УДК 531.36:534.1

© 2006 г. О. В. Холостова

О РЕЗОНАНСНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ ГАМИЛЬТОНИАНА

Рассматриваются движения неавтономной периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, гамильтониан которой содержит малый параметр. Начало координат фазового пространства является положением равновесия невозмущенной или полной системы, устойчивым в линейном приближении. Предполагается, что в невозмущенном гамильтониане имеет место вырождение при учете членов не выше четвертой степени (частота малых нелинейных колебаний не зависит от амплитуды) и при этом в системе реализуется один из резонансов до четвертого порядка включительно. Для каждого резонансного случая построены модельные гамильтонианы и проведено качественное исследование движений модельной системы. При помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории дано строгое решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений исходной системы, являющихся аналитическими по дробным степеням малого параметра. В качестве приложения исследованы резонансные периодические движения (в случае рассматриваемого вырождения) сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движения неавтономной 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, гамильтониан $H(x, p_x, t)$ которой содержит малый параметр ε. Начало координат $x = p_x = 0$ фазового пространства является положением равновесия либо невозмущенной (при $\varepsilon = 0$), либо полной (при $\varepsilon \neq 0$) системы, устойчивым в линейном приближении, и в его окрестности функция H аналитична.

Ранее в цикле работ [1–8] построена теория нелинейных колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы при наличии резонансов до четвертого порядка включительно; в частности дано строгое решение вопроса о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических (с периодом, кратным периоду внешнего возмущения) движений таких систем, аналитических по дробным или целым степеням малого параметра. Полученные результаты верны в предположении, что в невозмущенном гамильтониане отсутствует вырождение в членах до четвертого порядка включительно относительно x и p_x. Это означает, что в нормализованном до членов четвертого порядка невозмущенном гамильтониане, имеющем вид

$$\frac{1}{2}\omega(x^2 + p_x^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + p_x^2)^2 + \ldots$$

коэффициент c_2 отличен от нуля. В этом случае полный гамильтониан достаточно нормализовать также до членов четвертого порядка с учетом имеющегося резонанса и затем, изучив свойства приближенной (модельной) системы, получить выводы о движениях полной системы.

При решении конкретных задач, однако, возникают ситуации, когда в системе имеет место резонанс, и при этом для определенных значений параметров задачи или соотношений между ними величина c_2 равна или близка к нулю. Тогда частота малых нелинейных колебаний системы не зависит от амплитуды при учете в гамильтониане членов до четвертого порядка включительно. Такой вырожденный случай приводит к качественно новой ситуации и требует особого рассмотрения.

При исследовании системы в случае вырождения в гамильтониане необходим учет членов до шестого порядка включительно относительно x и p_x. Получаемые в результате нормализации модельные гамильтонианы обладают качественно новыми свойствами и не сводятся к известным.

Цель работы – строгое решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений системы для каждого резонансного случая до четвертого порядка включительно при наличии вырождения невозмущенного гамильтониана. Предполагается, что рассматриваемая гамильтонова система близка к автономной. Начало координат $x = p_x = 0$ является положением равновесия невозмущенной (в случае резонанса в вынужденных колебаниях) или полной (в остальных резонансных случаях) системы, в окрестности которого гамильтониан аналитичен и представляется в виде

$$H(x, p_x, t; \varepsilon) = H^{(0)}(x, p_x) + \varepsilon H^{(1)}(x, p_x, t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(x, p_x, t) + \ldots \tag{1.1}$$

$$H^{(0)}(x, p_x) = H_2^{(0)} + H_3^{(0)} + H_4^{(0)} + \ldots$$

$$H^{(k)}(x, p_x, t) = H_1^{(k)} + H_2^{(k)} + H_3^{(k)} + H_4^{(k)} + \ldots$$

где $H_l^{(k)}$ – формы l-й степени относительно x и p_x с постоянными (при $k = 0$) или 2π-периодическими по времени (при $k \geq 1$) коэффициентами. Формы $H_1^{(k)}$ $(k \geq 1)$ первой степени присутствуют в последнем соотношении (1.1) только в случае резонанса в вынужденных колебаниях, в остальных резонансных случаях $H_1^{(k)} \equiv 0$.

Будем считать, что невозмущенный гамильтониан $H^{(0)}$ уже приведен к нормальной форме до членов шестого порядка включительно относительно x и p_x и имеет вид

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\omega(x^2 + p_x^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + p_x^2)^2 + \frac{1}{8}c_3(x^2 + p_x^2)^3 + \ldots \tag{1.2}$$

причем предполагается, что $c_2 \simeq 0$, а $c_3 \neq 0$.

Для системы с гамильтонианом (1.1), (1.2) рассматриваются следующие резонансные случаи: случай резонанса в вынужденных колебаниях, когда собственная частота ω малых колебаний невозмущенной системы близка к целому числу; случай параметрического резонанса, когда величина 2ω близка к целому нечетному числу; случаи резонансов третьего или четвертого порядков, когда линеаризованная в окрестности начала координат система устойчива по Ляпунову, ее характеристические показатели $\pm i\lambda$ чисто мнимые, и при этом одна из величин 3λ или 4λ близка к целому числу (и отсутствуют резонансы более низких порядков).

Для каждого описанного резонансного случая исследуются нелинейные колебания системы в достаточно малой окрестности начала координат (величина которой зависит от порядка резонанса). В разд. 2 при помощи ряда канонических замен переменных проводится преобразование гамильтонина и приведение его к виду, характерному для рассматриваемого резонанса; выделяется модельная часть гамильтониана. В разд.3 проводится качественное исследование модельных систем: описываются положения равновесия, строятся фазовые портреты. В разд.4 при помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории исследуется вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений полной системы, аналитических по дробным степеням малого параметра. В разд. 5 в качестве приложения исследуются резонансные периодические движения (при наличии рассматриваемого вырождения) сферического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания малой амплитуды.

2. Преобразование гамильтониана. Пусть в системе реализуется резонанс n-го порядка ($n = 1, 2, 3$ или 4); случаи $n = 1$ и 2 отвечают резонансу в вынужденных колебаниях и параметрическому резонансу. Полагаем, что $n\omega \sim N$ ($n = 1, 2$) или $n\lambda \sim N$ ($n = 3, 4$), где N – целое число.

При помощи последовательности канонических замен переменных приведем гамильтониан (1.1), (1.2) к нормальной форме; в случаях $n = 2, 3, 4$ в выражениях (1.1) следует положить $H_1^{(k)} \equiv 0$.

Сделаем в гамильтониане замену переменных

$$x = \varepsilon^{s_n}\xi, \quad p_x = \varepsilon^{s_n}\eta; \quad s_n = (6-n)^{-1}$$

В новых переменных гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega(\xi^2+\eta^2) + \frac{1}{4}\varepsilon^{2s_n}c_2(\xi^2+\eta^2)^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^{4s_n}c_3(\xi^2+\eta^2)^3 + \varepsilon^{4s_n}h_n^{(1)}(\xi,\eta,t) + O(\varepsilon^{5s_n})$$

где $h_n^{(1)}(\xi, \eta, t)$ – это форма $H_n^{(1)}(x, p_x, t)$ из (1.1), в которой величины x и p_x заменены на ξ и η.

Перейдем к "полярным" координатам φ, r по формулам

$$\xi = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad \eta = \sqrt{2r}\cos\varphi$$

Далее при помощи близкой к тождественной, 2π-периодической по t замены переменных

$$\varphi = \tilde\varphi + O(\varepsilon^{4s_n}), \quad r = \tilde r + O(\varepsilon^{4s_n})$$

упростим члены до шестой степени включительно по ξ и η с учетом имеющегося резонанса. При этом все слагаемые с нерезонансными гармониками уничтожаются; коэффициент ω в квадратичной части невозмущенного гамильтониана получает при $n \geq 2$ "поправку" порядка ε; в членах n-й степени по ξ и η остаются только слагаемые с резонансными гармониками. Гамильтониан системы преобразуется к виду

$$H = \hat\lambda r + \varepsilon^{2s_n}c_2r^2 + \varepsilon^{4s_n}c_3r^3 + \varepsilon^{4s_n}\kappa_n r^{n/2}\cos(n\varphi - Nt + n\varphi_0) + O(\varepsilon^{5s_n})$$

где $\hat\lambda = \omega$ при $n = 1$ и $\hat\lambda = \omega + O(\varepsilon) = \mathrm{const}$ при $n \geq 2$. Резонансный коэффициент κ_n считаем положительным, этого всегда можно добиться сдвигом по $\tilde\varphi$.

Положим $c_2 = \varepsilon^{2s_n}a_2$, $\lambda = N/n - \varepsilon^{4s_n}\beta$ и сделаем замену переменных

$$n\varphi - Nt + n\varphi_0 = n\tilde\varphi, \quad r = \tilde r$$

При этом в главной части гамильтониана порядки слагаемых выравниваются:

$$\tilde H = \varepsilon^{4s_n}(-\beta\tilde r + a_2\tilde r^2 + c_3\tilde r^3 + \kappa_n\tilde r^{n/2}\cos n\tilde\varphi) + O(\varepsilon^{5s_n})$$

Сделаем еще одну замену

$$\tilde{\varphi} = \sigma\theta + \frac{(1-\sigma)\pi}{2n}, \quad \tilde{r} = k_n\rho; \quad \sigma = \operatorname{sign} c_3, \quad k_n = \left(\frac{\kappa_n}{|c_n|}\right)^{2s_n}$$

перейдем к новой независимой переменной $\tau = (\varepsilon^4|c_3|^{2-n}\kappa_n^4)^{s_n} t$ и введем параметры

$$\mu = \sigma\beta(|c_3|^{n-2}\kappa_n^{-4})^{s_n}, \quad \nu = \sigma a_2(|c_3|^{n-4}\kappa_n^{-2})^{s_n}$$

Гамильтониан примет вид

$$\Gamma^{(n)} = \gamma_0^{(n)}(\theta, \rho) + \varepsilon^{s_n}\gamma_1^{(n)}(\theta, \rho^{1/2}, \tau; \varepsilon^{s_n}) \tag{2.1}$$

$$\gamma_0^{(n)} = -\mu\rho + \nu\rho^2 + \rho^3 + \rho^{n/2}\cos n\theta \tag{2.2}$$

Функция $\gamma_0^{(n)}$ ($n = 1, \ldots, 4$) в соотношении (2.2) представляет собой модельный гамильтониан для случая резонанса n-го порядка при вырождении невозмущенного гамильтониана; параметры μ и ν могут принимать произвольные значения. Функция $\gamma_1^{(n)}$ в соотношении (2.1) 2π-периодична по θ, периодична по τ с периодом $T \sim \varepsilon^{4s_n}$ и в области $0 < \rho \ll 1$ аналитична по всем переменным.

Ранее[1] гамильтониан, аналогичный (2.2) при $n = 2$, и бóльшая часть отвечающих ему фазовых портретов, приведенных ниже в разд. 3, получены при рассмотрении частной задачи – исследовании параметрически возбуждаемых волновых движений жидкости в случаях, близких к критическим.

Соответствующие гамильтониану (2.1) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu\rho + 3\rho^2 + \frac{n}{2}\rho^{(n-2)/2}\cos n\theta + O(\varepsilon^{s_n}), \quad \frac{d\rho}{d\tau} = n\rho^{n/2}\sin n\theta + O(\varepsilon^{s_n}) \tag{2.3}$$

3. Исследование модельных систем. Проведем качественное исследование движений систем, описываемых модельными гамильтонианами (2.2).

3.1. *Положения равновесия. 3.1.1.* В случае резонанса в вынужденных колебаниях положения равновесия системы с гамильтонианом (2.2) (при $n = 1$) определяются из соотношений

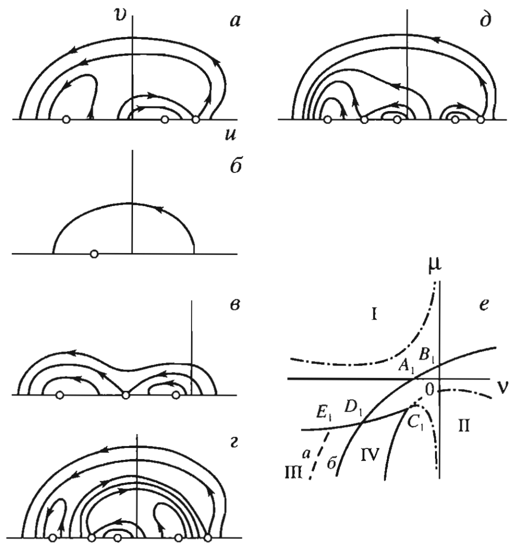
$$\sin\theta = 0, \quad f_1(r) = 6r^5 + 4\nu r^3 - 2\mu r + \cos\theta = 0 \ (r = \sqrt{\rho} \geq 0)$$

Несложный анализ функции $f_1(r)$ при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ показывает, что число нулей этой функции меняется при переходе через такие значения параметров ν и μ, для которых выполняются условия

$$f_1|_{\theta=0} = f'_{1r} = 0 \ \text{или} \ f_1|_{\theta=\pi} = f'_{1r} = 0$$

Эти условия реализуются для значений параметров ν, μ, принадлежащих кривым, показанным на фиг. 1, *e* сплошными линиями и разделяющим плоскость параметров

[1] *Бордаков Г.А., Карпов И.И., Леонов В.В., Секерж-Зенькович С.Я., Шингарева И.К.* Приближенное решение задачи о параметрическом возбуждении поверхностных волн при глубине жидкости близкой к критической. М.: Препринт Ин-та проблем механики РАН. 1993. № 526. 28 с.



Фиг. 1

задачи на четыре области I–IV. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 пересечения этих кривых с осями координат и друг с другом имеют координаты $(-5 \cdot 2^{-9/5}, 0)$, $(0, 5 \cdot 2^{-12/5} \cdot 3^{1/5})$, $(-5 \cdot 2^{-8/5}, -5 \cdot 2^{-16/5})$, $(-2.776\ldots, -2.055\ldots)$ соответственно.

В областях I и IV на фиг. 1, *е* модельная система имеет три положения равновесия – два устойчивых и одно неустойчивое, в области III – пять положений равновесия (три устойчивых и два неустойчивых) и в области II – одно устойчивое положение равновесия.

3.1.2. В случае параметрического резонанса система с гамильтонианом (2.2) (при $n = 2$) имеет положение равновесия $\rho = 0$ в начале координат, устойчивое при $|\mu| > 1$ и неустойчивое при $|\mu| < 1$. При $\mu = 1$ это положение равновесия устойчиво при $\nu < 0$ и неустойчиво при $\nu \geq 0$, а при $\mu = -1$ устойчиво при $\nu \geq 0$ и неустойчиво при $\nu < 0$.

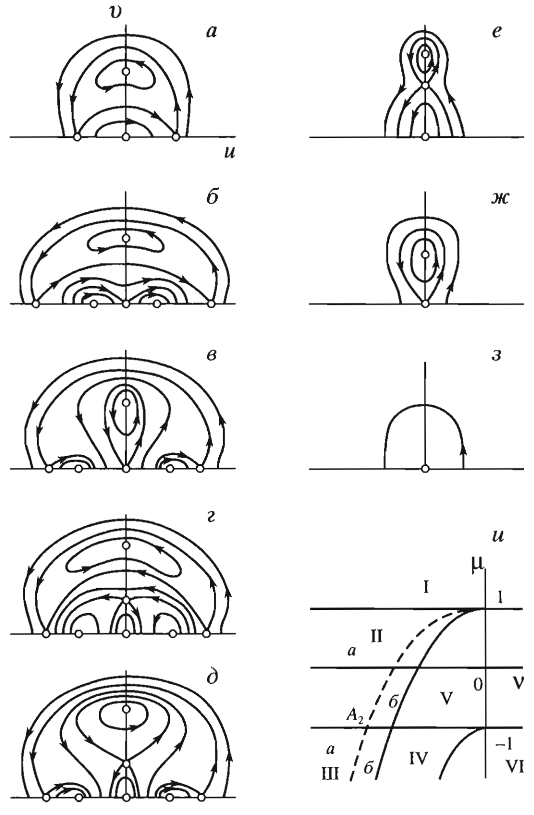
Другие положения равновесия системы определяются из соотношений

$$\sin 2\theta = 0, \quad f_2(\rho) = 3\rho^2 + 2\nu\rho + (\cos 2\theta - \mu) = 0$$

В плоскости параметров ν, μ выделим области I–VI (фиг. 2, *и*), границами которых служат прямые $\mu = 1$ и $\mu = -1$, а также части парабол $\mu = 1 - \nu^2/3$ и $\mu = -1 - \nu^2/3$ при $\nu \leq 0$. В области I уравнение $f_2(\rho) = 0$ имеет одно решение $\rho = \rho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области II – два решения $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ при $\cos 2\theta = 1$ и одно решение $\rho = \rho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области III – два решения $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ при $\cos 2\theta = 1$ и два решения $\rho = \rho_3$ и $\rho = \rho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области IV – два решения $\rho = \rho_3$ и $\rho = \rho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области V – одно решение $\rho = \rho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области VI уравнение $f_2(\rho) = 0$ не имеет положительных решений. Здесь введены обозначения

$$\rho_{1,2} = R^{\pm}(\nu, \mu - 1)(\rho_2 \geq \rho_1), \quad \rho_{3,4} = R^{\pm}(\nu, \mu + 1)(\rho_4 \geq \rho_3); \quad R^{\pm}(\nu, \mu) = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 + 3\mu}}{3}$$

Равновесным значениям $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_4$ отвечают устойчивые, а $\rho = \rho_2$ и $\rho = \rho_3$ – неустойчивые положения равновесия системы.



Фиг. 2

3.1.3. При резонансе третьего порядка система с гамильтонианом (2.2) (при $n = 3$) имеет положение равновесия $\rho = 0$, устойчивое при $\mu \neq 0$ и неустойчивое при $\mu = 0$. Другие положения равновесия задаются уравнениями

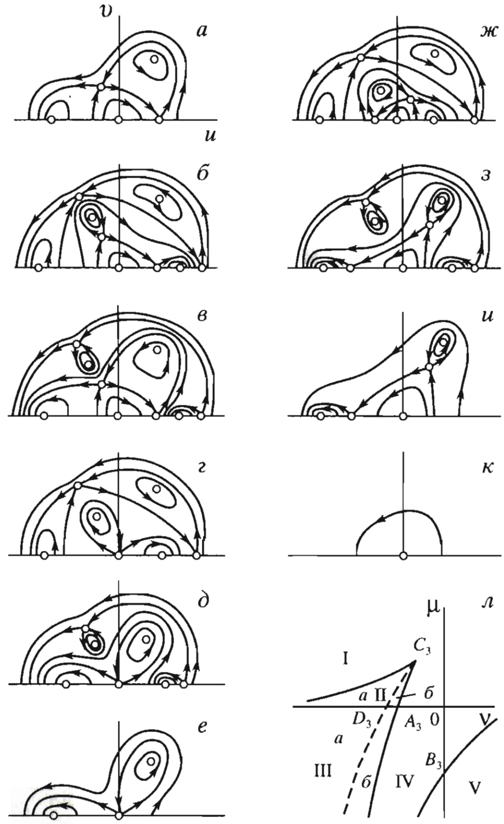
$$\sin 3\theta = 0, \quad f_3(r) = 3r^4 + 2\nu r^2 + \frac{3}{2} r \cos 3\theta - \mu = 0 \; (r = \rho^{1/2} \geq 0)$$

Число положений равновесия модельной системы меняется при переходе через такие значения параметров ν и μ, для которых выполняются условия

$$f_3\big|_{\cos 3\theta = 1} = f'_{3r}\big|_{\cos 3\theta = 1} = 0 \quad \text{или} \quad f_3\big|_{\cos 3\theta = -1} = f'_{3r}\big|_{\cos 3\theta = -1} = 0$$

Отвечающие этим условиям кривые (показанные на фиг. 3, *л* сплошными линиями), а также прямая $\mu = 0$ делят плоскость параметров ν, μ на области I–V. Точки A_3, B_3, C_3 на фиг. 3, *л* имеют координаты $(-9 \cdot 2^{-7/3}, 0)$, $(0, -9/16)$, $(-9 \cdot 2^{-8/3}, 9 \cdot 2^{-16/3})$ соответственно.

В области I уравнение $f_3(r) = 0$ имеет одно решение при $\cos 3\theta = 1$ и одно решение при $\cos 3\theta = -1$, которым соответствуют неустойчивые и устойчивые положения равновесия модельной системы. В области II это уравнение имеет три решения $r = r_1, r_2, r_3$ ($r_1 < r_2 < r_3$) при $\cos 3\theta = 1$ и одно решение $r = r_4$ при $\cos 3\theta = -1$; решениям $r = r_1, r_3$ отвечают неустойчивые, а решениям $r = r_2, r_4$ – устойчивые положения равновесия. В области III уравнение $f_3(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1, r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 3\theta = 1$ и два реше-



Фиг. 3

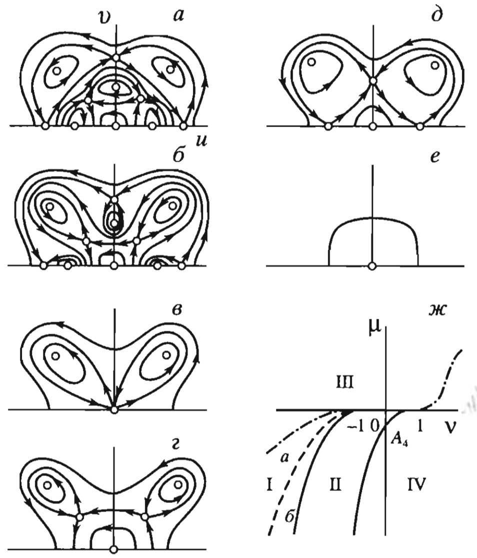
ния $r = r_3$, r_4 ($r_3 < r_4$) при $\cos 3\theta = -1$; решениям $r = r_1$ и $r = r_4$ соответствуют устойчивые, а решениям $r = r_2$ и $r = r_3$ – неустойчивые положения равновесия системы. В области IV уравнение $f_3(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 3\theta = -1$, которым отвечают неустойчивые и устойчивые положения равновесия системы. В области V уравнение не имеет решений при $\cos 3\theta = \pm 1$.

3.1.4. В случае резонанса четвертого порядка система с гамильтонианом (2.2) (при $n = 4$) имеет положение равновесия $\rho = 0$, неустойчивое при $\mu = 0$ и $-1 \le \nu < 1$ и устойчивое в остальных случаях.

В плоскости параметров ν, μ выделим области I–IV (фиг. 4, *ж*), границами которых служат прямая $\mu = 0$ и части парабол $\mu = -(\nu + 1)^2/3$ (при $\nu \le -1$) и $\mu = -(\nu - 1)^2/3$ (при $\nu \le 1$). Кроме положения равновесия $\rho = 0$, в области I система имеет также положения равновесия при $\rho = \rho_1$, ρ_2 и $\cos 4\theta = 1$ и положения равновесия при $\rho = \rho_3$, ρ_4 и $\cos 4\theta = -1$, где

$$\rho_{1,2} = R^{\pm}(\nu + 1, \mu), \quad \rho_{3,4} = R^{\pm}(\nu - 1, \mu), \quad \rho_3 < \rho_1 \le \rho_2 < \rho_4$$

В области II система имеет положения равновесия при $\rho = \rho_3$, ρ_4 и $\cos 4\theta = -1$. В области III система имеет положения равновесия при $\rho = \rho_2$ и $\cos 4\theta = 1$ и положения равновесия при $\rho = \rho_4$ и $\cos 4\theta = -1$. В области IV система не имеет положений равновесия, отличных от $\rho = 0$. Равновесным значениям $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_4$ отвечают устойчивые, а $\rho = \rho_2$ и $\rho = \rho_3$ – неустойчивые положения равновесия модельной системы.



Фиг. 4

3.2. *Фазовые портреты*. Фазовые портреты модельных систем с гамильтонианами (2.2) при $n = 1, \ldots, 4$ показаны соответственно на фиг. 1–4 в плоскости переменных $u = \sqrt{2\rho}\cos\theta$, $v = \sqrt{2\rho}\sin\theta$ при $v \geq 0$. Для резонанса n-го порядка фазовые портреты переходят в себя при повороте плоскости вокруг начала координат на угол, кратный π/n.

Устойчивым положениям равновесия модельных систем отвечают на фиг. 1–4 особые точки типа "центр", неустойчивым – седловые особые точки. На криволинейных границах областей происходит слияние двух равновесных точек системы – устойчивой и неустойчивой – в одну неустойчивую сложную особую точку, которая при переходе через кривую исчезает; соответствующие фазовые портреты не приводятся. Через неустойчивые особые точки проходят сепаратрисы, разделяющие области с различным характером движений системы. Каждая из областей, в которых имеется два типа неустойчивых особых точек (а значит, две сепаратрисы на фазовых портретах), разделяется на две подобласти, помеченные буквами *а* и *б*, с различным видом сепаратрис. Перестройка фазовых портретов, когда две сепаратрисы сливаются в одну, происходит на кривых, показанных на фиг. 1, *е*, 2, *и*, 3, *л*, 4, *ж* штриховыми линиями (соответствующие фазовые портреты не приведены). Точки E_1, A_2, D_3 пересечения этих кривых с границами областей имеют координаты (– 3.485…, –2.237…), $(-2\sqrt{2}, -1)$, (–1.89…, 0) соответственно. Другим траекториям модельной системы отвечают либо колебания в окрестности устойчивых положений равновесия, либо вращения – замкнутые траектории на фиг. 1–4, охватывающие сепаратрисы. Фазовые портреты на прямолинейных границах областей показаны только в тех случаях, когда они качественно отличаются от фазовых портретов в примыкающих к ним областях.

Фиг. 1, *а–д* отвечает случаю резонанса в вынужденных колебаниях и областям I, II, IV, III *а*, III *б* на фиг.1, *е*.

Фиг. 2, *а–з* соответствует случаю параметрического резонанса и областям I, II *а*, II *б*, III *а*, III *б*, IV, V, VI на фиг. 2, *и*.

На фиг. 3 представлены фазовые портреты модельной системы при резонансе третьего порядка. Фигура 3, *а–в* отвечают областям I, II *а*, II *б*, фиг. 3, *г–е* – участкам прямой $\mu = 0$ при $\nu < -1.89\ldots$, $-1.89\ldots < \nu < -9/8 \cdot 2^{2/3}$, $\nu > -9/8 \cdot 2^{2/3}$, фиг. 3, *ж–к* – областям III *а*, III *б*, IV, V (см. фиг. 3, *л*).

Фазовые портреты модельной системы при резонансе четвертого порядка, изображенные на фиг. 4, *а–е*, соответствуют областям I *а*, I *б*, участку $-1 \le \nu < 1$ прямой $\mu = 0$, областям II, III, IV на фиг. 4, *ж*.

4. Периодические движения. Вернемся теперь к рассмотрению полных систем (2.3) при $n = 1, \ldots, 4$. В окрестности каждого не совпадающего с началом координат положения равновесия $\theta = \theta_*$, $\rho = \rho_*$ модельной системы (исключаем из рассмотрения неустойчивые сложные особые точки на границах областей) полную систему при резонансе n-го порядка можно рассматривать как квазилинейную систему с возмущениями порядка ε^{s_n}, имеющими по τ период $T \sim \varepsilon^{4s_n}$ (см. разд. 2). Согласно теории периодических движений Пуанкаре [9], из каждого положения равновесия $\theta = \theta_*$, $\rho = \rho_*$ модельной системы рождается единственное, T-периодическое по τ, аналитическое по ε^{s_n} решение полной системы, имеющее вид

$$\theta = \tilde{\theta}(\tau) = \theta_* + O(\varepsilon^{s_n}), \quad \rho = \tilde{\rho}(\tau) = \rho_* + O(\varepsilon^{s_n})$$

В исходной системе ему соответствует решение, аналитическое по ε^{s_n}, $2\pi n$-периодическое по времени и имеющее вид

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{s_n}\sqrt{2k_n\rho_*}\sin\psi_n + O(\varepsilon^{s_n}), \quad p_x = \varepsilon^{s_n}\sqrt{2k_n\rho_*}\cos\psi_n + O(\varepsilon^{2s_n}) \\ \psi_n &= Nt/n + \sigma\theta_* + (1-\sigma)\pi/(2n) - \varphi_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Заметим, что из положений равновесия, отвечающих одним и тем же значениям ρ_* и разным (различающимся на $2\pi/n$, $n \ge 2$) значениям θ_*, рождаются решения вида (4.1), переходящие одно в другое при сдвиге по t на $2\pi, 4\pi, \ldots, 2(n-1)\pi$ и соответствующие одному и тому же движению исходной системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости этих решений. Периодические решения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия модельной системы, неустойчивы, что следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Вопрос об устойчивости периодических решений, рождающихся из устойчивых положений равновесия модельной системы, можно решить, проведя нормализацию полных гамильтонианов в окрестности этих решений. Положим в полном гамильтониане $\theta = \tilde{\theta}(\tau) + q$, $\rho = \tilde{\rho}(\tau) + p$ и затем при помощи канонического преобразования $q, p \to \tilde{q}, \tilde{p}$ приведем гамильтониан к нормальной форме до членов четвертого порядка включительно

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\omega_* + O(\varepsilon^{s_n})\right)(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) + \frac{1}{4}\left(c_* + O(\varepsilon^{s_n})\right)(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)^2 + O_5 \tag{4.2}$$

Коэффициенты $\omega_* + O(\varepsilon^{s_n})$ и $c_* + O(\varepsilon^{s_n})$ в членах второй и четвертой степеней в гамильтониане (4.2) – постоянные величины. Если коэффициент c_* отличен от нуля, то при достаточно малых значениях ε рассматриваемое периодическое решение устойчиво на основании теоремы Арнольда – Мозера [10].

Расчеты показывают, что условие этой теоремы нарушается (коэффициент c_* обращается в нуль) только в случаях резонанса в вынужденных колебаниях и резонанса четвертого порядка для значений параметров ν, μ, принадлежащих кривым, показанным на фиг. 1, *е* и фиг. 4, *ж* штрих-пунктирными линиями. На фиг. 1, *е* кривая из области I отвечает периодическому решению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия $\theta_* = 0$, $\rho = \rho_*$ (см. фиг. 1, *а*); две кривые из области II отвечают периодическому решению, рождающемуся из единственного в этой области устойчивого положения равновесия $\theta_* = \pi$, $\rho = \rho_*$ (см. фиг. 1, *б*). На фиг. 4, *ж* кривая из области I а соответствует периодическому движению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия при $\rho = \rho_1$ и $\cos 4\theta = 1$ (см. фиг. 4, *а*), а кривая из области III – периодическому движению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия при $\rho = \rho_4$ и $\cos 4\theta = -1$ (см. фиг. 4, *д*).

Вне указанных кривых для этих периодических решений, а также для всех возможных значений параметров остальных периодических решений, рождающихся из устойчивых положений равновесия модельной системы двух указанных и всех остальных резонансных случаев, соответствующий коэффициент c_* нормальной формы возмущенного гамильтониана сохраняет постоянный знак, и, следовательно, периодические решения устойчивы.

5. Приложение: сферический маятник с вибрирующей точкой подвеса. Рассмотрим движения сферического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания малой амплитуды по закону $\varepsilon l\cos\Omega t$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ относительно некоторой фиксированной точки пространства. Положение маятника будем описывать при помощи сферических координат θ, φ, соответствующие им импульсы обозначим через p_θ, p_φ.

Движения маятника описываются каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2ml^2}\left[(p_\theta - \varepsilon ml^2\Omega\sin\Omega t\sin\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] - mgl\cos\theta$$

Координата φ циклическая, поэтому $p_\varphi = \text{const}$. Положим

$$p_\varphi = ml^2\sin^2\theta_0\omega_0, \quad \theta_0 = \arccos(g/(\omega_0^2 l)), \quad \omega_0 = \text{const} > 0$$

Сделаем каноническую замену переменных

$$\theta = q, \quad p_\theta = ml^2\omega_0(p + \varepsilon\hat{\Omega}\sin\Omega t\sin q), \quad \hat{\Omega} = \Omega/\omega_0$$

и перейдем к безразмерному “времени” $\tau = \omega_0 t$. Гамильтониан приведенной системы с одной степенью свободы примет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{\sin^4\theta_0}{\sin^2 q}\right) - (\cos\theta_0 + \varepsilon\hat{\Omega}^2\cos\hat{\Omega}\tau)\cos q$$

Сделаем еще одну замену переменных $q, p \to u, \upsilon$ по формулам $u = \cos q$, $p = -\upsilon\sin q$ и запишем гамильтониан в алгебраической форме

$$H = H_0 + \varepsilon H_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(1-u^2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{(1-u_0^2)^3}{1-u^2} - u_0 u, \quad H_1 = -\hat{\Omega}^2\cos\hat{\Omega}\tau u, \quad u_0 = \cos\theta_0 \tag{5.1}$$

Система с невозмущенным гамильтонианом H_0 соответствует маятнику с неподвижной точкой подвеса. Она имеет единственное положение равновесия $u = u_0$, $\upsilon = 0$, которому отвечает коническое движение маятника, когда маятник отклонен от вертикали на угол θ_0 и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω_0.

Ранее [11] для случая вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса малой амплитуды исследованы высокочастотные колебания маятника вблизи его конического движения.

Положим в гамильтониане H_0

$$u = u_0 + \sqrt{\frac{1-u_0^2}{\omega}}\xi, \quad \upsilon = \sqrt{\frac{\omega}{1-u_0^2}}\eta, \quad \omega = \sqrt{1+3u_0^2}$$

Затем при помощи близкой к тождественной замены переменных $\xi = x + \ldots$, $\eta = p_x + \ldots$ преобразуем функцию H_0 к нормальной форме вида (1.2), где

$$c_2 = -\frac{3u_0^4 + 15u_0^2 - 2}{4(1+3u_0^2)^2}$$

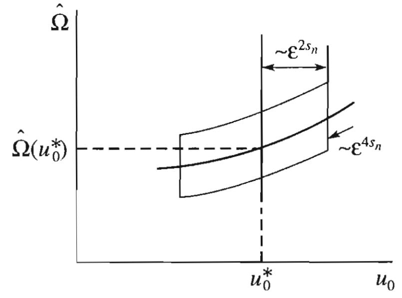
$$c_3 = \frac{40 + 1648u_0^2 + 5573u_0^4 + 37100u_0^6 + 52966u_0^8 + 34620u_0^{10} + 7317u_0^{12}}{48\omega^9(1-u_0^2)^2}$$

Коэффициент c_2 обращается в нуль в точке $u_0 = u_0^* = \sqrt{6\sqrt{249} - 90}/6 = 0.3605$, что соответствует отклонению маятника от вертикали на угол $\theta_0 = \theta_0^* = 68.895\ldots°$. Для этого значения u_0 имеем $c_3 = c_3^* = 2.791\ldots$.

Построим периодические движения маятника с вибрирующей точкой подвеса в окрестности его конического движения в невозмущенной задаче, считая, что $c_2 \sim 0$, а $\hat{\Omega} \sim n\omega$ ($n = 1, \ldots, 4$). При резонансе n-го порядка ($n = 1, \ldots, 4$) следует считать (см. разд. 2), что $c_2 \sim \varepsilon^{2s_n}$, а резонансная расстройка имеет порядок ε^{4s_n}. Условию $c_2 = 0$ и точному резонансу $\hat{\Omega} = \omega$ (при $n = 1$) или $\hat{\Omega} = n\lambda$ (при $n = 2, 3, 4$) отвечают в плоскости параметров u_0, $\hat{\Omega}$ задачи прямая $u_0 = u_0^*$ и часть кривой $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(u_0)$ при $u_0 \in (-1; 1)$, где $\hat{\Omega}(u_0) = \omega(u_0) = \sqrt{1+3u_0^2}$ при $n = 1$ или $\hat{\Omega}(u_0) = n\lambda(u_0)$ ($\lambda(u_0) = \omega(u_0) + O(\varepsilon^2)$) при $n = 2, 3, 4$. Рассмотрим окрестность точки (u_0^*, $\hat{\Omega}(u_0^*)$) их пересечения (фиг. 5), состоящую из точек, удаленных от прямой $u_0 = u_0^*$ на расстояние $\sim\varepsilon^{2s_n}$ и от кривой $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(u_0)$ на расстояние $\sim\varepsilon^{4s_n}$, и представляющую собой криволинейный четырехугольник. Для произвольной точки (u_0, $\hat{\Omega}$) этой окрестности в случае резонанса в вынужденных колебаниях ($n = 1$) положим в выражении (5.1) $u = u_0 + \tilde{u}$, $\upsilon = \tilde{\upsilon}$, в остальных резонансных случаях – $u = \hat{u}(\tau) + \tilde{u}$, $\upsilon = \tilde{\upsilon}(\tau) + \tilde{\upsilon}$, где

$$\hat{u}(\tau) = u_0 + \varepsilon\frac{(1-u_0^2)\hat{\Omega}^2}{\omega^2 - \hat{\Omega}^2}\cos\hat{\Omega}\tau + O(\varepsilon^2), \quad \hat{\upsilon}(\tau) = -\varepsilon\frac{\hat{\Omega}^3}{\omega^2 - \hat{\Omega}^2}\sin\hat{\Omega}\tau + O(\varepsilon^2) \tag{5.2}$$

Соотношения (5.2) описывают 2π-периодические по τ нерезонансные вынужденные колебания приведенной системы с гамильтонианом (5.1), рождающиеся при $\varepsilon \neq 0$ из положения равновесия $u = u_0$, $\upsilon = 0$ невозмущенной системы.



Фиг. 5

Проводя далее для каждого резонансного случая преобразования гамильтониана, аналогичные описанным в разд.2, получим гамильтониан в виде (2.1), где нужно положить $N = 1$, $t = \hat\Omega\,\tau$, $\lambda = \omega + O(\varepsilon^2)$, а также, как показывают расчеты, $\varphi_0 = \pi/2$, $\kappa_1 = 0.844\ldots$ (для случая резонанса в вынужденных колебаниях); $\varphi_0 = 0$, $\kappa_2 = 0.532\ldots$ (для случая параметрического резонанса); $\varphi_0 = -\pi/6$, $\kappa_3 = 0.141\ldots$ (для случая резонанса третьего порядка); $\varphi_0 = 0$, $\kappa_4 = 0.951\ldots$ (для случая резонанса четвертого порядка).

Введем параметры ν и μ и перейдем к рассмотрению системы с гамильтонианом (2.2) при $n = 1, 2, 3$ или 4. Из результатов разд. 2 следует, что координаты $(u_0, \hat\Omega)$ рассматриваемой точки связаны с параметрами ν и μ соответствующей модельной системы соотношениями вида (α_n, β_n, γ_n – постоянные)

$$u_0 = u_0^* + \varepsilon^{2s_n}\alpha_n\nu + \ldots, \quad \hat\Omega = \hat\Omega(u_0^*) + \varepsilon^{2s_n}\beta_n\nu + \varepsilon^{4s_n}\gamma_n\mu + \ldots \tag{5.3}$$

Формулы (5.3) задают преобразование плоскости параметров ν, μ модельной системы в изучаемую окрестность точки $(u_0^*, \hat\Omega(u_0^*))$ в плоскости параметров u_0, $\hat\Omega$. В результате такого преобразования области на фиг. 1, *е*, 2, *и*, 3, *л*, 4, *ж* перейдут в соответствующие области изучаемой окрестности, и при надлежащем выборе точки $(u_0, \hat\Omega)$ может быть реализован любой из описанных в разд. 3, 4 случаев.

Для заданной точки $(u_0, \hat\Omega)$ из соотношений (5.3) вычисляются значения параметров ν и μ и определяются положения равновесия $\rho = \rho_*$, $\theta = \theta_*$ модельной системы; затем строятся периодические движения системы с гамильтонианом (5.1) и делаются выводы об их устойчивости. Эти периодические движения имеют вид (см. разд. 4)

$$u(\tau) = \hat u_0 + \varepsilon^{s_n}\sqrt{2n(1-u_0^{*2})k_n\rho_*}\sin\left(\frac{\hat\Omega\tau}{n} + \theta_* - \varphi_0\right) + O(\varepsilon^{2s_n}) \tag{5.4}$$

где $\hat u_0 = u_0$ при $n = 1$, $\hat u_0 = \hat u(\tau)$ при $n = 2, 3, 4$, а величины k_n определены в разд. 2.

Соотношение (5.4) описывает изменение косинуса угла наклона маятника к вертикали; при этом угловая скорость вращения маятника вокруг вертикали задается соотношением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1-u_0^2}{1-u^2(\tau)} \tag{5.5}$$

Формулы (5.4), (5.5) определяют резонансные периодические движения маятника в окрестности его конического движения в случае вырождения невозмущенного гамильтониана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00386) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ – 1477.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 37–48.
2. *Маркеев А.П.* О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
3. *Маркеев А.П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 34–44.
4. *Холостова О.В.* О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 167–175.
5. *Холостова О.В.* Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космич. исследования. 1996. Т. 34. Вып. 3. С. 312–316.
6. *Маркеев А.П.* О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
7. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 556–565.
8. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 957–967.
9. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
10. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968 = *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
11. *Маркеев А.П.* О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.

Москва
e-mail: markeev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
18.XI.2004