степенями свободы в зависимости от угловой скорости вращения. Ротор укреплен в неподвижных нелинейных упругих опорах. Рассматриваются квазилинейные (с кубической нелинейностью) и существенно нелинейные, задаваемые формулой Герца, реакции опор. Учитываются силы внешнего и внутреннего сопротивления. Так как прямой синхронной прецессии ротора соответствует состояние равновесия в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ротора, то возникает задача изучения однопараметрической бифуркации состояния относительного равновесия [10–12].

1. Уравнения движения. Прямые синхронные прецессии. Как и ранее [7–9], рассматривается динамически симметричный жесткий ротор, имеющий массу M , длину L , моменты инерции J_p (осевой) и J_t (экваториальный). Ротор статически и динамически неуровновешен. Статический эксцентриситет равен e . Динамический эксцентриситет характеризуется величиной δ и фазовым сдвигом ϵ . Ротор приводится во вращение двигателем, способным поддерживать постоянную угловую скорость вращения $\bar{\Omega}$.

¹ См. также: Меллер А.С. Динамика высокооборотных роторных машин. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб, 1997, 16 с.

В пренебрежении перемещением ротора вдоль оси вращения его можно рассматривать как механическую систему с четырьмя степенями свободы. В качестве обобщенных координат выбираются декартовы координаты u_j, v_j ($j = 1, 2$) j -го конца оси ротора (шипа) в плоскости, перпендикулярной оси подшипников. Упругие опоры предполагаются одинаковыми и обладающими центральной симметрией. В этом случае реакция опоры имеет только радиальную составляющую, равную $\mathbf{F}_j = -F_j(|S_j|)\mathbf{n}_j$. Здесь $S_j = u_j + iv_j$ – смещение j -го шипа от равновесного положения (в комплексной форме), \mathbf{n}_j – орт направления S_j . Учитываются силы внешнего сопротивления, пропорциональные абсолютной скорости движения шипа, $\mathbf{R}_j^{(e)} = -\tilde{\mu}_e \dot{S}_j$, и силы внутреннего сопротивления, пропорциональные относительной скорости, $\mathbf{R}_j^{(i)} = -\tilde{\mu}_i(\dot{S}_j - i\bar{\Omega}S_j)$ [13, 14].

Уравнения движения ротора можно получить на основании теорем о движении центра масс и об изменении главного момента количества движения относительно центра масс [1, 2]. Введем в рассмотрение характерный линейный размер h , например $2e$ или $L\delta$, и характерную угловую скорость ω_0 , выбор которой зависит от функции F_j . В комплексной форме, после перехода к безразмерным переменным $s_j = S_j/h$, $\tau = \omega_0 t$ и безразмерной угловой скорости $\Omega = \bar{\Omega}/\omega_0$ уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} & \dot{s}_1 + \dot{s}_2 + (\mu_e + \mu_i)(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) - i\Omega\mu_i(s_1 + s_2) + \\ & + f_1(|s_1|)\frac{s_1}{|s_1|} + f_2(|s_2|)\frac{s_2}{|s_2|} = d_1\Omega^2 \exp(i\Omega\tau) \\ & \dot{s}_2 - \dot{s}_1 + ((\mu_e + \mu_i)kl - i\Omega\lambda)(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - i\Omega\mu_i kl(s_2 - s_1) + \\ & + kl\left(f_2(|s_2|)\frac{s_2}{|s_2|} - f_1(|s_1|)\frac{s_1}{|s_1|}\right) = (1 - \lambda)d_2\Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $f_j(|s_j|) = 2F_j(h|s_j|)/(hM\omega_0^2)$ и дифференцирование ведется по безразмерному времени τ . Остальные параметры, которые можно назвать конструктивными, имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} k &= \frac{ML^2}{4(J_t - J_p)}, \quad \lambda = \frac{J_p}{J_t}, \quad l = 1 - \lambda, \quad d_1 = \frac{2e}{h}, \quad d_2 = \frac{L\delta}{h} \\ \mu_e &= \frac{2\tilde{\mu}_e}{M\omega_0}, \quad \mu_i = \frac{2\tilde{\mu}_i}{M\omega_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для динамически вытянутого тела ($\lambda < 1$) параметр $k > 0$, а для динамически сжатого ($\lambda > 1$) имеем $k < 0$, так как $kl > 0$.

Система (1.1) допускает решение вида

$$s_j = R_j \exp(i\varphi_j) \exp(i\Omega\tau), \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

где R_j, φ_j – вещественные постоянные и $R_j > 0$. Величина R_j – это радиус круговой орбиты j -го шипа, а φ_j – угол сдвига фазы относительно возмущающей силы.

Решение (1.3) представляет собой прямую синхронную прецессию ротора. Если $\varphi_1 = \varphi_2$ и $R_1 = R_2$, то имеет место цилиндрическая прецессия (ЦП). Если $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ при любых R_1, R_2 , то имеет место коническая прецессия (КП). Если же $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $R_1 \neq R_2$, то прецессия будет гиперболоидальной. Легко видеть, что ЦП ($s_1 = s_2$) может реализоваться только в случае динамически уравновешенного ротора ($\delta = 0$), так как при этом

второе уравнение системы (1.1) удовлетворяется тождественно. В свою очередь, симметричная коническая прецессия (СКП), для которой $s_1 = -s_2$, может реализоваться только в случае статически уравновешенного ротора ($e = 0$), так как при этом первое уравнение системы (1.1) удовлетворяется тождественно.

Подставив решение (1.3) в систему (1.1), получим линейную неоднородную систему алгебраических уравнений относительно величин $\exp(i\varphi_j)$ ($j = 1, 2$), разрешив которую, получим

$$\exp(i\varphi_j) = \frac{\Omega^2}{R_j \Delta_{\text{res}}} (d_1(B_{3-j} + ik\mu_e \Omega) + (-1)^j d_2(A_{3-j} + i\mu_e \Omega) \exp(-i\varepsilon))$$

$$\Delta_{\text{res}} = \Delta - 2k\mu_e^2 \Omega^2 + i\mu_e \Omega \sum_{j=1,2} (kA_j + B_j) \neq 0 \tag{1.4}$$

$$\Delta = A_1 B_2 + A_2 B_1; \quad A_j = \frac{f_j(R_j)}{R_j} - \Omega^2; \quad B_j = k \frac{f_j(R_j)}{R_j} - \Omega^2$$

Множество $\Delta = 0$ определяет в пространстве $\{R_1, R_2, \Omega^2\}$ множество *нелинейных резонансов*, и его роль подобна скелетной кривой в амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) уравнения Дуффинга. Это множество недостижимо ни при каких конечных значениях частоты для статически и динамически неуравновешенного ротора, вращающегося без сопротивления [7]. Как будет показано, вблизи этого множества возникает неустойчивость прямой синхронной прецессии.

Свойство $|\exp(i\varphi_j)| = 1$ позволяет получить систему для определения величин R_j , а затем можно найти и фазы φ_j . Отметим, что все полученные до сих пор величины, как то $\exp(i\varphi_j)$, Δ_{res} , Δ , R_j и φ_j , не зависят от коэффициента внутреннего сопротивления μ_i . Уравнение

$$|\exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))| = 1 \tag{1.5}$$

задает в пространстве $\{R_1, R_2, \Omega^2\}$ интегральное множество, которому только и могут принадлежать состояния относительного равновесия системы (1.1). Для ротора, имеющего один вид неуравновешенности, множество (1.5) включает плоскость $R_1 = R_2$ и некоторую поверхность, симметричную относительно этой плоскости. Состояния равновесия, параметризующие ЦП или СКП, локализованы на плоскости $R_1 = R_2$. Далее будут изучаться цилиндрические и симметричные конические прямые синхронные прецессии.

Для исследования устойчивости полученных режимов прямой синхронной прецессии можно применить стандартный линейный анализ. Система уравнений в вариациях для ЦП и СКП (восьмого порядка) разделяется на две независимые подсистемы четвертого порядка, поэтому характеристический полином представляется в виде произведения двух полиномов четвертой степени P_1 и P_2 [8, 9]. Границы потери устойчивости определяются появлением нулевых или чисто мнимых корней, что соответствует обращению в нуль свободных членов этих полиномов или определителей Гурвица третьего порядка.

При изучении точек бифуркации, в которых матрица устойчивости имеет один нулевой корень, можно применить элементарную теорию катастроф [12]. Исследование точек бифуркации, где существует одна пара чисто мнимых корней, проводится численно.

2. Бифуркации цилиндрической прецессии. *Амплитудно-частотная характеристика ЦП.* Рассмотрим статически неуравновешенный ротор ($e \neq 0$, $\delta = 0$), укрепленный в квазилинейных с кубической нелинейностью упругих опорах. Пусть сила реакции задана в виде

$$F_j = -(a_0 + a_1 |S_j|^2) S_j, \quad j = 1, 2$$

где a_0, a_1 – коэффициенты, характеризующие упругие свойства опоры. В данном случае удобно выбрать $h = 2e$, $\omega_0^2 = 2a_0/M$ и перейти к новым переменным $x = \Omega^2$, $y_j = R_j^2$.

Среди решений (1.3) можно выделить решения $s_1 = s_2$, соответствующие ЦП. Но среди решений (1.3) есть и такие, что $y_1 \neq y_2$.

Уравнение поверхности (1.5) принимает вид

$$y_1 B_1^2 - y_2 B_2^2 + (y_2 - y_1) k^2 \mu_e^2 x = 0 \quad (2.1)$$

или

$$(y_2 - y_1)[L_2(x, y_1, y_2) + L_1(x, y_1, y_2) + k^2 + k^2 \mu_e^2 x] = 0$$

$$L_2(x, y_1, y_2) = x^2 + k^2 c^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) - 2kcx(y_1 + y_2)$$

$$L_1(x, y_1, y_2) = -2kx + 2k^2 c (y_1 + y_2); \quad c = 4e^2 a_1 / a_0$$

При $\mu_e = 0$ это множество представляет собой плоскость $y_1 = y_2$ и не прямой эллиптический конус с вершиной в точке $\{k, 0, 0\}$, причем этот конус касается плоскости $\{x, y_j\}$ по прямой $B_{3-j} = 0$ ($j = 1, 2$). Эллипс в сечении конуса плоскостью $x = \text{const}$ ориентирован так, что одна из его осей направлена по биссектрисе координатного угла. При $\mu_e \neq 0$ поверхность (2.1) принимает вид плоскости $y_1 = y_2$ и чаши двуполостного эллиптического гиперboloида

$$L_2(x, y_1, y_2) + L_1(x, y_1, y_2) + k^2 + k^2 \mu_e^2 x = 0 \quad (2.2)$$

который асимптотически приближается к конусу при $\mu_e \rightarrow 0$. Гиперboloид (2.2) и плоскость $y_1 = y_2$ пересекаются по гиперболе

$$(k(1 + cy) - x)(k(1 + 3cy) - x) + k^2 \mu_e^2 x = 0; \quad y = y_1 = y_2 \quad (2.3)$$

которая при $\mu_e = 0$ вырождается в пару своих асимптот.

Множество нелинейных резонансов вырождается в $A_1 B_1 = 0$ и представляет собой две прямые $(1 + cy - x)(k(1 + cy) - x) = 0$. Амплитудно- и фазово-частотные характеристики ЦП имеют вид

$$\sqrt{y((1 + cy - x)^2 + \mu_e^2 x)} - \frac{1}{2}x = 0, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\mu_e \sqrt{x}}{1 + cy - x} \quad (2.4)$$

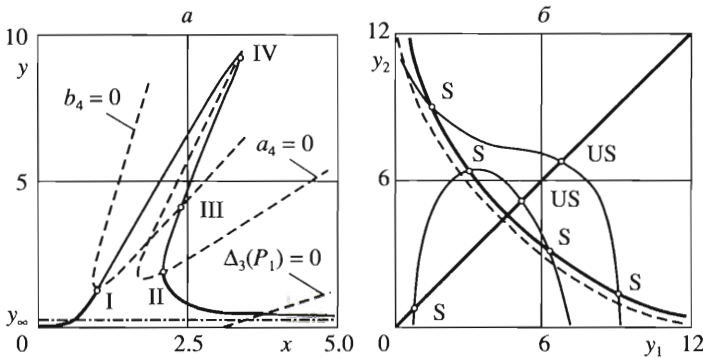
При достаточно малом внешнем сопротивлении ($\mu_e \leq \sqrt{c}/2$) или его отсутствии ($\mu_e = 0$) АЧХ состоит из двух ветвей, которые не имеют общих точек с резонансной прямой $1 + cy - x = 0$ [15].

Имеет место самоцентрирование ротора, и предельное значение при $x \rightarrow \infty$ равно $y_\infty = 1/4$. Это соответствует тому, что радиус ЦП в точности равен эксцентриситету e , т.е. ротор вращается таким образом, что его центр масс стремится занять положение на оси подшипников.

На фиг. 1, a показана АЧХ для динамически вытянутого ротора ($\lambda < 1, k > 0$) при следующих значениях конструктивных параметров:

$$k = 0.6, \quad l = 0.3, \quad c = 0.25, \quad \mu_e = 0.3, \quad \mu_i = 0.4 \quad (2.5)$$

Показано предельное значение $y = y_\infty$ (штрихпунктирная линия).



Фиг. 1

Устойчивость ЦП. Коэффициенты характеристического полинома P_2 для второго уравнения системы (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1, & b_1 &= 2kl\mu, & b_2 &= 2kl(1 + 2cy) + (l^2 + 1)x + k^2l^2\mu^2 \\
 b_3 &= 2k^2l^2\mu(1 + 2cy) + 2kl(\mu_e - l\mu_i)x \\
 b_4 &= l^2((k(1 + cy) - x)(k(1 + 3cy) - x) + k^2\mu_e^2x); & \mu &= \mu_e + \mu_i
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_4 полинома P_1 для первого уравнения определяются по соответствующим формулам (2.6) при $k = l = 1$.

Условия перехода через нулевые корни

$$\begin{aligned}
 a_4 &= (1 + cy - x)(1 + 3cy - x) + \mu_e^2x = 0 \\
 b_4 &= (k(1 + cy) - x)(k(1 + 3cy) - x) + k^2\mu_e^2x = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

не зависят от коэффициента внутреннего сопротивления μ_i , как и амплитудная кривая (2.4). Из условий (2.7) видно, что неустойчивость возникает вблизи нелинейных резонансов

$$A_1 = 1 + cy - x = 0, \quad B_1 = k(1 + cy) - x = 0$$

Каждое из условий (2.7) на плоскости $\{x, y\}$ представляет собой гиперболу, а каждая резонансная линия – одна из асимптот этих гипербол. Второе условие (2.7) перехода через нулевой корень и условие (2.3) ветвления интегрального множества совпадают.

Можно показать, что без учета внутреннего сопротивления условия критерия Рауса – Гурвица нарушаются только при $\{a_4 \leq 0\} \cup \{b_4 \leq 0\}$, т.е. потеря устойчивости может происходить только в результате перехода через нулевые корни характеристического определителя. Отсюда можно заключить, что режим самоцентрирования ротора при больших угловых скоростях асимптотически устойчивый.

При наличии внутреннего сопротивления, если $\mu_i > \max(\mu_e, \mu_e/l)$, коэффициенты a_3 и b_3 становятся отрицательными при достаточно больших значениях x и ограниченных значениях y . Кроме того, при $a_4 > 0$ и $b_4 > 0$ неравенства $a_3 < 0, b_3 < 0$ влекут за собой неравенства

$$\begin{aligned}
 \Delta_3(P_1) &= -a_1^2a_4 - a_3^2a_0 + a_1a_2a_3 < 0 \\
 \Delta_3(P_2) &= -b_1^2b_4 - b_3^2b_0 + b_1b_2b_3 < 0
 \end{aligned}$$

т.е. при больших угловых скоростях режим самоцентрирования ротора становится неустойчивым.

На фиг. 1, *a* показаны также границы перехода через нулевые корни $a_4 = 0$, $b_4 = 0$ и через чисто мнимые корни (штриховые линии). При $l = 0.3$ для всех x справедливы неравенства $\Delta_3(P_2) > 0$, $b_3 > 0$ и граница перехода через чисто мнимые корни имеет вид

$$\Delta_3(P_1) = c^2 y^2 + 2cy(4x + \mu^2) - (4x + \mu^2)((\mu_i/\mu)^2 x - 1) = 0 \quad (2.8)$$

Эта кривая – часть ветви гиперболы, которая с большой точностью аппроксимируется своей асимптотой $y = ((\mu_i/\mu)^2 x - 1)/(2c)$. Участки асимптотически устойчивых режимов амплитудной кривой показаны жирной линией. Параметры выбраны таким образом, чтобы кривые $a_4 = 0$, $b_4 = 0$ и АЧХ не пересекались в одной точке (тем самым исключается случай кратных нулевых корней).

Бифуркации ЦП при переходе через нулевой корень. Во вращающейся системе координат система (1.1) будет автономной, и для изучения поведения системы на участке $\{a_4 \leq 0\} \cup \{b_4 \leq 0\}$ можно применить элементарную теорию катастроф [12]. Кривые $a_4 = 0$, $b_4 = 0$ на плоскости $\{x, y\}$ образуют бифуркационное множество, а точки I–IV пересечения этих кривых с АЧХ являются вырожденными критическими точками или “неморсовскими” критическими точками (фиг. 1, *a*). Изменение параметра вызывает качественное изменение в поведении системы в окрестности вырожденной критической точки. Происходит расщепление вырожденной точки на ряд невырожденных (“морсификация”) и изменяется их локализация, причем в однопараметрической задаче при изменении параметра в одну сторону вырожденная точка расщепляется на три изолированные “неморсовские” точки, а при изменении параметра в другую сторону число особых точек не изменяется, но точка перестает быть вырожденной.

В соответствии с этим легко проследить, как происходит потеря устойчивости ЦП в диапазоне частот от точки I до точки IV. При увеличении частоты вырожденная точка I расщепляется на три невырожденных: ЦП становится неустойчивой и появляются два устойчивых режима прямой синхронной прецессии, локализованные на поверхности двуполостного гиперboloида (2.2). Эти прецессии уже не цилиндрические. При дальнейшем увеличении частоты и переходе через критическую точку II она в свою очередь также расщепляется на три невырожденных. Общее число состояний равновесия достигает пяти, при этом возможны три различных режима ЦП (два из них неустойчивы и один асимптотически устойчив). При дальнейшем увеличении частоты и переходе через вырожденную точку III происходит еще одно расщепление, при этом число различных режимов ЦП остается равным трем, из них два неустойчивы, а один, с минимальной амплитудой – асимптотически устойчив. Число различных прецессий нецилиндрического типа достигло четырех. И, наконец, при переходе через точку IV число невырожденных точек уменьшается на две. Имеется один асимптотически устойчивый режим ЦП и четыре режима прямой синхронной прецессии нецилиндрического типа.

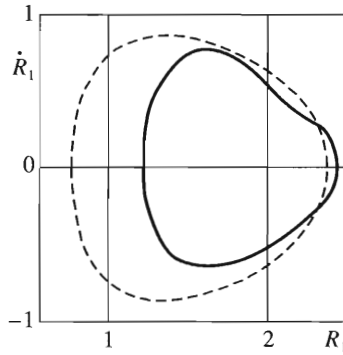
Для фиксированной частоты радиусы орбит шипов находятся как точки пересечения кривой (1.5) и кривой

$$|\exp(i\varphi_1)| = 1 \quad (2.9)$$

(или кривой $|\exp(i\varphi_2)| = 1$), а фазы удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{k\mu_e \sqrt{x}(B_1 - B_2)}{B_1 B_2 + k_2 \mu_e^2 x}$$

Следовательно, состояния равновесия, локализованные на гиперboloида (2.2), – это прецессии гиперboloидального типа, так как при неравных радиусах орбит шипов их фазы не совпадают и не различаются на π .



Фиг. 2

На фиг. 1, б при $x = 2.6$ показаны сечения поверхности (1.5) при $\mu_e \neq 0$ (жирная линия) и при $\mu_e = 0$ (штриховая линия), кривая (2.9) показана тонкой линией, светлыми точками показаны состояния равновесия (S – устойчивые, US – неустойчивые). Имеется три состояния равновесия, соответствующие ЦП, расположенные на биссектрисе, и четыре асимптотически устойчивых состояния равновесия, соответствующие несимметричной гиперболюидальной прецессии. Численная проверка подтвердила, что все корни характеристического уравнения для этих точек имеют отрицательные вещественные части.

Бифуркация Хопфа. Странный аттрактор. Уравнение $\Delta_3(P_1) = 0$ также определяет бифуркационное множество на плоскости $\{x, y\}$. В точке пересечения этой кривой и АЧХ характеристический полином $P_1 = 0$ имеет одну пару чисто мнимых корней. В зависимости от знака ляпуновского показателя бифуркация может быть одного из двух типов [10, 11]: “мягкого” типа, когда потеря устойчивости сопровождается отделением устойчивого предельного цикла, и “жесткого” типа, когда потеря устойчивости происходит вследствие слияния с существовавшим ранее неустойчивым предельным циклом. Численное интегрирование системы (1.1) показывает, что для конструктивных параметров (2.5) имеет место “мягкое” возбуждение автоколебаний (суперкритическая бифуркация Хопфа [12]).

Точка амплитудной кривой, где появляется пара чисто мнимых корней, имеет координаты $(x = 3.8, y = 0.48)$ (фиг. 1, а). На фиг. 2 для значения $x = 6$ ($\Omega = \sqrt{6}$) показан предельный цикл на плоскости $\{R_1, \dot{R}_1\}$ фазового пространства $\{R_1, \dot{R}_1, R_2, \dot{R}_2, \varphi_1 - \varphi_2, \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\}$. Этот график соответствует 20 оборотам ротора в установившемся режиме (после 180 оборотов). Периодическое движение, параметризуемое этим предельным циклом, – ЦП, так как при этом $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Предельный цикл для второго шипа (на плоскости $\{R_2, \dot{R}_2\}$) имеет такой же вид.

При изучении статически неуравновешенного ротора, укрепленного в квазилинейных упругих опорах, в рамках модели ротора с двумя степенями свободы, был предложен [16] приближенный метод отыскания автоколебаний, следуя которому, будем искать автоколебания в виде

$$s_j = r_j \exp(i(\omega\tau + \psi)) + R_j \exp(i(\Omega\tau + \varphi_j)) \tag{2.10}$$

где $r_j, R_j, \varphi_j, \psi, \omega$ – неизвестные величины. Представление автоколебаний в таком виде позволяет выделить в решении с неизвестным периодом составляющую, имеющую период внешней возмущающей силы. После подстановки выражений (2.10) в уравнения (1.1) и усреднения по периоду $2\pi/(\Omega - \omega)$ получим приближенные уравнения относитель-

но неизвестных $r_j, R_j, \varphi_j, \omega$, которые не будут зависеть от ψ . Эти уравнения имеют решения

$$r_1 = r_2 = r, \quad R_1 = R_2 = R, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

Для определения неизвестных ω, r, R, φ получим следующие приближенные уравнения:

$$\begin{aligned} \mu\omega - \mu_i\Omega &= 0, \quad c(r^2 + 2R^2) + 1 - \omega^2 = 0 \\ R(kc(2r^2 + R^2) + k - \omega^2)\sin\varphi + k\mu_e R\Omega\cos\varphi &= 0 \\ R(kc(2r^2 + R^2) + k - \omega^2)\cos\varphi - 2k\mu_e R\Omega\sin\varphi &= \Omega^2/4 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из первого уравнения системы (2.11) находим значение ω , что позволит приближенно определить период автоколебаний T через время одного оборота ротора T_r :

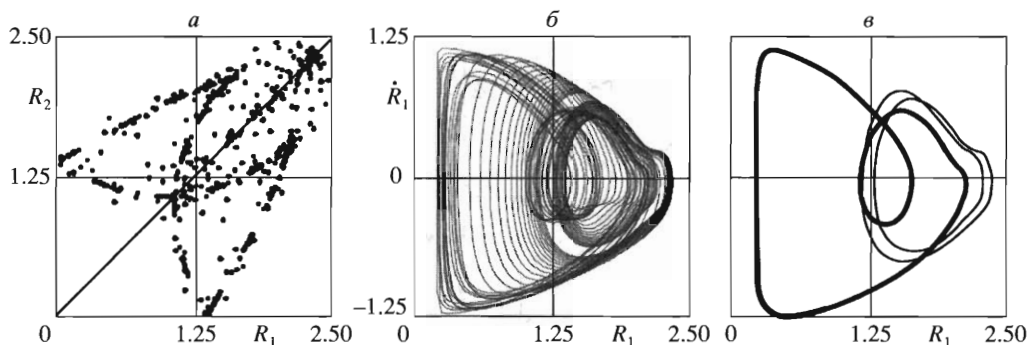
$$\omega = \frac{\mu_i}{\mu}\Omega, \quad T \approx \frac{\mu}{\mu_e} \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\mu}{\mu_e} T_r \quad (2.12)$$

На фиг. 2 штриховой линией показан предельный цикл, построенный на основе приближенных уравнений (2.11). Наблюдается достаточно хорошее совпадение (погрешность $\approx 2.5\%$) точного и приближенного решений для максимальных значений отклонений, что наиболее важно. Погрешность в определении периода автоколебаний составляет примерно 6.5% . Следует, однако, отметить, что с ростом Ω точность приближенных значений падает.

Было проведено численное интегрирование системы (1.1) в диапазоне частот $x \in [4, 10]$ ($\Omega \in [2, 3.16]$), которое показало, что устойчивые автоколебания с периодом, близким к значению T , существуют при всех частотах из этого диапазона, но при некоторых значениях частоты их область притяжения весьма ограничена. Так, в диапазоне $x \in (4.3, 7.7)$ ($\Omega \in (2.07, 2.77)$) проявилась чувствительность автоколебаний к изменению начальных данных и наряду с T -периодическим движением обнаружено существование других аттракторов.

При интегрировании для каждой частоты изменялись только начальные значения R_j , начальные значения остальных переменных были приняты равными нулю. Квадрат 5×5 по R_1, R_2 был разбит на элементы 1×1 . На АЧХ (фиг. 1, а) максимальное значение $Y_{\max} \approx 9.25$, или $R_{1\max} = R_{2\max} \approx 3.04$, следовательно, диапазон изменения начальных данных достаточно широкий. Внутри каждого элемента точка выбиралась случайно, кроме диагональных элементов, где выбиралось значение на диагонали, но тоже случайно. По времени интегрирование велось до 500 оборотов ротора. Численный эксперимент показал, что на частотах в диапазоне $x \in (4.3, 7.7)$ существует еще $2T$ -периодический предельный цикл, который параметризует гиперболоидальную прецессию сложной структуры. Если начальные значения выбирать симметричными (равными) или очень близкими к ним, то траектория стремится к автоколебаниям с периодом, близким к T , причем процесс устанавливается достаточно быстро (не больше 20 оборотов ротора). Если начальные данные выбирать не равными, то траектория стремится к автоколебаниям с периодом, близким к $2T$.

Типичная реализация процесса $R_1(\tau)$ выглядит так. На начальной стадии (кроме самых первых оборотов) траектория на плоскости $\{R_1, \dot{R}_1\}$ близка к T -периодическому предельному циклу, затем происходит удвоение периода и траектория разделяется на две петли (одна внутри предельного цикла, другая – снаружи), затем движение “соскальзывает” в хаотическое (наблюдается “странный аттрактор”), а затем происходит синхронизация и устанавливается $2T$ -периодический предельный цикл. С увеличением разности начальных значений $|R_1 - R_2|$ уменьшаются (или исчезают совсем) первые две фа-



Фиг. 3

зы процесса и увеличивается время хаотического движения. Для некоторых вариантов процесс полностью не устанавливался даже за 700 оборотов.

На фиг. 3, а показан странный аттрактор на плоскости $\{R_1, R_2\}$ ($\tau = 0[\text{mod}(2\pi/\Omega)]$) для $x = 6$ при начальных значениях $R_1 = 2.427, R_2 = 1.321$. Отчетливо видна синхронизация, т.е. существование квазипериодического решения, параметризуемого предельным циклом с двумя петлями.

На фиг. 3, б для той же частоты и начальных значений показана фазовая траектория на плоскости $\{R_1, \dot{R}_1\}$, отражающая хаотическое движение первого шипа на отрезке времени от 80 до 200 оборотов ротора. На фиг. 3, в показан предельный цикл с двойной петлей (жирная линия), кривая соответствует времени от 450 до 500 оборотов ротора; тонкой линией показана вторая фаза движения от 50 до 70 оборотов, когда произошло удвоение периода и у предельного цикла появилась вторая петля. На первом этапе (до 40–45 оборотов) движение шло вблизи предельного цикла с одной петлей (фиг. 2).

Интересно проследить за эволюцией предельного цикла с двойной петлей в диапазоне частот, где он существует. При рождении ($x \approx 4.3$) обе петли цикла близки друг к другу, они как бы охватывают существовавший до этого предельный цикл изнутри и снаружи, затем при увеличении частоты внутренняя петля постепенно сжимается, а внешняя расширяется, и, наконец, внутренняя петля пропадает ($x \approx 7.7$) и устанавливается предельный цикл с одной петлей.

3. Бифуркации симметричной конической прецессии. Рассмотрим динамически неустойчивый ротор ($e = 0, \delta \neq 0$) и силы реакции, заданные формулой Герца

$$F_j = -a_0 |S_j|^{1/2} S_j, \quad j = 1, 2$$

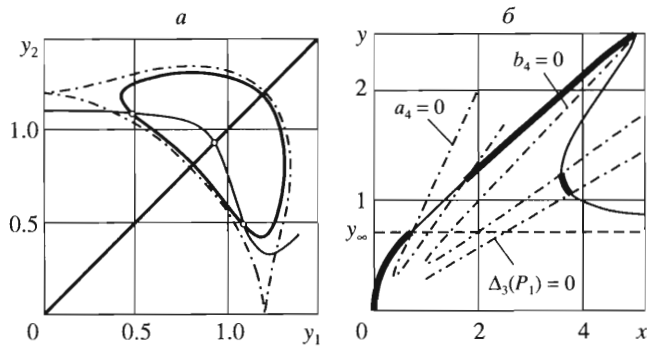
Удобно выбрать

$$h = L\delta, \quad \omega_0^2 = 2a_0 \sqrt{L\delta}/M$$

и перейти к новым переменным

$$x = \Omega^2, \quad y_j = \sqrt{R_j}$$

Множество (1.5) в пространстве $\{x, y_1, y_2\}$ представляет собой плоскость $y_1 = y_2$ и конус ($\mu_e = 0$) или чашу двуполостного гиперboloида ($\mu_e \neq 0$). На фиг. 4, а для $x = 1.21$ показаны сечения поверхности (1.5) при $\mu_e \neq 0$ (жирная линия) и $\mu_e = 0$ (штриховая линия).



Фиг. 4

Рассмотрим СКП, когда

$$y_1 = y_2 = y, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi + \pi$$

Резонансное множество $\Delta = 0$ представляет собой две пересекающиеся прямые $(y - x)(ky - x) = 0$. Амплитудно- и фазово-частотные характеристики имеют вид

$$y^2 \sqrt{(ky - x)^2 + k^2 \mu_e^2 x} - \frac{1}{2}x = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{k \mu_e \sqrt{x}}{ky - x} \quad (3.1)$$

Самоцентрирование ротора при $x \rightarrow \infty$ определяется значением $y = y_\infty = 1/\sqrt{2}$. Это означает, что ротор вращается так, что его ось динамической симметрии стремится занять положение, совпадающее с осью подшипников.

На фиг. 4, б приведена амплитудная кривая СКП динамически вытянутого ротора для

$$k = 2, \quad l = 0.3, \quad \mu_e = 0.09, \quad \mu_i = 0.13$$

Штриховой линией показано предельное значение $y = y_\infty$.

При данном l имеем $\Delta_3(P_2) > 0$, $b_3 > 0$ для всех x , и условия перехода через нулевые и чисто мнимые корни

$$a_4 = (y - x)(3y - 2x) + 2\mu_e^2 x = 0$$

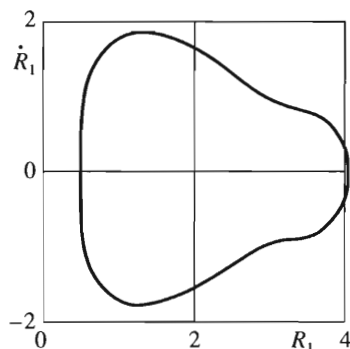
$$b_4 = (ky - x)(3ky - 2x) + 2k^2 \mu_e^2 x = 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta_3(P_1) = y^2 + 80xy - 64(\mu_i/\mu)^2 x^2 + 20\mu^2 y - 16\mu_i^2 x = 0$$

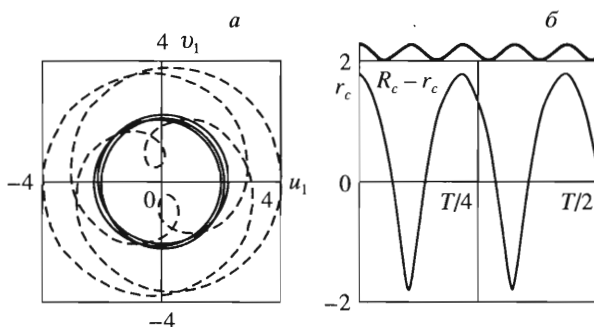
показаны на фиг. 4, б штрихпунктирными линиями. Асимптотически устойчивые режимы показаны жирными отрезками амплитудной кривой.

Для конкретной частоты x из диапазона $a_4 < 0$ радиусы орбит шипов можно найти как точки пересечения кривой (1.5) и кривой (2.9), а величины φ_1 удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\mu_e \sqrt{x}(A_1 - A_2)}{A_1 A_2 + \mu_e^2 x} \quad (3.3)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Следовательно, устойчивые режимы в этом диапазоне – прецессии гиперboloидального типа. На фиг. 4, а кривая (2.9) показана тонкой линией, светлыми точками отмечены состояния равновесия (неустойчивое – на биссектрисе, и два устойчивых, расположенных симметрично относительно биссектрисы).

Для выбранных значений конструктивных параметров критическая точка, где у уравнения $P_1 = 0$ одна пара чисто мнимых корней, имеет координаты $(x_{\text{bif}} = 3.775, y_{\text{bif}} = 1.051)$ (фиг. 4, б).

На фиг. 5 для значения $\chi = 5$ (или $\Omega = \sqrt{5}$) построен предельный цикл для первого шипа на плоскости $\{R_1, \dot{R}_1\}$ шестимерного фазового пространства $\{R_1, \dot{R}_1, R_2, \dot{R}_2, \phi_1 - \phi_2, \phi_1 - \phi_2\}$. График соответствует двадцати оборотам ротора в установившемся режиме (после 180 оборотов), он практически симметричен относительно оси абсцисс. Предельный цикл для второго шипа (на плоскости $\{R_2, \dot{R}_2\}$) имеет точно такой же вид.

На фиг. 6, а приведены траектории центра масс ротора (жирная линия) и одного из шипов (штриховая линия) в плоскости, перпендикулярной оси подшипников, т.е. в плоскости $\{u_1, v_1\}$ (u_1, v_1 – безразмерные декартовы координаты), а на фиг. 6, б показаны смещение центра масс r_c относительно оси подшипников (жирная линия) и смещение $(R_1 - r_c)$ одного из шипов относительно центра масс (тонкая линия) на интервале времени $T/2 = \pi/\Omega$, который соответствует полуобороту ротора. Отсюда можно заключить, что автоколебания представляют собой сложение высокочастотных, близких к гармо-

ническим, колебаний центра масс с малой амплитудой около некоторого среднего значения и конических колебаний относительно центра масс с частотой, приблизительно в два раза меньшей.

Численный эксперимент показал, что с увеличением угловой скорости ротора частота колебаний центра масс растет, а также значительно возрастает среднее значение смещения центра масс и уменьшаются амплитуда колебаний центра масс, коническая раскачка оси ротора относительно центра масс и разность фаз. Так, для угловой скорости вращения ротора $\Omega = 3\sqrt{2}$ ($x = 18$) частота колебаний центра масс достигает значения 17.5, смещение центра масс изменяется в пределах $39.34 < r_c < 39.42$, отклонение шипов от центра масс и разность фаз удовлетворяют неравенствам

$$|R_j - r_c| < 2.4, \quad |\varphi_1 - \varphi_2| < 0.36$$

Таким образом, по характеру движения автоколебания приближаются к цилиндрической прецессии, причем угловая скорость этой прецессии возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko S.P.* Vibration Problems in Engineering. Toronto: Van Nostrand, 1955 = *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
2. *Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И.* Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.
3. *Кельзон А.С., Меллер А.С.* Динамика статически неуравновешенного ротора в подшипниковых опорах // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 1. С. 69–72.
4. *Меркин Д.Р.* Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 378–384.
5. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
6. *Румянцев В.В.* Об устойчивости установившихся движений систем с квазициклическими координатами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 918–927.
7. *Пасынкова И.А.* Гиперболоидальная прецессия ротора в нелинейных упругих опорах // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4. С. 88–95.
8. *Пасынкова И.А.* Устойчивость конической прецессии жесткого неуравновешенного ротора // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 1. С. 82–86.
9. *Архипова И.М., Пасынкова И.А.* Исследование прецессионного движения неуравновешенного ротора // Вторые Поляховские чтения: Избр. труды. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПб. ун-та, 2000. С. 65–72.
10. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
12. *Gilmore R.* Catastrophe Theory for Scientist and Engineers. N. Y.: Wiley, 1981 = *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: В 2-х кн. М.: Мир, 1984. Кн. 1. 350 с.; Кн. 2. 285 с.
13. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 248 с.
14. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
15. *Genta G.* Vibration of Structure and Machines: Practical Aspects. Berlin: Springer, 1999. 599 p.
16. *Tondl A.* Some Problems of Self-Excited Vibrations of Rotors. Praha: Publ. SNTL, 1974 = *Тондл А.* Автоколебания механических систем. М.: Мир, 1979. 429 с.