

УДК 531.36:62-50

© 2006 г. О. Р. Каюмов

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Обсуждается понятие параметрической управляемости применительно к системам твердых тел. Речь идет о лагранжевых системах, для которых возможно “размораживание” параметров, например, уточнение модели путем учета малой изменяемости звеньев, принимаемых в первом приближении твердыми телами. Именно учет малого изменения параметров, как показано, может обеспечить управляемость механизма, который не был управляемым в предположении об абсолютной твердости звеньев. Предлагаются некоторые достаточные условия параметрической управляемости на инвариантных многообразиях для объектов с циклическими координатами. В качестве примера рассматривается двузвенный маятник в горизонтальной плоскости при действии внутреннего момента (от первого звена ко второму). Изучено влияние его массоинерционных параметров на свойства управляемости. Показана параметрическая управляемость такого объекта на многообразии нулевого кинетического момента за счет упругой податливости второго звена либо за счет колебаний дополнительной массы на пружине вдоль первого звена. Рассматривается также пример параметрически управляемого планетарного механизма с проскальзыванием дисков.

При моделировании механических систем возникает вопрос о влиянии пренебрегаемых степеней свободы на характер движения. Известны примеры, когда учет малой упругой податливости звеньев, либо “слабый люфт” в конструкциях связей, либо незначительная изменяемость твердых тел (когда параметры “размораживаются”) приводит к качественным различиям в свойствах устойчивости движения. Ниже исследуется влияние такого рода факторов на управляемость, понимаемую в традиционном смысле [1].

1. Вспомогательные результаты. Рассматриваются натуральные лагранжевы системы, т.е. объекты с симметричной относительно обращения времени ($t \rightarrow -t$) функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - B(\mathbf{q})$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – вектор обобщенных координат, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ – положительно определенная матрица инерции. Полагаем, что потенциальная энергия $B(\mathbf{q})$ ограничена снизу: $B(\mathbf{q}) \geq 0, B(\mathbf{0}) = 0$, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u} \tag{1.1}$$

Вектор управлений $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ удовлетворяет ограничениям $|u_i| \leq a_i, a_i$ – заранее заданные числа ($i = 1, 2, \dots, n$). В частном случае некоторые из величин a_i могут быть нулевыми, т.е. число степеней свободы n может превосходить число управлений. Например, если $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq j$), то система (1.1) “управляется по скалярному входу u_j ”.

Так как функция Лагранжа может быть периодической относительно некоторых (“угловых”) координат q_i (пусть число их r), то конфигурационным пространством считаем $M = \mathbf{T}^r \times \mathbf{R}^{n-r}$, где \mathbf{T}^r – r -мерный тор. Тогда фазовое пространство $\text{ТМ} = \mathbf{T}^r \times \mathbf{R}^{2n-r}$. Запись $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \text{ТМ}$ подразумевает, что числовые значения координат берутся из соответствующего накрывающего пространства $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{2n-r}$.

Если обратной связи $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ соответствует сепаратрисная поверхность в ТМ , движение по которой к особой точке происходит за бесконечное время, то поверхность обозначается $\Omega(\mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$. Множество положений равновесия $\xi_0 = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \partial B/\partial \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ непустое; число компонент этих многообразий полагаем конечным.

Число степеней свободы может превосходить количество управляющих воздействий. Будем опираться на результаты работ [2–4], в которых достаточные условия глобальной (т.е. во всем фазовом пространстве ТМ) управляемости основывались на свойствах симметрии уравнений относительно обращения времени и локальной управляемости в окрестностях положений равновесия либо стационарного вращения. Кроме того, использовалась стабилизируемость к этим положениям, т.е. возможность перевести систему из каждой точки фазового пространства в сколь угодно малую окрестность требуемого состояния. Для доказательства стабилизируемости привлекался прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Чтобы распространить известную теорему Барбашина – Красовского [5] на случай цилиндрического фазового пространства, присущего маятниковым механизмам, было введено [6] понятие связной функции Ляпунова. Традиционные определения стабилизируемости, локальной и глобальной управляемости процитированы в [3], причем для обратимых во времени ($t \rightarrow -t$) систем глобальная управляемость равносильна нуль-управляемости [1].

Один из результатов работы [2] сформулируем в следующем виде.

Утверждение 1. Пусть в системе (1.1) потенциал $B(\mathbf{q})$ – связная функция Ляпунова на M , а множества, задаваемые условиями $B(\mathbf{q}) \leq c$ ($c > 0$) компактны. Тогда

1) если при свободном движении ($\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$) система не допускает частного решения $\dot{q}_j \equiv 0$ (исключая положения равновесия), то она стабилизируема по входу u_j ($j \in 1, 2, \dots, n$) на многообразии $\text{ТМ}\Omega(u_j)$;

2) если при этом в окрестностях всех точек $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \in \xi_0$ имеет место локальная управляемость по тому же входу u_j , то система (1.1) глобально управляема при действии только u_j .

2. Предварительные рассуждения. Рассмотрим классический пример неуправляемой системы. Пусть плоский двузвенный маятник вне поля тяготения (фиг. 1) моделируется невесомыми жесткими стержнями длиной l_1 и l_2 с точечными массами m_1 и m_2 на концах. Положение системы задается углами φ (отсчитываемым от нейтральной оси) и ψ (относительно первого стержня), т.е. $\mathbf{q} = (\varphi, \psi)^T$, $\mathbf{q} \in T^2$. Внутренний управляющий момент u ограничен наперед заданной величиной: $|u| \leq a$.

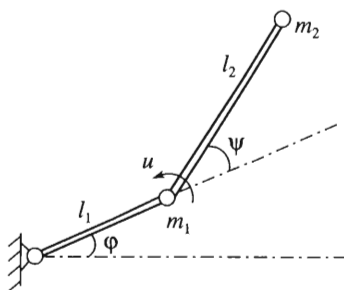
Используя безразмерные параметры и безразмерное время

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \lambda = \frac{l_1}{l_2}, \quad a' = \frac{a}{m_2 g l_2}, \quad u' = \frac{u}{m_2 g l_2}, \quad t' = t \sqrt{\frac{g}{l_2}}$$

получим приведенную функцию Лагранжа и уравнения движения (штрихи опускаем)

$$L = \frac{1}{2} \alpha_{11}(\psi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} \dot{\psi}^2 + \alpha_{12}(\psi) \dot{\varphi} \dot{\psi}$$

$$\dot{p}_1 = 0 \quad (1 + \lambda \cos \psi) \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \lambda \dot{\varphi}^2 \sin \psi = u, \quad |u| \leq a$$



Фиг. 1

Здесь

$$\alpha_{11}(\psi) = (\mu + 1)\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos \psi, \quad \alpha_{12}(\psi) = 1 + \lambda \cos \psi, \quad \alpha_{22} = 1$$

Первое уравнение движения дает закон сохранения кинетического момента

$$p_1 = \alpha_{11}(\psi)\dot{\phi} + \alpha_{12}(\psi)\dot{\psi} = \text{const}$$

относительно оси вращения первого стержня.

Система не является глобально управляемой (во всем фазовом пространстве $\text{ТМ} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$), так как заведомо недостижимы сочетания $\psi, \dot{\psi}, \phi$, наделяющие функцию p_1 другим значением.

Рассмотрим практически важный случай $p_1 = 0$, отвечающий начальному (или конечному) положению покоя. Тогда при любых управляющих воздействиях $u(t)$ система остается на многообразии

$$\Gamma = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}): 2\lambda(b + \cos \psi)\dot{\phi} + (1 + \lambda \cos \psi)\dot{\psi} = 0\} \quad (2.1)$$

где

$$b = [(1 + \mu)\lambda^2 + 1]/(2\lambda) > (\lambda^2 + 1)/(2\lambda) \geq 1$$

Уравнение в выражении (2.1) интегрируется в виде

$$\phi - \phi_0 = -\frac{1}{2\lambda} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{1 + \lambda \cos \theta}{b + \cos \theta} d\theta = \Phi(\psi) - \Phi(\psi_0) \quad (2.2)$$

где ϕ_0, ψ_0 – начальные значения координат. Функция

$$\Phi(\psi) = -\frac{1}{2}\psi + \frac{\lambda b - 1}{\lambda \sqrt{b^2 - 1}} \arctg \left[\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right] \quad (2.3)$$

при условии $\lambda < 1$ является монотонно убывающей. На торе $\phi \times \psi$ характер кривой (2.2) определяется “приращением углов за период”. При $\psi_1 - \psi_0 = 2\pi$ получим

$$\phi_1 - \phi_0 = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = \left(\frac{\lambda b - 1}{\lambda \sqrt{b^2 - 1}} - 1 \right) \pi = k\pi \quad (2.4)$$

Если число k рациональное, то кривая на торе замкнута; в противном случае она всюду плотно заполняет тор.

Всякая кривая (2.2) из многообразия (2.1) определяется начальными координатами (φ_0, ψ_0) . Из этого положения в многообразии Γ достижимы только те конфигурации (φ_f, ψ_f) , которые тоже удовлетворяют соотношению (2.2).

Замечание 1. Вдоль кривой (2.2) целенаправленное движение осуществимо и при дополнительном условии оптимальности быстрогодействия. Можно показать, что на плоскости $(\psi, \dot{\psi})$ фазовый портрет оптимального синтеза гомеоморфен известному случаю $\dot{y} = v$ [7]. Оптимальное движение состоит из “разгона” (из начального состояния $(\psi_0, \dot{\psi}_0)$) и “торможения” вдоль линии переключения до состояния $(\psi_f, 0)$. Тогда в конце движения (в силу $p_1 = 0$) получим также $\dot{\varphi} = 0$ и $\varphi = \varphi_f$.

Действительно, при учете равенства $p_1 = 0$ энергия системы представима в виде

$$E = 1/2s(\psi)\dot{\psi}^2, \quad s(\psi) = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)/\alpha_{11} > 0$$

причем в силу уравнений движения $dE/dt = u\dot{\psi}$. При постоянных значениях управления $u = \pm a$ фазовые кривые

$$1/2s(\psi)\dot{\psi}^2 = \pm a(\psi - \psi_f) + c$$

имеют по одной общей точке с прямой $\dot{\psi} = 0$. Ветви кривой при $c = 0$ составляют линию переключения оптимального синтеза, причем число переключений – не более одного. Это можно показать в координатах

$$\dot{y} = \sqrt{s(\psi)}\dot{\psi}, \quad y = \int_{\psi_f}^{\psi} \sqrt{s(\theta)}d\theta$$

где в силу монотонности функции $y(\psi)$ существует обратная функция $\psi = e(y)$, а уравнение движения принимает вид

$$\dot{y} = v, \quad |v| \leq a/\sqrt{s(e(y))}$$

Очевидно, что форма кривой (2.2) на торе $\varphi \times \psi$ зависит от массоинерционных параметров λ и μ двузвенника. Возможность (в процессе управляемого движения) изменять их значения позволила бы переходить с одной кривой на другую, соединяя в результате общей траекторией начальное (φ_0, ψ_0) и любое требуемое конечное (φ_f, ψ_f) положения равновесия системы.

Пример. Пусть для робота-манипулятора (фиг. 1) с внутренним моментом $|u| \leq a$ допустимо однократное мгновенное изменение параметра μ (например, путем “сброса балласта” Δm_2). Считая заданными значения $\mu_1 = m_1/m_2$ и $\mu_2 = m_1/(m_2 - \Delta m_2)$, выясним: можно ли систему перевести за конечное время из произвольного положения покоя $(\varphi_0, 0, \psi_0, 0)$ (при $\mu = \mu_1$) в любое требуемое положение $(\varphi_f, 0, \psi_f, 0)$ (при $\mu = \mu_2$) на цилиндре $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$, изменив один раз μ_1 на μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$).

Действительно, первый и второй участки искомой траектории различаются параметрами $b_2 > b_1 > 1$ в уравнении (2.2), которое представим в виде

$$\varphi - \Phi(\psi, b) = \text{const} \tag{2.5}$$

Считая число λ зафиксированным, исследуем два возможных случая.

Случай $\lambda \leq 1$. В этом случае зависимость $\varphi(\psi)$ (2.2) – монотонная, а коэффициент k (2.4) растет с увеличением b :

$$\frac{dk}{db} = \frac{b - \lambda}{\lambda\sqrt{b^2 - 1}} > 0 \quad (b > 1 \geq \lambda)$$

Следовательно, непрерывная функция $[\Phi(\psi, b_1) - \Phi(\psi, b_2) + c]$ на концах отрезка $\psi \in [-2n\pi, +2n\pi]$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ принимает значения $c \pm [k(b_1) - k(b_2)]n\pi$ разных знаков, т.е. обращается в нуль при некотором значении ψ . Поэтому в накрывающем пространстве \mathbf{R}^2 (а значит, и на торе \mathbf{T}^2) кривая $\varphi - \Phi(\psi, b_1) = \text{const}$, проведенная через точку (φ_0, ψ_0) , неизбежно пересечет кривую $\varphi - \Phi(\psi, b_2) = \text{const}$, проведенную через точку (φ_f, ψ_f) . Обозначим через (φ_*, ψ_*) координаты их точки пересечения (на торе $\varphi \times \psi$ она может быть неединственной). Тогда из начального состояния покоя $(\varphi_0, 0, \psi_0, 0)$ при $\mu = \mu_1$ можно, согласно замечанию 1, попасть в состояние $(\varphi_*, 0, \psi_*, 0)$ (путем разгона и торможения), а затем при $\mu = \mu_2$ перейти (при аналогичной стратегии) из состояния $(\varphi_*, 0, \psi_*, 0)$ в состояние $(\varphi_f, 0, \psi_f, 0)$.

Неизбежность пересечения кривых (2.5) при $b = b_1$ и $b = b_2$ позволяет также (путем замены b_1 на b_2 в промежуточном положении покоя $(\varphi_*, 0, \psi_*, 0)$) перейти при допустимом управлении $|u(t)| \leq a$ из любого состояния $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \psi_0, \dot{\psi}_0) \in \Gamma$ в любое состояние $(\varphi_f, \dot{\varphi}_f, \psi_f, \dot{\psi}_f) \in \Gamma$ за конечное время.

Это можно осуществить, например, в три этапа. Вычислив предварительно значения φ_2, ψ_2 в конце участка “торможения”

$$u_2(t): (\varphi_f, \dot{\varphi}_f, \psi_f, \dot{\psi}_f) \rightarrow (\varphi_2, 0, \psi_2, 0) \quad (u_2 = -\text{sign} \dot{\psi}_f)$$

третьим этапом выполним “разгон”

$$-u_2(t): (\varphi_2, 0, \psi_2, 0) \rightarrow (\varphi_f, \dot{\varphi}_f, \psi_f, \dot{\psi}_f)$$

В конце первого этапа

$$u_1(t): (\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \psi_0, \dot{\psi}_0) \rightarrow (\varphi_1, 0, \psi_1, 0) \quad (u_1 = -\text{sign} \dot{\psi}_0)$$

станут известными величины φ_1, ψ_1 , поэтому на втором этапе достаточно соединить траекторией найденные состояния покоя $(\varphi_1, 0, \psi_1, 0)$ и $(\varphi_2, 0, \psi_2, 0)$ при рассмотренной выше стратегии (с промежуточной заменой параметра μ_1 на μ_2).

Случай $\lambda > 1$. В этом случае функция $k(b)$ ($-1 < k(b) < 0$) имеет при $b = \lambda$ единственный минимум, равный $\sqrt{1 - 1/\lambda^2} - 1$. Поэтому существует бесконечно много пар значений $b_1 \neq b_2$, для которых $k(b_1) = k(b_2)$, т.е. выходящие из общей точки (φ_0, ψ_0) на \mathbf{R}^2 две траектории (2.5) (при $b = b_1$ и $b = b_2$) пересекутся вновь в точке $(\varphi_0, \psi_0 + 2\pi)$. Ширина области, заключенной между этими кривыми, на отрезке $\psi \in [\psi_0, \psi_0 + 2\pi]$ определяется как $\max_{\psi} |v|$, где $v = \Phi(\psi, b_1) - \Phi(\psi, b_2)$. Из выражений (2.3), (2.4) получим

$$\Phi(\psi, b_i) = \frac{1}{2}\psi + (k + 1) \arctg\left(\chi_i \text{tg} \frac{\psi}{2}\right), \quad \chi_i = \sqrt{\frac{b_i - 1}{b_i + 1}}, \quad i = 1, 2$$

Условие экстремума $dv/d\psi = 0$ принимает вид

$$\text{tg} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1}{\chi_1 \chi_2}}, \quad \text{т.е.} \quad \max_{\psi} |v| = (k + 1) \left| \arctg \sqrt{\frac{\chi_2}{\chi_1}} - \arctg \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}} \right| = \Delta$$

Взяв величины b_1 и b_2 достаточно близкими (при том же условии $k(b_1) = k(b_2)$), получим сколь угодно малую ширину Δ . Тогда “первая” траектория $\varphi - \Phi(\psi, b_1) = \text{const}$, проведенная через точку (φ_0, ψ_0) , не пересечет “вторую” $\varphi - \Phi(\psi, b_2) = \text{const}$, проведенную через $(\varphi_0 + \Delta + \delta, \psi_0)$ (где $0 < \delta \ll 1$) в \mathbf{R}^2 . Выбирая (за счет b_1, b_2) значение k рациональным, можно получить на торе \mathbf{T}^2 полосу между кривыми замкнутую, причем не заполняющую тор.

Действительно, каждому рациональному числу $k = -m/n$ ($0 < m < n$; $n, m \in \mathbb{N}$) можно поставить в соответствие интервал значений λ , вычисляемых из уравнения

$$\sqrt{1 - 1/\lambda^2} - 1 = k - \varepsilon$$

с переменным малым параметром ε ($0 \leq \varepsilon < \varepsilon_k < k + 1$), где величина ε_k будет ниже поставлена в зависимость от k . Введенная таким образом функция

$$\lambda(k, \varepsilon) = 1/\sqrt{1 - (k + 1 - \varepsilon)^2}$$

при $\varepsilon = 0$ имеет значение λ , отвечающее условиям $b_1 = b_2$ и $\Delta = 0$. Выражая b_1 и b_2 (с тем же условием $k(b_1) = k(b_2)$) через k , $\lambda(k, \varepsilon)$ и подставляя в формулы для χ_i ($i = 1, 2$), получим при всех $k = \text{const}$ монотонную (в области $0 < \Delta < \pi(1 + k)$) функцию $\Delta(k, \varepsilon)$. Обратная к ней функция приводится к виду

$$\varepsilon = (1 + k)[1 - \cos(\Delta/(1 + k))]$$

Требование $\Delta < 2\pi/n$ (для рассматриваемого количества n витков вдоль координаты ψ) можно обеспечить условием

$$\varepsilon < \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = (n - m)[1 - \cos(\pi/(n - m))]/n$$

Отображая указанным выше способом множество рациональных чисел $k \in]-1, 0[$ на множество интервалов $\lambda(k, \varepsilon)$ ($0 \leq \varepsilon < \varepsilon_k$), получим объединение этих интервалов в виде области $]1, \infty[$. Тогда для каждого $\lambda_0 > 1$ существуют подходящие прообразы k_0 и ε , при которых величины b_1 и b_2 (удовлетворяющие условию $k(b_1) = k(b_2) = k_0$) обеспечивают неравенство $\Delta < 2\pi/n_0$, т.е. замкнутая на торе полоса между “первой” и “второй” кривыми не будет иметь самопересечений.

Таким образом, существуют значения параметров μ_1 и μ_2 (до и после “сброса балласта”), при которых переход из точки (φ_0, ψ_0) в точку (φ_f, ψ_f) в общем случае невозможен, если $\lambda > 1$.

Итак, транспортная задача перевода плоского двузвенника из произвольного состояния покоя с конфигурацией (φ_0, ψ_0) в любое заданное состояние (φ_f, ψ_f) при $|u(t)| \leq a$ путем однократного мгновенного изменения параметра μ_1 на μ_2 при условии $\lambda \leq 1$ всегда имеет решение, а при $\lambda > 1$ для некоторых значений μ_1 и μ_2 не имеет решения.

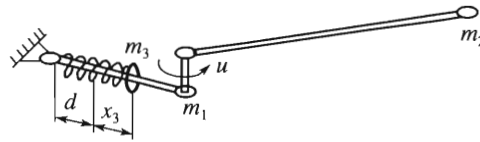
Выявленные свойства управляемости (на многообразии $p_1 = 0$) можно считать параметрически обусловленными, так как они существенно зависят от массоинерционных параметров μ и λ .

3. Модель двузвенника с дополнительной степенью свободы. Идея достижения управляемости путем варьирования параметров “неуправляемого по u двузвенника” (фиг. 1) приводит, например, к следующей модификации этого объекта (фиг. 2).

Пусть вдоль первого звена на пружине может двигаться без трения точечная масса m_3 . Отмеряя ее положение координатой x_3 от конца ненапряженной пружины длины d , получим расстояние от неподвижного шарнира до массы m_3 в виде $d + x_3$. Колебания точки m_3 будут имитировать изменение массоинерционных параметров двузвенника в известном диапазоне, за счет чего “улучшаются” (в смысле предварительных рассуждений) и свойства его управляемости. Заметим, что равносильной модификацией было бы добавление к первому шарниру еще одного маятника (в поле тяготения), моделирующего, например, частичное заполнение жидкостью внутренней полости первого звена.

Для простоты изложения примем квадратичный потенциал упругости

$$B(x_3) = \frac{1}{2}c_3x_3^2$$



Фиг. 2

где c_3 – коэффициент жесткости пружины. Сохраняя прежние (разд. 2) обозначения для μ, λ, u, a, t , введем дополнительные безразмерные параметры

$$\mu_3 = \frac{m_3}{m_2}, \quad \delta = \frac{d}{l_2}, \quad x = \frac{x_3}{l_2}, \quad c = \frac{c_3 l_2}{m_2 g}$$

Тогда для приведенной функции Лагранжа получим

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} c x^2, \quad \mathbf{q} = (\varphi, \psi, x)^T \in \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$$

где \mathbf{q} – вектор конфигурации, ненулевые элементы матрицы $A(\mathbf{q}) = \{\alpha_{ij}(\mathbf{q})\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\alpha_{11}(\psi, x) = (\mu + 1)\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos \psi + \mu_3(\delta + x)^2$$

$$\alpha_{12}(\psi) = \alpha_{21}(\psi) = 1 + \lambda \cos \psi, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \alpha_{33} = \mu_3$$

Запишем уравнения движения системы

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_{11}(\psi, x)\dot{\varphi} + \alpha_{12}(\psi)\dot{\psi} = \text{const} \\ (1 + \lambda \cos \psi)\dot{\varphi} + \dot{\psi} &= -\lambda\dot{\varphi}^2 \sin \psi + u, \quad \ddot{x} + \Omega^2 x = \dot{\varphi}^2(\delta + x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\Omega = \sqrt{c/\mu_3}$ – частота собственных колебаний груза m_3 , p_1 – кинетический момент системы относительно оси вращения первого звена; его постоянство определяет в фазовом пространстве $\text{TM} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^4$ инвариантное многообразие, ввиду которого система не является глобально управляемой в ТМ по входу u .

Далее рассмотрим поведение объекта на многообразии $\Gamma = \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} : p_1 = 0\}$, содержащем, в частности, всевозможные положения равновесия системы. Цель дальнейших рассуждений – показать управляемость системы (3.1) на многообразии Γ при действии момента $|u(t)| \leq a$ (a – заданная постоянная), т.е. возможность перейти из любого начального состояния $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \in \Gamma$ в любое требуемое $(\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f) \in \Gamma$ за конечное время. При этом ограничимся случаем $\lambda < 1$, когда длина второго стержня l_2 превосходит длину l_1 первого. В частности, это позволит описывать многообразие Γ условием

$$\dot{\psi} = -\frac{\alpha_{11}(\psi, x)}{\alpha_{12}(\psi)} \dot{\varphi} \tag{3.2}$$

так как гарантируется, что $\alpha_{12}(\psi) = 1 + \lambda \cos \psi \neq 0$.

Зависимость свойств управляемости от числового параметра λ была видна в разд. 2. Ранее [3] было показано, в частности, что плоский двузвенник вне поля тяготения глобально управляем при действии одного лишь внешнего момента $|u_1(t)| \leq a$ (a – заданная постоянная) при условии $\lambda \neq 1$. Это исключение было связано с инвариантным многообразием $\psi \equiv \pi$, когда при $l_1 = l_2$ совмещены точка m_2 и неподвижный шарнир.

Далее для системы (3.1) при $\lambda < 1$ будем опираться на возможность частных решений

$$\dot{\varphi} \equiv \omega, \quad x \equiv x_*, \quad \psi = \psi_*(t) \quad (3.3)$$

где постоянные ω и x_* связаны условием

$$\Omega^2 x_* = \omega^2 (\delta + x_*); \quad \Omega^2 > \omega^2, \quad x_* > 0 \quad (3.4)$$

а функция $\psi_*(t)$ определяется из первого уравнения (3.1)

$$\dot{\psi} = -G(\psi, x_*)\omega; \quad G(\psi, x) = \alpha_{11}(\psi, x)/\alpha_{12}(\psi) > 0 \quad (3.5)$$

Такой режим можно обеспечить частью u_1 управляющего воздействия $u = u_1 + u_2$, вычисляя ее из второго уравнения (3.1) в виде

$$u_1 = \ddot{\psi} + \lambda\omega^2 \sin \psi$$

При этом из равенства

$$u_1 \dot{\psi} = \dot{\psi} \ddot{\psi} + \lambda\omega^2 \dot{\psi} \sin \psi = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - \lambda\omega^2 \cos \psi \right)$$

при учете выражения (3.5) заключаем, что поскольку $\dot{\psi} \neq 0$ (при $\omega \neq 0$), то

$$u_1 = \omega^2 R(\psi, x_*); \quad R(\psi, x_*) = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{2} G^2(\psi, x_*) - \lambda \cos \psi \right) \quad (3.6)$$

($R(\psi, x_*)$ – непрерывная функция). На отрезке $\psi \in [0; 2\pi]$ для каждого значения x_* (монотонно зависящего от ω) получим

$$\max_{\psi} |R(\psi, x_*)| = R\left(\frac{1}{2}\pi, x_*\right) = \lambda[(\mu + 1)\lambda^2 + \mu_3(\delta + x_*)^2]^2$$

Из выражения (3.6) следует, что величина $\max_{\psi} |u_1|$ монотонно зависит от ω , т.е. существует значение ω_* , такое, что при $\omega \leq \omega_*$ гарантируется ограничение $|u_1| \leq a/2$. Далее в условиях режима (3.3)–(3.6) полагаем

$$0 < \omega \leq \omega_* \quad (3.7)$$

Следовательно, для системы (3.1) (при условии $\lambda < 1$) с управлением (3.6) возможно частное решение (3.3), когда первый стержень совершает равномерное вращение, а груз m_3 находится в относительном равновесии; при $\lambda \geq 1$ такой режим невозможен.

На торе $\varphi \times \psi$ изображающая точка движется согласно уравнению (2.2), если принять

$$b = [(\mu + 1)\lambda^2 + 1 + \mu_3(\delta + x_*)^2]/(2\lambda) \quad (3.8)$$

Иначе говоря, при относительном равновесии груза m_3 движение будет таким же, как у двузвенного маятника без пружины (разд. 2), но с “приведенным” параметром

$$\mu_* = \mu + \mu_3(\delta + x_*)^2/\lambda^2$$

Кривая на торе будет замкнутой, если выбрать x_* (вместе с ω) так, чтобы в равенстве (2.4) число k оказалось рациональным.

Для исследования свойств управляемости системы (3.1) используем ее динамическую подсистему (относительно $\psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}$), полученную из условия (3.2). Тогда вторая координата импульса имеет вид

$$p_2 = \alpha_{12}(\psi)\dot{\phi} + \alpha_{22}(\psi)\dot{\psi} = \rho\dot{\psi}; \quad \rho(\psi, x) = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)/\alpha_{11} > 0$$

Исключив таким образом $\dot{\phi}$, получим уравнения движения

$$\frac{d}{dt}(\rho\dot{\psi}) = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + u, \quad \dot{x} + \Omega^2 x = \left(\frac{\dot{\psi}}{G}\right)^2 (\delta + x) \quad (3.9)$$

где $G = G(\psi, x)$. Здесь при $u \equiv 0$ имеется интеграл энергии

$$E(\psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\rho(\psi, x)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\mu_3\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 \quad (3.10)$$

Покажем, что систему (3.9) можно перевести допустимым управлением $|u| \leq a$ (a – заданная постоянная) из произвольного начального состояния $(\psi_0, \dot{\psi}_0, x_0, \dot{x}_0)$ в любое требуемое состояние $(\psi_f, \dot{\psi}_f, x_f, \dot{x}_f)$ за конечное время.

Для обратимых во времени ($t \rightarrow -t$) систем глобальная управляемость гарантируется при нуль-управляемости [1], когда допустимым управлением $u(t)$ объект можно перевести за конечное время из любого начального состояния $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ в состояние $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. При этом осуществимость перехода $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ вытекала бы, например, из сочетания локальной управляемости в окрестности $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ и стабилизируемости, т.е. достижимости любой ϵ -окрестности точки $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (см. утверждение 1). Особенность рассматриваемой системы (3.9) состоит в том, что локальная управляемость в окрестности положений равновесия в линейном приближении отсутствует. Поэтому предлагается следующее замечание.

Замечание 2. Глобальная управляемость системы (3.9) гарантируется, если система

1) локально управляема в окрестности решения (3.3)–(3.5),

2) стабилизируема к этому режиму, т.е. переводится (посредством допустимого управления $u(t)$) за конечное время из произвольного начального состояния в любую ϵ -окрестность решения (3.3)–(3.5).

Действительно, сочетание этих условий позволит достичь многообразия (3.3)–(3.5) из произвольного начального состояния $(\psi_0, \dot{\psi}_0, x_0, \dot{x}_0)$. Ввиду симметрии $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow -\dot{\mathbf{q}}, t \rightarrow -t$ для натуральной лагранжевой системы будет достижимым и режим $\dot{\phi} \equiv -\omega, x \equiv x_*, \psi = -\psi_*(t)$. Поэтому наряду с движением

$$u(t): (0, 0, 0, 0) \rightarrow (\psi_1, -\dot{\psi}_1, x_*, 0)$$

(где $\dot{\psi}_1 = +\omega G(\psi_1, x_*)$) будет возможен и “обратный” переход

$$u(T-t): (\psi_1, \dot{\psi}_1, x_*, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

Так как вдоль траектории решения (3.3)–(3.5) значения $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ периодически повторяются, то будет гарантировано движение

$$(\psi_0, \dot{\psi}_0, x_0, \dot{x}_0) \rightarrow (\psi_1, \dot{\psi}_1, x_*, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

т.е. будет иметь место глобальная управляемость.

Далее для обоснования условий 1, 2 (см. замечание 2) составим управление в виде

$$u = u_1 + u_2; \quad |u_1| \leq a/2, \quad |u_2| \leq a/2$$

Функцию u_1 зададим заранее в форме обратной связи $u_1(\psi, \dot{\psi}, x, \dot{x})$ так, чтобы на многообразии (3.3)–(3.5) она совпадала с функцией (3.6). “Свободную” компоненту u_2 будем подбирать, руководствуясь целью достижения многообразия (3.3)–(3.6).

Условия 1, 2 рассмотрим по отдельности.

Условие 1. Известно [1], что локальную управляемость достаточно обнаружить в линейном приближении, т.е. линеаризуя систему (3.9) в окрестности режима (3.3)–(3.6).

Введя обозначения

$$\eta = \psi - \psi_*, \quad \beta = x - x_*$$

получим линейные уравнения для возмущений

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= a_{21}(t)\eta + a_{22}(t)\dot{\eta} + a_{23}(t)\beta + a_{24}(t)\dot{\beta} + w \\ \dot{\beta} &= a_{41}(t)\eta + a_{42}(t)\dot{\eta} + a_{43}(t)\beta \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$a_{41}(t) = \frac{v}{G} \frac{\partial G}{\partial \psi}, \quad a_{42}(t) = \frac{v}{G\omega} < 0, \quad a_{43}(t) = \omega^2 - \Omega^2 - \frac{4\omega^2 \mu_3 (\delta + x_*)^2}{\alpha_{11}} < 0$$

$$v = -2\omega^2(\delta + x_*) < 0$$

$a_{2i}(t)$ – гладкие функции от $\psi_*(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), а функции $G(\psi, x)$, $\partial G/\partial \psi$, $\alpha_{11}(\psi, x)$ вычислены при выполнении соотношений (3.3)–(3.5).

Новое управление $w = u_2/\rho(\psi_*(t), x_*)$ “равносильно” старому u_2 с точки зрения управляемости: так как функция $\rho > 0$ ограничена сверху, то существование подходящей функции $w(t)$ гарантирует и существование требуемой функции $u_2(t)$.

Введя вектор $\mathbf{z} = (\eta, \dot{\eta}, \beta, \dot{\beta})^T$, представим систему (3.11) в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \Lambda(t)\mathbf{z} + \mathbf{B}w; \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Известно [8], что достаточным условием управляемости линейной нестационарной системы (3.12) является существования момента времени t_* (на рассматриваемом конечном промежутке времени движения), для которого $\text{rank} \mathbf{K}(t_*) = 4$. Матрица управляемости $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4)$ составляется из столбцов

$$\mathbf{K}_1(t) = \mathbf{B}, \quad \mathbf{K}_i(t) = \Lambda(t)\mathbf{K}_{i-1}(t) - d\mathbf{K}_{i-1}(t)/dt, \quad i = 2, 3, 4$$

В данном случае определитель матрицы \mathbf{K} упрощается путем вычитания из некоторых столбцов линейной комбинации других. После раскрытия определителя получим при всех t

$$\det \mathbf{K} = -\det \begin{pmatrix} a_{42} & h - \dot{a}_{42} \\ h & a_{42}a_{43} - \dot{h} \end{pmatrix} = -a_{42}^2 a_{43} > 0 \quad (3.13)$$

т.е. $\text{rank} \mathbf{K} = 4$, а значит имеется локальная управляемость по входу u_2 для системы (3.9) в окрестности режима (3.3)–(3.6).

При записи последнего звена в цепочке равенств (3.13) учтено, что

$$h = a_{41} - \dot{a}_{42} = \frac{v}{G} \frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\omega G} \right) \equiv 0$$

поскольку вдоль “опорного” решения (3.3)–(3.6)

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial \psi} \dot{\psi} = -\omega G \frac{\partial G}{\partial \psi}$$

Условие 2. Для доказательства стабилизируемости используем прямой метод Ляпунова. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2} \rho \xi^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \mu_3 (\Omega^2 - \omega^2) \beta^2; \quad \rho = \rho(\psi, x_* + \beta), \quad \zeta = \dot{\psi} + G(\psi, x) \omega \quad (3.14)$$

Учитывая интеграл энергии (3.10), запишем производную функции (3.14) в силу уравнений движения (3.9) в виде

$$\frac{dV}{dt} = \left(u + \frac{\omega}{2G} \frac{dU}{dt} \right) (\dot{\psi} + G\omega), \quad U = \rho(\psi, x) G^2(\psi, x) - \mu_3 (x + \delta)^2 \quad (3.15)$$

причем в ходе преобразований используется свойство

$$G^2 \partial \rho / \partial x = 2\mu_3 (x + \delta)$$

В пространстве ТМ векторов $(\psi, \xi, \beta, \dot{\beta})$ множества $M_c = \{\psi, \xi, \beta, \dot{\beta} : V \leq c\}$ компактны при любом значении ω .

Подпространство векторов $y = (\xi, \beta, \dot{\beta})$ обозначим через TM_1 . Тогда ввиду легко проверяемого свойства

$$\rho(\psi, x) \geq \rho(0, x), \quad \forall \psi$$

имеем $V(\psi, y) \geq V(0, y) = W(y)$, где $W(y)$ – связная функция Ляпунова [6] на TM_1 . В частности, из равенства $W = 0$ следует $y = \mathbf{0}$. Поэтому для обоснования асимптотической устойчивости в большом на множествах из ТМ достаточно [5, 9] доказывать, что в силу уравнений (3.9) (при подходящем выборе управления $u(t)$) получим $dV/dt \leq 0$, причем на множестве $dV/dt \equiv 0$ нет целых траекторий, кроме $y = \mathbf{0}$.

Если первую компоненту управления $u = u_1 + u_2$ принять в виде

$$u_1 = -\frac{\omega}{2G} \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} \right) \quad (3.16)$$

то на целевом многообразии (3.3)–(3.5) (где $\dot{x} \equiv 0, x \equiv x_*, \dot{\psi} \equiv -G\omega$) эта функция совпадет с функцией (3.6), так как

$$R(\psi, x_*) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} [\rho(\psi, x_*) G^2(\psi, x_*)]$$

Уравнение (3.15) приобретает вид $dV/dt = u_2 \xi$. Значит, достаточно выбрать гладкую функцию u_2 ограниченной (из условия $|u_2| \leq a/2$) и обратной по знаку ξ (например, $u_2 = -(a/\pi) \operatorname{arctg} \xi$), чтобы получить $dV/dt \leq 0$.

При этом условие $dV/dt = 0$ возникает лишь при $\xi = 0$, т. е. $\dot{\psi} \equiv -G\omega$, что возможно только вдоль решения (3.3)–(3.6), где $y = \mathbf{0}$.

Таким образом, найденное управление $u = u_1 + u_2$ будет обеспечивать стабилизируемость. Чтобы удовлетворить при этом ограничению $|u_1| \leq a/2$ для функции u_1 (3.16), можно выбрать значение ω “достаточно малым” в зависимости от конкретного начального состояния (q_0, \dot{q}_0) (где $q = (\psi, x)^T$), для которого требуется доказывать осуществимость перехода $(q_0, \dot{q}_0) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Процедура подбора ω такова:

а) при конкретном векторе $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ на компакте $0 \leq \omega \leq \omega_*$ для гладкой функции Ляпунова (3.14) вычисляется $\max_{\omega} V(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = c_1$,

б) выбирается $c = \max\{c_1, c_2\}$, где $c_2 = \max_{\omega} V(\mathbf{0}, \mathbf{0})$,

в) на компакте $M_c = \{\psi, \xi, \beta, \dot{\beta} : V \leq c\}$ находится значение

$$\max_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \left| \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right| = \sigma$$

где функция $U(\psi, x)$ берется в виде (3.15),

г) наконец, выбирается

$$\omega_1 = \max\{a/(2\sigma), \omega_*\}$$

Тем самым для управления $u = u_1 + u_2$ с компонентами в виде

$$u_1 = -\frac{\omega_1}{2G} \frac{dU}{dt}, \quad u_2 = -\frac{a}{\pi} \arctg(\psi + G\omega_1)$$

гарантируется ограничение $|u| \leq a$. Это управление переводит систему из состояния $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ в любую ε -окрестность решения (3.3)–(3.6) при $\omega = \omega_1$. Ограниченным будет и управление, дающее переход из состояния $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ в окрестность “симметричного” режима (для которого $\omega = -\omega_1$).

В обеих окрестностях ввиду $\omega_1 \neq 0$ выполняется условие (3.13), т.е. имеется локальная управляемость. Поэтому (см. замечание 2) существует движение $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Доказанная нуль-управляемость подсистемы (3.9) равносильна ее глобальной управляемости, т.е. возможности перевести ее допустимым управлением $|u| \leq a$ за конечное время из любого состояния $(\psi_0, \dot{\psi}_0, x_0, \dot{x}_0)$ в любое требуемое $(\psi_f, \dot{\psi}_f, x_f, \dot{x}_f)$.

Замечание 3. Можно показать, что система (3.1) с тремя степенями свободы в случае $\lambda < 1$ (т.е. когда второе звено длиннее первого) глобально управляема на многообразии $p_1 = 0$. Такой объект (фиг. 2) можно перевести, например, из любого положения покоя в любое требуемое состояние (с нулевым кинетическим моментом p_1) допустимым управлением $|u| \leq a$ (a – заданная постоянная) за конечное время.

Доказательство следует из разд. 6 (пример 2).

Отметим, что обнаруженная управляемость (на многообразии $p_1 = 0$) “модифицированной” модели двузвенника имеет место при сколь угодно малом значении массы m_3 добавленного груза, тогда как при $m_3 = 0$ она отсутствовала. Это наводит на мысль о возможных качественных различиях в свойствах управляемости механических моделей одного и того же реального объекта при разной степени их детализации. Таким образом, в некоторых случаях учет малого изменения параметров (незначительная изменчивость “твердого тела”, жесткость звена конструкции и т.п.) может обеспечить управляемость механизма, который не был управляемым в предположении об абсолютной твердости звеньев. В разд. 4 это свойство будет названо параметрической управляемостью.

4. Понятие параметрической управляемости. Пусть в динамической системе управления вектор состояния задается в конечномерном фазовом пространстве ТМ и состоит из двух частей: в виде векторов состояния $y \in \text{ТМ}_1$ (упрощенной модели; $\dim y = n$) и $z \in \text{ТМ}_2$ (дополнительных координат, уточняющих модель). Вектор u управления выбирается из заданной ограниченной области $U \subset \mathbf{R}^m$, причем для обсуждаемых механических систем $2m \leq n$. Близость двух моделей характеризует малый параметр $\varepsilon > 0$.

Если скорости дополнительных степеней свободы при $\epsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулю, то “уточненный” объект может иметь вид регулярно возмущенной системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \epsilon, \mathbf{u}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \epsilon), \quad \mathbf{u} \in U \quad (4.1)$$

Если же эти скорости при $\epsilon \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, то система

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \epsilon, \mathbf{u}), \quad \epsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \epsilon), \quad \mathbf{u} \in U \quad (4.2)$$

будет сингулярно возмущенной. В обоих случаях объекту (4.1) (или (4.2)) можно поставить в соответствие упрощенную модель (при $\epsilon = 0$)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0, 0, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U \quad (4.3)$$

символизирующую, например, абсолютную твердость тел (в сравнении с их малой изменяемостью). При этом решения сравниваемых систем для значений параметров $\epsilon = 0$ и $1 \gg \epsilon > 0$ полагаются близкими, т.е. считаем обеспеченными для системы (4.1) – условия теоремы Пуанкаре, а для (4.2) – теоремы Тихонова [10] (где равенству $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{0}$ соответствует $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, т.е. в уравнении (4.3) берется $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$).

Свойства управляемости “нежесткой” (4.1) (или (4.2)) и “жесткой” (4.3) моделей могут различаться.

Определение. Систему (4.1) (либо (4.2)) назовем параметрически управляемой на множестве $P_1 \subset TM_1$, если при сколь угодно малом $\epsilon > 0$ ее можно перевести из любого состояния $\mathbf{y}_0 \in P_1$ в любое требуемое $\mathbf{y}_f \in P_1$ допустимым управлением за конечное время, а при $\epsilon = 0$ э то сделать в общем случае невозможно.

Введенное свойство управляемости считается “параметрическим” в том же смысле, что, например, и параметрический резонанс в теории колебаний, т.е. оно обусловлено “размораживанием” параметров. Дополнительные уравнения (для \mathbf{z}), отличающие “нежесткую” систему от “жесткой”, описывают фактически изменение массоинерционных характеристик, которые при $\epsilon = 0$ принимают постоянные значения.

Заметим, что параметрическая управляемость не тождественна “слабой управляемости” [10], так как вектор \mathbf{u} в общем случае не умножен на коэффициент ϵ . Системы (4.1) (либо (4.2)) “слабоуправляемы” лишь в переносном смысле, поскольку управления ограничены сколь угодно малыми величинами. Среди этих объектов дополнительно выделяются “параметрически управляемые” не по причине отсутствия входного воздействия в упрощенной (при $\epsilon = 0$) модели, а ввиду свойств собственной динамики: “жесткая” система неуправляема и при сколь угодно больших воздействиях, а “нежесткая” управляема и при сколь угодно малых воздействиях.

5. Достаточные условия параметрической управляемости системы (1.1) с циклической координатой. По определению параметрической управляемости (разд. 4), ее выявление подразумевает сравнение свойств двух близких моделей механического объекта, из которых “жесткая” (с меньшим числом степеней свободы) будет неуправляемой в отличие от “нежесткой”. Причиной неуправляемости жесткой модели может быть, например, наличие циклической координаты (назовем ее q_1), для которой $\partial L / \partial q_1 = 0, a_1 = 0$. Закон сохранения $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1 = \text{const}$ задает инвариантное многообразие $\Gamma \subset TM$. Рассмотрим этот случай подробнее, представляя в системе (1.1) вектор \mathbf{q} в виде $\mathbf{q} = (q_1, \mathbf{x}^T)^T$, где $\mathbf{x} = (q_2, q_3, \dots, q_n)$, так что матрица инерции A и потенциал B будут зависеть только от \mathbf{x} . Используя функцию Рауса $R = L - \dot{q}_1 \partial L / \partial \dot{q}_1$, получим в пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ динамическую подсистему

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1}; \quad \mathbf{u} = (0, \mathbf{u}_x^T)^T, \quad \mathbf{u}_x \in U_x \subset \mathbf{R}^{n-1} \quad (5.1)$$

При этом множество состояний покоя будет таким:

$$\zeta_x = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}): \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \partial V/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{u}_x = \mathbf{0}\}$$

Практически важен случай $p_1 = 0$, отвечающий движению с начальным (или конечным) положением равновесия. Далее выясним, при каких условиях система (1.1) будет управляема на этом многообразии $\Gamma \subset \text{ТМ}$, т.е. может быть переведена из любого состояния $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \in \Gamma$ в любое требуемое $(\mathbf{q}_f, \dot{\mathbf{q}}_f) \in \Gamma$ за конечное время.

Выделим первую строку $(n \times n)$ -матрицы инерции $A(\mathbf{x})$, исключая из нее левый (первый) элемент и деля на него оставшуюся часть строки, обозначая полученный $(n - 1)$ -вектор через $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})^T$. Тогда инвариантное многообразие $p_1 = 0$ опишется уравнением

$$\dot{q}_1 + \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (5.2)$$

Для жесткой системы вектор конфигурации $(q_1, \mathbf{s}^T)^T$ будет размерности $k < n$, причем каждая координата вектора \mathbf{s} встречалась среди координат вектора \mathbf{x} . Остальные $n - k$ координат вектора \mathbf{x} соответствуют дополнительным степеням свободы и принимают постоянные значения при переходе от нежесткой модели к жесткой, для которой закон сохранения импульса запишется (по аналогии с уравнением (5.2)) в виде

$$\dot{q}_1 + \boldsymbol{\eta}^T(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} = 0 \quad (5.3)$$

где вектор $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{s}) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1})^T$ получен из первой строки $(k \times k)$ -матрицы инерции жесткой системы тем же способом, что и $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$.

Свойства управляемости систем на многообразии Γ нулевого импульса (задаваемого для жесткой модели в виде (5.3), а для нежесткой – в виде (5.2)) могут различаться и зависеть, как будет показано, от свойств матриц $G = \partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \mathbf{x}$ и $N = \partial \boldsymbol{\eta} / \partial \mathbf{s}$.

Утверждение 2. Пусть система (1.1) с малым параметром ϵ имеет циклическую координату q_1 , которой соответствует закон сохранения (5.2) (при $\epsilon > 0$) либо (5.3) (при $\epsilon = 0$). Пусть при этом для динамической подсистемы (5.1) область нуль-управляемости совпадает со всем фазовым пространством $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Тогда если $N^T = N$, $G^T \neq G$, то система (1.1) параметрически управляема на многообразии (5.2).

Доказательство. Покажем управляемость нежесткой системы (5.1), (5.2), т.е. осуществимость перехода из произвольной точки $(q_{10}, \dot{q}_{10}, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ в любую требуемую точку $(q_{1f}, \dot{q}_{1f}, \mathbf{x}_f, \dot{\mathbf{x}}_f)$, если обе удовлетворяют условию (5.2).

Действительно, в силу глобальной управляемости подсистемы (5.1) найдется допустимое управление

$$\mathbf{u}_1(t): (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

которому в фазовом пространстве ТМ системы (1.1) отвечает движение $(q_{10}, \dot{q}_{10}, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \rightarrow (r_1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ с некоторым конечным значением r_1 координаты q_1 . Также найдется и управляемый переход

$$\mathbf{u}_3(t): (q_{1f}, -\dot{q}_{1f}, \mathbf{x}_f, -\dot{\mathbf{x}}_f) \rightarrow (r_2, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad t \in [0, T_3]$$

которому в обращенном времени ($t > -t$) соответствует “симметричное” движение

$$\mathbf{u}_3(T_3 - t): (r_2, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (q_{1f}, \dot{q}_{1f}, \mathbf{x}_f, \dot{\mathbf{x}}_f)$$

Останется показать осуществимость перехода

$$\mathbf{u}_2(t): (r_1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (r_2, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

либо равносильного ему (в силу цикличности координаты q_1) режима

$$\mathbf{u}_2(t): (0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (r_2 - r_1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

Положим для определенности $r_2 - r_1 = \Delta r > 0$. Рассмотрим в пространстве ТМ системы (1.1) множество достижимости $K(T)$ [1] из точки $(0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ за время T , выбираемое достаточно малым, чтобы область соответствующих движений при $t \in [0, T]$ была односвязной. Проекцией $K(T)$ на фазовое подпространство $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ будет непустое множество (в силу управляемости подсистемы (5.1)). Так как множество допустимых управлений \mathbf{u}_x выпукло, то множество $K(T)$ – компактное, выпуклое и непрерывно зависящее от T ([1], с. 78). Его граница $\partial K(T)$ пересечет прямую $l = \{\dot{q}_1 = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}\}$ в точке с координатой $q_1 = r$.

Справедливо неравенство $r \neq 0$, доказываемое методом от противного.

Предположим, что координата q_1 равна нулю в конце каждой траектории, начатой в точке $(0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ и завершённой на прямой l . В силу локальной управляемости системы (5.1) множеству таких траекторий будет соответствовать в пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ в начальной точке $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ конус направлений размерности $2(n - 1)$. Записав уравнение (5.2) в виде $dq_1 = -\sigma^T(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, получим

$$r = -\oint \sigma_1 dx_1 + \sigma_2 dx_2 + \dots + \sigma_{n-1} dx_{n-1} = 0$$

для любого замкнутого контура $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Это означает, что в рассматриваемой односвязной области движений векторное поле $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$ потенциально ([11], с. 335). Отсюда следует система равенств

$$\partial \sigma_i / \partial x_j = \partial \sigma_j / \partial x_i, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n - 1$$

равносильная равенству $G^T = G$, что противоречит условию. Значит $r \neq 0$.

Ввиду симметрии системы (1.1) относительно $t \rightarrow -t$ можем положить для определенности $r > 0$.

Так как множество $K(T)$ зависит от T непрерывно, для каждого значения r_* (где $0 \leq r_* \leq r$) найдется $T_* \leq T$ и некоторое управляемое движение

$$\mathbf{u}(t): (0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (r_*, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad t \in [0, T_*]$$

Это позволит осуществить переход

$$\mathbf{u}_2(t): (0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (\Delta r, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

за $m + 1$ этапов (где $m \leq \Delta r / r \leq m + 1$), причем первые m будут одинаковой продолжительности T , а последний займет время T_* , отвечающее величине $r_* = \Delta r - mr$. Итак, в пространстве ТМ найдется движение

$$(q_{10}, \dot{q}_{10}, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \rightarrow (r_1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (r_2, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow (q_{1f}, \dot{q}_{1f}, \mathbf{x}_f, \dot{\mathbf{x}}_f)$$

что доказывает управляемость нежесткой системы (1.1) на многообразии (5.2). При этом в силу равенства $N^T = N$ выполняются условия потенциальности векторного поля $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1})$

$$\partial \eta_i / \partial s_j = \partial \eta_j / \partial s_i, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Наличие потенциальной функции $F(q_1, s) = 0$ делает недостижимыми конфигурации (q_{1f}, s_f) , для которых $F(q_{1f}, s_f) \neq 0$. Значит жесткая система (5.1)–(5.3) не является управляемой на многообразии (5.3), что и требовалось.

Заметим, что ранее [12] была описана связь управляемости динамической системы с неинтегрируемостью вспомогательного дифференциального уравнения, получаемого проецированием векторного поля. Отличие предложенного утверждения 2 в том, что неинтегрируемость уравнения (5.2) была бы в таком случае [12] необходимым, но не достаточным условием. Таким образом, основная нагрузка при обосновании управляемости системы (1.1) выпадает на частные свойства натуральной лагранжевой системы: выполнение условий утверждения 1 заменяет проверку неинтегрируемости некоторой многомерной динамической подсистемы.

Заметим также, что для утверждения 2 в качестве циклической координаты q_1 в реальной механической системе может фигурировать лишь “угловая” координата, так как в случае “расстояния” q_1 условие $p_1 = 0$ обычно интегрируется (в терминах “движения центра масс системы”).

6. Примеры сингулярно возмущенных систем (4.2).

Пример 1. Покажем, что рассмотренная в разд. 3 система (фиг. 2) параметрически управляема на инвариантном многообразии Γ нулевого кинетического момента, если считать $\varepsilon = \mu_3$. Поскольку в разд. 3 уже показана глобальная управляемость динамической подсистемы (3.9), то осталось (в силу утверждения 2) рассмотреть матрицы $G = \partial\sigma/\partial\mathbf{x}$ и $N = \partial\eta/\partial s$. В данном случае

$$x_1 = \psi, \quad x_2 = x, \quad \sigma = [\alpha_{12}(x_1)/\alpha_{11}(x_1, x_2), 0]^T, \quad \eta = [\alpha_{12}(x_1)/\alpha_{11}(x_1, x_2)]$$

Поэтому

$$\partial\sigma_1/\partial x_i \neq 0, \quad \partial\sigma_2/\partial x_i = 0, \quad i = 1, 2$$

откуда следует, что $G^T \neq G$. Так как матрица N жесткой системы имеет размерность 1×1 , то $N^T = N$. Согласно утверждению 2 система (фиг. 2) параметрически управляема (на упомянутом многообразии Γ), если жесткой системе отвечает $m_3 = 0$ (фиг.1).

Пример 2. Пусть в рассмотренном плоском двузвенном маятнике вновь единственное управление – внутренний ограниченный момент u , действующий “от первого стержня ко второму”. Полагаем $|u| \leq a$, где a – заданная постоянная. Кроме жесткой модели (в которой звенья ОА и АВ считаются абсолютно твердыми) рассматривается нежесткая модель в простейшем виде, когда второй стержень АВ составляется из двух абсолютно твердых частей (длинами l_2 и l_3), соединенных цилиндрическим шарниром со спиральной пружиной большой жесткости c (фиг. 3). Первый стержень ОА (длины l_1) в обеих моделях принят абсолютно твердым телом. Для простоты полагаем все звенья невесомыми, а их массы m_1 , m_2 и m_3 сосредоточенными в шарнирах. Нежесткая модель имеет конфигурацию $\mathbf{q} = (q_1, \mathbf{x}^T)^T$, $\mathbf{q} \in T^2 \times \mathbf{R}$, где q_1 – угол первого стержня, отсчитываемый от неподвижной оси, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{x} \in T \times \mathbf{R}$, x_1 – угол второго стержня, отсчитываемый от первого стержня, x_2 угол упругого отклонения (деформация пружины) от ненапряженной оси второго стержня.

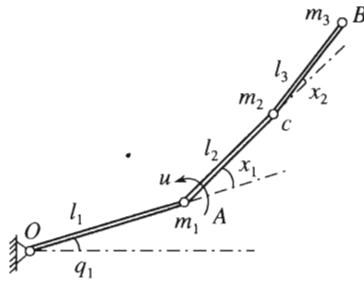
Для жесткой модели вектор обобщенных координат $(q_1, s_1)^T \in T^2$, где $s_1 = x_1$.

Рассмотрим движение нежесткой системы, вводя безразмерные параметры и безразмерное время

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_1}, \quad \lambda_i = \frac{l_i}{l_1} \quad (i = 2, 3), \quad a' = \frac{a}{m_1 g l_1}, \quad u' = \frac{u}{m_1 g l_1}, \quad c' = \frac{c l_1}{m_1 g}, \quad t' = t \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

(далее штрихи опускаем). В приведенной функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{q}} - B(\mathbf{x})$$



Фиг. 3

потенциальная энергия упругости $B(\mathbf{x}) = 1/2c x_2^2$. Положительно определенная симметричная (3×3) -матрица инерции $A(\mathbf{x})$ имеет элементы

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} + h_1 + 2h_2 \cos x_1 + 2h_3 \cos(x_1 + x_2) \\ a_{12} &= a_{22} + h_2 \cos x_1 + h_3 \cos(x_1 + x_2), \quad a_{13} = a_{23} + h_3 \cos(x_1 + x_2) \\ a_{23} &= h_3 \lambda_3 + h_3 \lambda_2 \cos x_2, \quad a_{22} = h_2 \lambda_2 + h_3 \lambda_3 + 2h_3 \lambda_2 \cos x_2, \quad a_{33} = h_3 \lambda_3 \end{aligned} \tag{6.1}$$

где

$$h_1 = 1 + \mu_2 + \mu_3, \quad h_2 = \lambda_2(\mu_2 + \mu_3), \quad h_3 = \lambda_3 \mu_3$$

Координата q_1 – циклическая, поэтому при движении сохраняется кинетический момент относительно оси вращения первого стержня:

$$p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1 = \text{const}$$

Далее рассмотрим случай $p_1 = 0$, отвечающий начальному (или конечному) состоянию покоя. На этом инвариантном многообразии выполняется условие (5.2), где $n = 3$, $\sigma = (a_{12}, a_{13})^T / a_{11}$, причем $a_{11}(\mathbf{x}) > 0$. Функция Рауса представляется в виде

$$R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} - B(\mathbf{x})$$

причем элементы симметричной определенно-положительной (2×2) -матрицы $\rho(\mathbf{x}) = \{\rho_{ij}(\mathbf{x})\}$ выражаются через алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы $A(\mathbf{x})$:

$$\rho_{11} = A_{33}/a_{11}, \quad \rho_{12} = -A_{23}/a_{11}, \quad \rho_{22} = A_{22}/a_{11} \tag{6.2}$$

Таким образом, уравнения движения нежесткой модели включают кинематическое условие (5.2) и динамическую подсистему (5.1), где

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{b}u, \quad \mathbf{b} = (1, 0)^T, \quad |u| \leq a$$

a – заданное число.

Покажем глобальную управляемость этой системы в пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, опираясь на утверждение 1. В окрестности произвольного состояния покоя

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 = (x_1, 0)^T, \quad u = 0$$

линеаризованное уравнение движения в обозначениях $y = \rho(x_0)(x - x_0)$ принимает вид

$$\dot{y} = \mathbf{D}y + \mathbf{b}u; \quad \mathbf{D} = -\mathbf{B}_0\rho^{-1}(x_0), \quad \mathbf{B}_0 = \text{diag}(0, c) \quad (6.3)$$

Для управляемости системы (6.3) достаточно [8], чтобы выполнялось условие $\text{rank} \mathbf{K} = 2$; $\mathbf{K} = (\mathbf{b}, \mathbf{D}\mathbf{b})$, $\det \mathbf{K} = c\rho_{12}(x_0)/\det \rho(x_0)$; $c/\det \rho(x_0) > 0$

Из соотношений (6.1), (6.2) следует

$$\rho_{12} = h_3[(h_1 + h_2 \cos x_1)(\lambda_3 + \lambda_2 \cos x_2) - \cos(x_1 + x_2)(h_2\lambda_2 + h_2 \cos x_1 + h_3\lambda_2 \cos x_2 + h_3 \cos(x_1 + x_2))] / a_{11} \quad (6.4)$$

Поэтому условие $\det \mathbf{K} > 0$ гарантируется, например, при $\cos x_1 = 0$, т.е. в окрестностях состояний покоя

$$x_1 = \pi/2 + k\pi, \quad k \in Z, \quad x_2 = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

(со взаимно перпендикулярными стержнями ОА и АВ) нежесткая модель локально управляема.

Стабилизируемость системы к состоянию равновесия (6.5) при $k = 0$ обеспечивается компонентой $u_1 = -(a/2)\sin(x_1 - \pi/2)$ управления $u = u_1 + u_2$, $|u_2| \leq a/2$. Добавляя u_1 к потенциальным силам, получим приведенный потенциал

$$B_1(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) + a(1 - \cos(x_1 - \pi/2))/2$$

как связную функцию Ляпунова [6] в пространстве $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^1$ переменных $(x_1 - \pi/2)$ и x_2 , причем все множества $B_1(\mathbf{x}) \leq c_1$ ($c_1 > 0$) будут компактными.

Покажем, что уравнения движения (5.1), (5.2) при $u_2 \equiv 0$ и действии “потенциальной силы” u_1 не допускают частного решения $\dot{x}_1 \equiv 0$ (исключая положения равновесия (6.5)).

Действительно, пусть $\dot{x}_1 \equiv 0$. Тогда случай $\sin(x_1 - \pi/2) \equiv \text{const} \neq 0$ невозможен, так как вследствие условия $u_1 \equiv \text{const} \neq 0$ он противоречил бы уравновешенности моментов всех сил, включая силы инерции Даламбера, относительно точки А.

Предполагая $\sin(x_1 - \pi/2) \equiv 0$, получим $u_1 \equiv 0$. Тогда в свободном движении (при $u_2 \equiv 0$) потенциальная энергия $B(\mathbf{x})$ будет ограниченной, поэтому найдется момент времени $t = t_1$, при котором $\dot{x}_2 = 0$, а значит $\dot{q}_1 = 0$ (ввиду допущения $\dot{x}_1 \equiv 0$ и в силу (5.2)). Поэтому при $t = t_1$ получим мгновенное состояние покоя $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, при котором в уравнениях Лагранжа часть компонент обращается в нуль:

$$A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} + B_1\mathbf{q} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B}_1 = \text{diag}(0, 0, c)$$

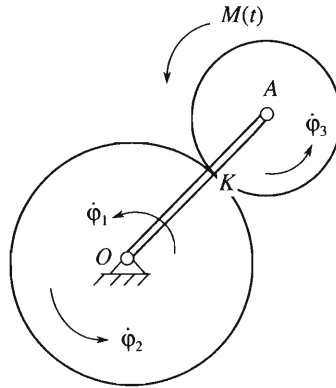
Тогда первые два уравнения этой системы запишутся в виде

$$A_1\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{z} = (q_1, x_1)^T, \quad \det A_1 = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = a_{11}\rho_{12}(\mathbf{x})$$

Заметим, что при подстановке значений

$$x_1 = \pi/2 + k\pi, \quad k \in Z$$

в правую часть равенства (6.4) получаемая функция $\rho_{12} = f(x_2)$ не будет четной. Полная энергия системы постоянна и в состояниях $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ равна потенциальной энергии упругости. Значит, максимальная и минимальная деформации x_2 в мгновенных состояниях по-



Фиг. 4

коя различаются только знаком, и для одной из них окажется $f(x_2) \neq 0$, т.е. $\det A_1 \neq 0$. В этом состоянии получим не только $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, но и $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, что соответствует условию покоя всей системы. Следовательно, частное решение $\dot{x}_1 \equiv 0$ возможно лишь в положениях равновесия (6.5). Согласно утверждению 1 нежесткая система (5.1), (5.2) глобально управляема в пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$.

Несимметричность матрицы $G = \partial\sigma/\partial\mathbf{x}$, т.е. выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right)$$

можно обнаружить непосредственными вычислениями, причем даже в линейном приближении в окрестности конфигурации $x_1 = \pi/2, x_2 = 0$. При этом матрица $N = \partial\eta/\partial\mathbf{s}$ для жесткой системы имеет размерность 1×1 . Следовательно, в рассмотренном примере выполнены условия утверждения 2, т.е. имеется параметрическая управляемость на многообразии $p_1 = 0$. С учетом упругой податливости двузвенный маятник (фиг. 3) можно перевести за конечное время ограниченным внутренним моментом из любого состояния покоя в любое требуемое состояние покоя.

Заметим, что рассмотренный пример 2 соответствует именно случаю сингулярно возмущенной системы (4.2), что наглядно проявляется в уравнениях с заменой $x_2 = \epsilon\theta$, где $\epsilon = 1/c$ – малый параметр.

7. Пример регулярно возмущенной системы (4.1). Пусть система (фиг. 4) с тремя степенями свободы и конфигурацией $\mathbf{q} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ составлена из сплошных однородных дисков (масс m_2 и m_3 , радиусов R_2 и R_3) и водила OA (однородный стержень массы m_1 и длины l). Конструкция расположена в горизонтальной плоскости (вне тяготения) и допускает проскальзывание дисков. Все углы отсчитываются против часовой стрелки. Трение в шарнирах O и A отсутствует, а в точке K соприкосновения дисков подчиняется закону Амонтона – Кулона: $F_f \leq fN$, где N полагаем известной постоянной. Управляющим воздействием является внутренний момент $M(t)$, действующий от стержня OA к диску с центром A. При исследовании свойств управляемости положим $|M(t)| \leq M_0$, где M_0 – заранее заданная величина, меньшая всех вычисляемых далее “характерных” моментов в динамике системы.

При отсутствии проскальзывания сила сцепления $F_a \leq fN$ обеспечивает кинематическое соотношение

$$\dot{\phi}_1 l = \dot{\phi}_2 R_2 + \dot{\phi}_3 R_3$$

Если же скорость проскальзывания

$$\dot{s} = \dot{\phi}_2 R_2 + \dot{\phi}_3 R_3 - \dot{\phi}_1 l$$

не равна нулю, то сила трения скольжения будет

$$F_f = fN \operatorname{sign} \dot{s} \quad (7.1)$$

Заметим, что режим $\dot{s} \equiv 0$ (движение без проскальзывания) будет результатом “бесконечно быстрой” перемены значения функции $\operatorname{sign}(\dot{s})$. При этом вычисляемая по правилу А.Ф. Филиппова [13] функция, эквивалентная $fN \operatorname{sign}(\dot{s}(t))$, в этом случае совпадет с кулоновской силой сцепления $F_a < fN$. Поэтому в общем случае можно составлять уравнения движения в предположении о наличии проскальзывания, беря заранее силу трения в виде (7.1). Используя безразмерные переменные и безразмерное время

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_3} \quad (i = 1, 2), \quad \lambda = \frac{R_2}{l} < 1, \quad s_1 = \frac{s}{l}, \quad u = \frac{M}{m_3 g l}, \quad \eta = \frac{Nf}{m_3 g}, \quad t_1 = t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

получим приведенную кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1}{3} + 1 \right) \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{4} \mu_2 \lambda^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{4} (1 - \lambda)^2 \dot{\phi}_3^2$$

и уравнения движения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_1}{3} + 1 \right) \ddot{\phi}_1 + \frac{1}{2} (1 - \lambda)^2 \ddot{\phi}_3 &= \lambda \eta \operatorname{sign} \dot{s}_1 \\ \frac{1}{2} \mu_2 \lambda^2 \ddot{\phi}_2 &= -\lambda \eta \operatorname{sign} \dot{s}_1, \quad \frac{1}{2} (1 - \lambda)^2 \ddot{\phi}_3 = u - (1 - \lambda) \eta \operatorname{sign} \dot{s}_1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\dot{s}_1 = -\dot{\phi}_1 + \lambda \dot{\phi}_2 + (1 - \lambda) \dot{\phi}_3$$

Поскольку внешних моментов относительно оси O нет, то сохраняется кинетический момент

$$p_1 = \left(\frac{\mu_1}{3} + 1 \right) \dot{\phi}_1 + \frac{1}{2} \mu_2 \lambda^2 \dot{\phi}_2 + \frac{1}{2} (1 - \lambda)^2 \dot{\phi}_3$$

т.е. система все время остается на инвариантном многообразии $p_1 = \text{const}$. Далее на этом множестве исследуем управляемость по входу $u(t)$, оставляя в качестве независимых переменных ϕ_1 и s_1 . Введя обозначения

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{3} + 1 \right) \dot{\phi}_1, \quad v = \frac{\dot{s}_1}{c_1}, \quad k = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1 = \frac{2}{1 - \lambda} + \frac{3}{\mu_1 + 3}, \quad c_2 = \frac{2(\mu_2 + 1)}{\mu_2} + \frac{3}{\mu_1 + 3}$$

на многообразии $p_1 = \text{const}$ получим движение системы с двумя степенями свободы

$$\dot{\omega} = -u + \eta \operatorname{sign} v, \quad \dot{v} = u - k \eta \operatorname{sign} v \quad (7.3)$$

где ω и v – приведенные угловая скорость стержня OA и скорость проскальзывания дисков. На управление налагаем заданное ограничение $|u| \leq a$, полагая его сколь угодно малым, в том числе при $a < k\eta/2$.

Для системы (7.3) будут возможны два типа движения:

А. При начальной скорости проскальзывания $v(0) \neq 0$ объект за конечное время переходит в режим $v = 0$, так как производная функции $V = |v|$ по времени в силу системы (7.3) будет

$$dV/dt = \dot{v} \operatorname{sign} v = u \operatorname{sign} v - k\eta < -k\eta/2$$

Б. При $v(0) = 0$ в виду неравенства $a < k\eta$ реализуются условия бесконечно быстрой перемены знака функции $\operatorname{sign} v$ (так как $v > 0 \Rightarrow \dot{v} < 0$, $v < 0 \Rightarrow \dot{v} > 0$). При этом вычисляемая согласно известной процедуре [13] эквивалентная правая часть второго уравнения (7.3) соответствует силе трения сцепления $ku(t)$, не превышающей максимальную по закону Амонтона–Кулона.

В результате внутри многообразия $p_1 = \operatorname{const}$ имеется инвариантное подмногообразие, задаваемое условием $\dot{s} = 0$ (качение без проскальзывания), которое система не может покинуть при любом допустимом управлении. Таким образом, система не является управляемой в пространстве (ϕ_1, \dot{s}) , а значит и в пространстве (ϕ_1, ϕ_2) .

Далее модель планетарного механизма (фиг. 4) усложним, полагая взаимное давление дисков зависящим от угловой скорости стержня OA (например, ввиду его продольной деформируемости). Пусть $\eta = \eta(\omega) > 0$, где функция $\eta(\omega)$ – гладкая, четная и монотонно убывающая при $\omega > 0$ асимптотически: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta(\omega) = 0$ при $\omega \rightarrow 0$. При малой деформируемости стержня можно принять $\dot{\eta} = \epsilon f(\omega)\dot{\omega}$, где $d\eta/d\omega = \epsilon f(\omega)$, ϵ – малый параметр. Тогда наряду с жесткой моделью (7.3) (где $\eta = \operatorname{const}$) можно рассматривать нежесткую модель

$$\dot{\omega} = -u + \eta \operatorname{sign} v, \quad \dot{v} = u - k\eta \operatorname{sign} v, \quad \dot{\eta} = \epsilon f(\omega)(-u + \eta \operatorname{sign} v) \tag{7.4}$$

которая соответствует регулярно возмущенной системе вида (4.1). Строго говоря, это соответствие лишь формальное, если представлять зависимость $\eta = \eta(\omega)$ как “первый интеграл” в системе с дополнительной степенью свободы η , полагая конструктивно возможными разные исходные значения $\eta(0)$ (за счет предварительного сжатия деформируемого стержня OA).

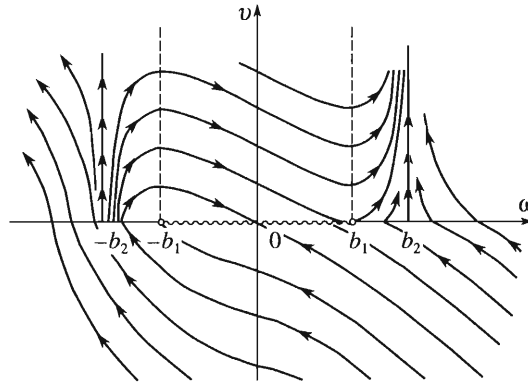
Исследуем управляемость системы (7.4) в пространстве переменных (ω, v) при $\epsilon > 0$. Как и для системы (7.3), здесь имеет место соотношение

$$k\dot{\omega} + \dot{v} = (1 - k)u \tag{7.5}$$

дающее при $k = 1$ равенство $\dot{\omega} + \dot{v} = 0$ для любых $u(t)$. Можно показать, что условию $k = 1$ соответствует случай $m_3 R_3 = m_2 R_2$. При таком сочетании параметров системы (7.3) и (7.4) на многообразии $p_1 = \operatorname{const}$ не управляемы.

Далее рассмотрим случай $k < 1$, т.е. $m_3 R_3 < m_2 R_2$. Интегрируя систему (7.4) при значениях $u = +a$ отдельно в полуплоскостях $v > 0$ и $v < 0$, получим множество решений, представленное на фиг.5. Здесь в силу свойств функции $\eta(\omega)$ существуют числа $b_2 > b_1 > 0$, такие, что $\eta(b_2) = a$, $\eta(b_1) = a/k$. При “склеивании” решений на границе $v = 0$ полуплоскостей внутри интервала $|\omega| < b_1$ (где выполняется неравенство $a < k\eta(\omega)$) реализуются условия “пилообразного” режима ($v > 0 \Rightarrow \dot{v} < 0$, $v < 0 \Rightarrow \dot{v} > 0$), т.е. чистого качения.

Для случая $u = -a$ семейство решений на плоскости (ω, v) получается из показанного на фиг. 5 заменой направления осей ω и v на противоположные, поскольку система (7.4) инвариантна относительно замены $u \rightarrow -u$, $\omega \rightarrow -\omega$, $v \rightarrow -v$. Если ограничение a заменить меньшим значением, то поведение решений (фиг. 5) качественно не изменится. Увеличатся лишь абсциссы b_2, b_1 характерных вертикалей, т.е. расширится диапазон чистого качения и возрастет значение угловой скорости ω в стационарном режиме.



Фиг. 5

Заметим, что для глобальной управляемости системы (7.4) в пространстве (ω, v) достаточно нуль-управляемости [1] системы (7.4) и нуль-управляемости обращенной во времени $t \rightarrow -t$ системы в виде

$$\dot{\omega} = u - \eta(\omega)\text{sign}v, \quad \dot{v} = -u + k\eta(\omega)\text{sign}v \quad (7.6)$$

Действительно, тогда любые две точки (ω_0, v_0) и (ω_f, v_f) можно соединить траекторией $(\omega_0, v_0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (\omega_f, v_f)$.

Нуль-управляемость системы (7.4) доказывается, например, следующей стратегией движения из произвольной точки (ω_0, v_0) . Если $v_0 \neq 0$, то при $u = -a\text{sign}v$ система за конечное время перейдет в режим $v = 0$, так как производная функции $V_1 = |v|$ по времени в силу системы (7.4) будет иметь вид

$$dV_1/dt = \dot{v}\text{sign}v = -a - k\eta(\omega) < -a$$

Если же $v_0 = 0$, то из точки $(\omega_0, 0)$ можно за конечное время попасть в точку $(0, 0)$ управлением

$$u = -a_1\text{sign}\omega, \quad 0 < a_1 < \min\{a, k\eta(\omega_0)\}$$

Ввиду условий “пилообразного” режима здесь

$$\dot{v} = 0, \quad \dot{\omega} = (1/k - 1)u$$

Поэтому для функции $V_2 = |\omega|$ в силу системы (7.4) получим

$$dV_2/dt = -a_1(1/k - 1) \quad (7.7)$$

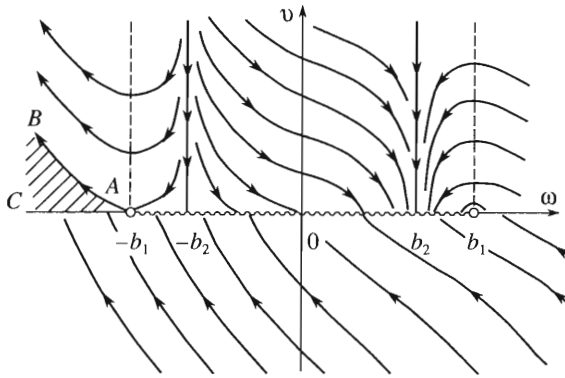
Нуль-управляемость обращенной во времени системы (7.6) показывается следующим способом движения из начальной точки (ω_f, v_f) . Если $v_f = 0$, то за конечное время можно попасть в точку $(0, 0)$, выбирая управление

$$u = a_1\text{sign}\omega, \quad 0 < a_1 < \min\{a, k\eta(\omega_f)\}$$

Так как из равенства $\dot{v} = 0$ и уравнения (7.6) следует $\dot{\omega} = -u(1/k - 1)$, то

$$\dot{\omega} = -a_1(1/k - 1)\text{sign}\omega.$$

Значит, выполнимо равенство (7.7). Здесь и далее обращение во времени “пилообразного” режима производится путем предварительной замены функции $\text{sign}(\cdot)$ (с бесконечно быстрой переменной знака) на эквивалентную функцию по правилу Филиппова [13].



Фиг. 6

Если $v_f \neq 0$, то переход на множество $v = 0$ и ужно осуществлять по-разному для случаев $|\omega_f| > b_2$ и $|\omega_f| \leq b_2$.

Случай $|\omega_f| > b_2$. Выбирая управление $u = \eta(\omega_f)\text{sign } v$, переведем точку на плоскости (ω, v) вдоль вертикали $\omega = \omega_f$ (так как $\dot{\omega} = 0$) на прямую $v = 0$. Ввиду равенства $\dot{v} = -(1 - k)\eta(\omega)\text{sign } v$ получим

$$dV_1/dt = \dot{v}\text{sign } v = -(1 - k)\eta(\omega)$$

Попав на прямую $v = 0$, используем далее стратегию $u = a_1\text{sign } \omega$.

Случай $|\omega_f| \leq b_2$. Выбирая управление $u = -a\text{sign } v_f$ (при котором $\dot{\omega} = -(a + \eta(\omega))\text{sign } v$), достигнем вертикали $\omega = -b_2$ (если $v_f > 0$) либо $\omega = b_2$ (если $v_f < 0$). При этом

$$\dot{v} = (a + k\eta(\omega))\text{sign } v$$

т.е. координата v не изменит знака. Достигнув вертикали $|\omega| = b_2$, можно двигаться по ней при $u = a\text{sign } v$, затем по прямой $v = 0$ при $u = a_1\text{sign } \omega$ до точки $(0, 0)$.

Итак, при $k < 1$ (т.е. при $m_3R_3 < m_2R_2$) систему (7.4) можно из любого состояния (ω_0, v_0) перевести в любое состояние (ω_f, v_f) за конечное время, выбирая допустимое управление $|u| \leq a$, где a – сколь угодно малое число. В отличие от системы (7.3) (где $\eta = \text{const}$) управляемость здесь обеспечена возможностью выхода из режима чистого качения в режим проскальзывания дисков за счет изменения параметра $\eta(\omega)$.

Можно показать, что при $k > 1$ (т.е. при $m_3R_3 > m_2R_2$) система (7.4) неуправляема. Семейство ее решений при $u = +a$ (фиг. 6) отличается от семейства для $k < 1$ (фиг. 5) порядком расположения вертикалей $|\omega| = b_1$ и $|\omega| = b_2$ (где $\eta(b_2) = a$, $\eta(b_1) = a/k$), так как теперь уже $b_2 < b_1$. Как и прежде, семейство решений для $u = -a$ отличается от семейства для $u = +a$ заменой $\omega \rightarrow -\omega$, $v \rightarrow -v$. С одной стороны, здесь имеется нуль-управляемость, т.е. достижимость точки $(0, 0)$ за конечное время из произвольного состояния (ω_0, v_0) (с использованием той же стратегии, что и при $k < 1$). С другой стороны, из точки $(0, 0)$ можно попасть только в точки на оси ω и в точки сектора ВАС (фиг. 6) либо ему симметричного относительно центра 0. Действительно, движение из точки $(0, 0)$ в силу системы (7.4) возможно лишь в “пилообразном” режиме. При $u = +a$ оно дойдет до точки $\omega = -b_1$, а при $u = a_3 < a$ продолжится “левее” (до точки $\omega = -b_3$, где $\eta(b_3) = a_3/k$). При этом ВАС –

граница ориентированного многообразия [14], т.е. движение из ее точек может происходить только внутрь сектора либо вдоль границы: в каждой точке кривой АВ нормальный вектор $\mathbf{n} = (a - k\eta, a - \eta)^T$ образует с вектором скорости $\mathbf{v} = (-u(t) + \eta, u(t) - k\eta)^T$ угол не острый (так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \eta(k - 1)(u - a) \leq 0$ при любом управлении $u(t)$). Значит при $k \geq 1$ система (7.4) не является глобально управляемой.

Таким образом, система (7.4) при $k < 1$ – параметрически управляема в пространстве (ω, ν) . Следовательно, планетарный механизм (фиг. 4) при условии $m_3 R_3 < m_2 R_2$ можно с помощью сколь угодно малого внутреннего момента $M(t)$ перевести в пространстве (ϕ_1, ϕ_2) из любого состояния в любое за счет продольной нежесткости стержня OA , меняющей характер проскальзывания дисков. При абсолютной твердости стержня OA это сделать невозможно.

Автор благодарит И.Ф. Борецкого за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E.B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. N.Y. etc.: Wiley, 1967 = Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
2. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ, 1986. № 6. С. 16–23.
3. Борецкий И.Ф., Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел // ПММ, 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 405–412.
4. Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел с несколькими устойчивыми состояниями покоя // ПММ, 2002. Т.66. Вып. 5. С. 775–781.
5. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР, 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
6. Каюмов О.Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 61–63.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1957. № 4. С. 9–16.
10. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
11. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972. 622 с.
12. Семенов В.Н. Об управляемости нелинейных динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 8. С. 34–40.
13. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
14. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.