

УДК 531.36:534.1

© 2006 г. Л. Д. Акуленко, В. Г. Байдулов, С. В. Нестеров

АВТОКОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Исследуется автоколебательная система третьего порядка в окрестности устойчивого локального интегрального многообразия. Приближенно с требуемой точностью построены периодическое многообразие и соответствующая ему система в переменных амплитуда – фаза. При помощи процедуры разделения переменных (усреднения) установлены условия существования, единственности и устойчивости автоколебательных режимов, рассмотрены критические случаи вырождения этих условий. В качестве примера взята термомеханическая модель самовозбуждения колебаний, присущая газодинамическим системам с тепловым источником. Во втором приближении исследована картина бифуркации автоколебаний в пространстве определяющих параметров системы.

Автоколебания систем с одной степенью свободы подробно изучены в ряде фундаментальных трудов теоретического (см. [1–5] и др.) и прикладного (см. [3, 5–8] и др.) характера. Основной математический аппарат их исследования – различные варианты метода малого параметра (теории возмущений) и качественные (топологические) методы фазовой плоскости. Задача заключается в определении условий существования, единственности и устойчивости предельных циклов, а также приближенное вычисление основных характеристик автоколебаний (амплитуды, частоты, формы предельных циклов и др.). В последнее время авторами [8, 9] реализован численно-аналитический метод ускоренной сходимости для эффективного построения периодических движений автоколебательных систем при малых и умеренно больших коэффициентах самовозбуждения.

Существенно меньше результатов получено для автоколебательных систем более высокого, чем второй, порядка. Отметим исследования квазилинейных автоколебаний двух связанных радиотехнических контуров второго порядка с помощью методов Ляпунова – Пуанкаре [3]. Для трехмерной модели К.Ф. Теодорчика [7] авторами [10] исследованы квазилинейные автоколебания резонатора Гельмгольца с термодинамическим механизмом самовозбуждения. При помощи асимптотических методов нелинейной механики построено локальное интегральное многообразие системы [11, 12]. Оно позволяет с требуемой степенью точности представить автоколебательную систему в стандартной форме для переменных амплитуда – фаза и применить метод усреднения [13, 14].

Автоколебательные системы третьего порядка имеют широкое распространение в природе и технике. Отметим следующие явления: гейзеры, звезды переменной яркости типа цефеид, автоколебания в химических и ядерных реакторах, “пение” пара в порах толстого слоя накипи, пульсации газа в камерах сгорания реактивных двигателей. Исследования таких систем как аналитические, так и численные представляют интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Существенное значение имеет решение и анализ этих задач при малых и умеренно больших коэффициентах самовозбуждения, приводящих к бифуркациям режимов автоколебаний.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерная нелинейная автоколебательная система, содержащая основную подсистему – квазилинейное звено второго порядка и одномерную подсистему самовозбуждения. Предполагается, что в безразмерных переменных уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon\vartheta + \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{\vartheta} + \kappa\vartheta = g(x, \dot{x}), \quad \kappa \geq \kappa_0 > 0 \quad (1.1)$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, характеризующий влияние переменной возбуждения $\varepsilon\vartheta$ и возмущений εf на основную переменную x . Для указанных ε параметр κ и функция g (совместно с f) определяют локальное интегральное многообразие системы (1.1), к которому она стремится при $t \rightarrow \infty$, где t – безразмерное время.

В традиционном случае системы с одной степенью свободы полагается $\vartheta = \kappa^{-1}g(x, \dot{x})$ и квазилинейные автоколебания описываются первым уравнением (1.1). Если $g = \kappa g^*$, $g^* \sim 1$, то $\vartheta \rightarrow g^*$ при $\kappa \rightarrow \infty$ согласно теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [15].

Для рассматриваемой общей ситуации ($\kappa \sim 1$) преобразуем систему (1.1) к стандартной форме [11–14]. Представим ее сначала в виде уравнения третьего порядка посредством дифференцирования по t первого уравнения (1.1) и исключения ϑ , $\dot{\vartheta}$, получим искомого соотношение

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \dot{x} + \kappa x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad F \equiv \kappa f + f'_x \dot{x} + f''_x \ddot{x} - g \quad (1.2)$$

Отметим, что оно квазилинейно, несмотря на существенную нелинейность системы (1.1). При $\varepsilon = 0$ характеристические показатели $\lambda_{1,2,3}$ уравнения (1.2) и его общее решение x_0 имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_3 = -\kappa; \quad x_0 = A_1 \cos t + A_2 \sin t + A_3 \exp(-\kappa t) \quad (1.3)$$

$A_{1,2,3}$ – произвольные постоянные. При $t \rightarrow \infty$ решение x_0 (1.3) стремится к 2π -периодической функции $x_* = a \sin \psi$, где a – амплитуда, $\psi = t + \psi_0$ – фаза; постоянные a , ψ_0 определяются через $A_{1,2}$ известным образом.

Для применения метода локальных интегральных многообразий [11, 12] совершим в уравнении (1.2) замену переменных (x, \dot{x}, \ddot{x}) на (a, ψ, z)

$$x = a \sin \psi + z, \quad \dot{x} = a \cos \psi - \kappa z, \quad \ddot{x} = -a \sin \psi + \kappa^2 z \quad (1.4)$$

Неизвестная z характеризует упомянутое выше локальное интегральное многообразие системы.

Дифференцируя выражения (1.4), в силу возмущенного уравнения (1.2) получим искомую систему стандартного вида [13, 14]

$$\dot{a} = \varepsilon A(a, \psi, z), \quad A = (\kappa \cos \psi - \sin \psi) F^*, \quad a \geq a_0 > 0$$

$$\dot{\psi} = 1 + \varepsilon \Psi(a, \psi, z), \quad \Psi = -a^{-1}(\kappa \sin \psi + \cos \psi) F^* \quad (1.5)$$

$$\dot{z} + \kappa z = \varepsilon Z(a, \psi, z), \quad Z = F^*, \quad F^* \equiv (1 + \kappa^2)^{-1} F$$

Функция F^* (1.5) получается в результате подстановки выражений (1.4) в функцию F из (1.2). Правые части уравнений оказываются 2π -периодическими по ψ и достаточно гладкими по a, z . Если выполняется условие $f = g = 0$ при $x = \dot{x} = 0$, что обычно имеет место в прикладных задачах, то функция Ψ (а также функции A, Z) будет регулярной для всех $a \geq 0$. В противном случае вместо переменных амплитуда – фаза (a, ψ) вводятся осциллирующие переменные типа Ван дер Поля (a, b) и совершается замена

$$x = a \sin t + b \cos t + z, \quad \dot{x} = a \cos t - b \sin t - \kappa z, \quad \ddot{x} = -a \sin t - b \cos t + \kappa^2 z \quad (1.6)$$

Для (a, b) получаются стандартные по Боголюбову уравнения. Преимущества этих уравнений – в отсутствии особенности при $a, b \rightarrow 0$, если $f, g \neq 0$ при $x = \dot{x} = 0$, недостаток – в увеличении порядка системы: правые части зависят от a, b, z и 2π -периодически от t .

Далее для системы (1.5) строится локальное интегральное многообразие, описываемое выражением $z(a, \psi, \epsilon)$ с требуемой степенью точности по ϵ . Оно подставляется в уравнения для переменных a, ψ , определяющих возможные автоколебания системы. Дальнейшие исследования проводятся традиционными асимптотическими или регулярными методами малого параметра [1, 3, 13, 14]. Метод усреднения позволяет существенно упростить построение приближенного предельного цикла в пространстве (x, \dot{x}, \ddot{x}) и провести анализ переходного процесса.

2. Построение локального интегрального многообразия. За относительно короткое время $\Delta t = \kappa^{-1} \ln(|z^0| \epsilon^{-1})$ система (1.5) приходит из произвольного $z(0) = z^0$ в ϵ -окрестность состояния $z = 0$ и совершает движения в окрестности многообразия $z = \epsilon h(a, \psi, \epsilon)$ [11–13]. Незвестная h – 2π -периодическая по ψ и регулярная по a, ϵ функция строится как решение уравнения в частных производных первого порядка, которые обозначаются штрихами с соответствующими индексами. Имеем

$$h'_{\psi} + \kappa h = H(a, \psi, [z]), \quad H = Z - \epsilon(h'_{\psi} \Psi + h'_a A), \quad z = \epsilon h \tag{2.1}$$

где A, Ψ, Z – функции неизвестной h и заданных ψ, a, ϵ в допустимой области их изменения. При достаточной гладкости по a этих функций неизвестная h может быть найдена с требуемой степенью точности по ϵ посредством асимптотического разложения

$$h = h_1(a, \psi) + \epsilon h_2(a, \psi) + \epsilon^2 h_3(a, \psi) + \dots \tag{2.2}$$

Коэффициенты $h_j (j = 1, 2, \dots)$ определяются как 2π -периодические решения последовательности неоднородных линейных уравнений, правые части которых вычисляются рекуррентно с помощью известных выражений h_1, h_2, \dots, h_{j-1} и соответствующих коэффициентов разложений функций A, Ψ, Z после подстановки выражения (2.2) в уравнение (2.1). В результате имеем уравнения, определяющие искомые h_j

$$h'_{j, \psi} + \kappa h_j = H_j^*(a, \psi), \quad H_1^* = Z(a, \psi, 0) \tag{2.3}$$

$$H_2^* = Z'_{z_0} - [Z_0 - \kappa h_1^*] \Psi_0 - h'_{1, a} A_0, \dots$$

Здесь и далее нулевой индекс означает, что значение функции берется при $z = 0$. Коэффициенты H_3^*, H_4^*, \dots вычисляются аналогично, на основе найденных $h_1^*, h_2^*, \dots, h_{j-1}^*$. Искомое 2π -периодическое решение $h_j^*(a, \psi)$ уравнения (2.3) может быть представлено в виде несобственного интеграла, либо тригонометрического ряда [11–13]

$$h_j^*(a, \psi) = \int_{-\infty}^{\psi} \exp[-\kappa(\psi - \varphi)] H_j^*(a, \varphi) d\varphi = \tag{2.4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + \kappa^2)^{-1} [(\kappa H_{jn}^{*c} - n H_{jn}^{*s}) \cos n\psi + (n H_{jn}^{*c} + \kappa H_{jn}^{*s}) \sin n\psi]$$

Если функция F оказывается полиномиальной по x, \dot{x} , то разложение функции H_j^* в тригонометрический ряд содержит конечное число $N = N(j)$ членов $H_{j, n}^{*c, s}$, которое возрастает при увеличении индекса j .

Наряду со стандартной процедурой разложения неизвестной переменной h по степеням ε (2.2) для отыскания периодического решения уравнения (2.1) может быть применена эквивалентная ей рекуррентная методика последовательных приближений

$$h_{(j)}^*(a, \psi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\psi} \exp[-\kappa(\psi - \varphi)] H_{(j)}^*(a, \varphi, \varepsilon) d\varphi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + \kappa^2)^{-1} [(\kappa H_{(j)n}^{*c} - n H_{(j)n}^{*s}) \cos n\psi + (n H_{(j)n}^{*c} + \kappa H_{(j)n}^{*s}) \sin n\psi] \quad (2.5)$$

$$H_{(1)}^* = H(a, \psi, 0), \dots, H_{(j)}^* = H(a, \psi, \varepsilon [h_{(j-1)}^*(a, \psi)]), \quad j = 1, 2, \dots$$

Здесь $H_{(j)n}^{*c, s}$ – коэффициенты Фурье функции $H_{(j)}^*$, которая строится на основе предыдущих приближений $h_{(1)}^*, h_{(2)}^*, \dots, h_{(j-1)}^*$ и является 2π -периодической по ψ . Отметим, что при построении решения в виде (2.2) – (2.5) порядок производных по переменной a функций A, Ψ, Z , т.е. исходной функции F (1.2) по переменным x, \dot{x} , возрастет. Разложение (2.2) или рекуррентная процедура (2.5), вообще говоря, расходятся при $j \rightarrow \infty$, а решение имеет асимптотический характер. Его точность по степеням малого параметра ε определяется степенью гладкости функций по переменной a .

После подстановки найденного выражения $z = \varepsilon h^*$ в уравнение для амплитуды a и фазы ψ (1.5) имеем стандартную систему вида

$$\dot{a} = \varepsilon A^*(a, \psi, \varepsilon), \quad A^*(a, \psi, \varepsilon) \equiv A(a, \psi, \varepsilon h^*)$$

$$\dot{\psi} = 1 + \varepsilon \Psi^*(a, \psi, \varepsilon), \quad \Psi^*(a, \psi, \varepsilon) \equiv \Psi(a, \psi, \varepsilon h^*) \quad (2.6)$$

Решения a, ψ, z уравнений (1.5) экспоненциально во времени стремятся к решениям $a^*, \psi^*, \varepsilon h^*$ системы (2.6) для одинаковых начальных данных [11]. Таким образом, задача об автоколебаниях исходной системы (1.) (или модифицированных систем (1.2), (1.5)) приведена к исследованию сравнительно простой автономной системы (2.6), допускающей применение стандартных аналитических и асимптотических методов малого параметра. Отметим, что аналитические методы Ляпунова – Пуанкаре [3] позволяют установить условия существования и устойчивости и дают конструктивную процедуру построения стационарного периодического решения уравнений (2.6). Кроме того, они применимы как к исходным уравнениям (1.1), так и к модифицированным (1.2), (1.5). Метод усреднения Крылова – Боголюбова [13, 14] позволяет упростить систему (2.6), разделить переменные a, ψ и определить стационарные точки для уравнения амплитуды, отвечающие автоколебаниям, а также исследовать переходные процессы.

3. Приближенное решение задачи об автоколебаниях. Применим к системе уравнений (2.6) асимптотическую процедуру разделения переменных a и ψ [13, 14]. Точнее, построим приближенную замену (a, ψ) на (α, φ) , такую, что правые части уравнений для “усредненных” амплитуды α и фазы φ не будут зависеть от быстрой переменной φ . Эти замена и уравнения строятся в виде асимптотических разложений по степеням ε^j ($j = 0, 1, 2, \dots$)

$$a = \alpha + \varepsilon u_1(\alpha, \varphi) + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^j u_j + \dots, \quad u_j(\alpha, \varphi + 2\pi) \equiv u_j(\alpha, \varphi)$$

$$\psi = \varphi + \varepsilon v_1(\alpha, \varphi) + \varepsilon^2 v_2 + \dots + \varepsilon^j v_j + \dots, \quad v_j(\alpha, \varphi + 2\pi) \equiv v_j(\alpha, \varphi) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon \Lambda_1(\alpha) + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots + \varepsilon^{j+1} \Lambda_{j+1} + \dots \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon \Phi_1(\alpha) + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots + \varepsilon^{j+1} \Phi_{j+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Неизвестные функции u_j, v_j совместно с $\Lambda_{j+1}, \Phi_{j+1}$ строятся рекуррентно после подстановки замены (3.1) в уравнения (2.6) и с учетом представлений (3.2) для $\dot{\alpha}, \dot{\varphi}$. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε^j позволяет последовательно найти $\Lambda_1, \Phi_2, \dots, \Lambda_{j+1}, \Phi_{j+1}$ как средние по φ соответствующих известных выражений, а также определить неизвестные $u_1, v_1, \dots, u_j, v_j$. В частности,

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\alpha) &= \langle A_1(\alpha, \varphi) \rangle, \quad \Phi_1(\alpha) = \langle \Psi_1(\alpha, \varphi) \rangle \\ u_1(\alpha, \varphi) &= \int_0^\varphi (A_1(\alpha, \varphi_1) - \langle A_1 \rangle) d\varphi_1, \quad v_1(\alpha, \varphi) = \int_0^\varphi (\Psi_1(\alpha, \varphi_1) - \langle \Psi_1 \rangle) d\varphi_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\alpha) &= \langle A'_{1\alpha} u_1 \rangle + \langle A'_{1\varphi} v_1 \rangle + \langle A_2 \rangle - \langle u'_{1\alpha} \rangle \Lambda_1 \\ \Phi_2(\alpha) &= \langle \Psi'_{1\alpha} u_1 \rangle + \langle \Psi'_{1\varphi} v_1 \rangle + \langle \Psi_2 \rangle - \langle v'_{1\alpha} \rangle \Lambda_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Угловые скобки означают усреднение по фазе φ . Функции A_j, Ψ_j получаются в результате подстановки $z = \varepsilon h^*$ в выражения для A^*, Ψ^* и разложения по степеням ε^j

$$\begin{aligned} A^*(a, \psi, \varepsilon h^*(a, \psi, \varepsilon)) &= A_1(a, \psi) + \varepsilon A_2 + \dots + \varepsilon^j A_{j+1} + \dots, \quad A_1 \equiv A^*(a, \psi, 0) \\ \Psi^*(a, \psi, \varepsilon h^*(a, \psi, \varepsilon)) &= \Psi_1(a, \psi) + \varepsilon \Psi_2 + \dots + \varepsilon^j \Psi_{j+1} + \dots, \quad \Psi_1 \equiv \Psi^*(a, \psi, 0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дальнейшие разложения функций A_j, Ψ_j (3.5) связаны с подстановкой a, ψ (3.1), которая имеет место в выражениях (3.4).

Функции $\Lambda_1(\alpha), \Phi_1(\alpha)$ определяют систему уравнений (3.2) первого приближения (слагаемые $O(\varepsilon^2)$ не учитываются). Они позволяют вычислить искомые неизвестные a, ψ с погрешностью $O(\varepsilon)$, а также $z = \varepsilon h$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ на отрезке $t_1 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$, где $t_1 \sim \ln(\varepsilon^{-1})$, для системы (1.5). В результате будут найдены переменные x, \dot{x}, \ddot{x} или ϑ . Для решения первого приближения построение функций u_1, v_1 излишне.

Решение второго приближения с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ на отрезке $2t_1 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ требует интегрирования уравнений (3.2) с учетом членов $\varepsilon^2 \Lambda_2, \varepsilon^2 \Phi_2$ (слагаемые $O(\varepsilon^3)$ отбрасываются). Оно также проводится стандартными методами: разделения переменных, разложениями по степеням ε , численными расчетами на коротком интервале медленного времени $\tau = \varepsilon t, \tau_1 \leq \tau \leq L$ и др. При этих построениях в слагаемые порядка ε^2 и в функции u_1, v_1 могут быть подставлены выражения первого приближения.

Для нахождения и исследования автоколебаний особый интерес представляет определение стационарных точек $\alpha_{(j)}^*$ уравнения (3.2) для α в j -м приближении по ε

$$\begin{aligned} P_{(j)}(\alpha, \varepsilon) &= \Lambda_1(\alpha) + \varepsilon \Lambda_2 + \dots + \varepsilon^j \Lambda_{j+1} = 0, \quad \alpha > 0 \\ \alpha_{(j)}^*(\varepsilon) &= \arg_{\alpha} P_{(j)}(\alpha, \varepsilon), \quad \alpha_{(j)}^* > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Простые достаточные условия существования, единственности и устойчивости автоколебаний для достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаются на основе анализа корней (3.6) первого приближения, т.е. при $\varepsilon = 0$

$$\alpha_{(1)}^* = \alpha_{(1)}^*(0) = \arg_{\alpha} \Lambda_1(\alpha), \quad \alpha > 0 \quad (3.7)$$

Предполагается, что искомый корень $\alpha_{(1)}^*$ (3.7) существует и является простым: $\Lambda_1'(\alpha^*) \neq 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (3.6) допускает ε -близкий $\alpha_{(1)}^*(\varepsilon)$ корень $\alpha_{(j)}^*(\varepsilon)$. Он может быть вычислен с требуемой степенью точности по ε разложениями или последовательными приближениями. Ему отвечают автоколебания исходной системы, для которой строятся предельные циклы в фазовом пространстве x, \dot{x}, \ddot{x} , например в виде проекций на плоскость (x, \dot{x}) и др. Периодическое решение, т.е. автоколебания, будет асимптотически орбитально устойчивым или устойчивым по Ляпунову, если $\Lambda_1'(\alpha^*) < 0$ и неустойчивым в случае противоположного неравенства. Уравнение (3.7) может допускать несколько простых корней; для каждого справедливы указанные выше выводы.

Ситуация, когда корень α^* является k -кратным, т.е. для него имеют место соотношения

$$\Lambda_1 = \Lambda_1' = \dots = \Lambda_1^{(k-1)} = 0, \quad \Lambda_1^{(k)}(\alpha^*) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

требует дополнительного исследования на основе методов теории неявных функций (теоремы Вейерштрасса [16]). В частности, если $k = 2$, то искомый двукратный корень $\alpha_{(j)}^*(\varepsilon)$ строится как функция ε в виде разложений по степеням $\delta = \varepsilon^{1/2}$

$$\alpha_{(j)}^*(\varepsilon) = \alpha^* + \delta\alpha_1 + \delta^2\alpha_2 + \dots \quad (3.9)$$

Стандартная процедура приводит к алгебраическим уравнениям, связывающим неизвестные коэффициенты α_m ($m = 1, 2, \dots$). Они могут быть последовательно разрешены при соответствующих достаточно очевидных (см. ниже) предположениях

$$\alpha_1^* = \pm(-2\Lambda_2/\Lambda_1'')^{1/2} \neq 0, \quad \alpha_2^* = (\Lambda_2\Lambda_1'''/3\Lambda_1'' - \Lambda_1')/\Lambda_1'', \dots \quad (3.10)$$

Выражения (3.10) свидетельствуют о расщеплении порождающего решения на величину $O(\sqrt{\varepsilon})$. Если известные условия нарушаются, то требуются дополнительные исследования. В общем случае k -кратного корня (3.8) разложения проводятся по степеням малых параметров δ_l [3, 16]

$$\alpha_{(j)}^*(\varepsilon) = \alpha^* + \delta_l\alpha_{l1} + \delta_l^2\alpha_{l2} + \dots, \quad \delta_l = \varepsilon^{1/k_l}, \quad \sum_{l=1}^{l^*} k_l \leq k \quad (3.11)$$

Целочисленные (различные) знаменатели k_l в соотношениях (3.11), где $1 \leq k_l \leq k$, $l = 1, 2, \dots, l^*$, определяющие дробные степени малого параметра, находятся стандартным образом [16]. При небольших значениях $k = 2, 3, \dots$ обычно в прикладных расчетах полагают $k_l = 1/2, 1/3, \dots$ и исследуют задачу совместности (разрешимости) уравнений для неизвестных $\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots$. При этом может иметь место аналогичная (3.10) неединственность решения ("расщепление").

Особый интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет ситуация, когда $\Lambda_1(\alpha) \equiv 0$. В этом случае определяющим уравнением является $\Lambda_2(\alpha) = 0$. Анализ условий существования, единственности и устойчивости автоколебаний проводится аналогично изложенному выше.

Отметим, что исследование вопросов существования, единственности, устойчивости и качественного поведения автоколебательной системы обычно проводится на основе системы первого приближения (3.2), в которой отброшены члены $O(\varepsilon^2)$. Основное уравнение (для α) введением медленного аргумента $\tau = \varepsilon t$ приводится к виду, не зависящему

от существенного параметра ε , определяющему величину самовозбуждения. Для прикладных задач, однако, может представлять интерес поведение системы при умеренно больших конкретных значениях ε , а не сколь угодно (асимптотически) малых. Тогда построенное решение применимо как начальное приближение в численно-аналитических процедурах продолжения по параметру [9]. Увеличение ε в задачах рассматриваемого класса часто приводит к бифуркациям автоколебаний.

Для предварительного локального исследования возможной эволюции режимов может оказаться полезным построение и анализ решения с учетом более высоких степеней ε , т.е. слагаемых $\varepsilon^2 \Lambda_2$, $\varepsilon^3 \Lambda_3$ и т.д. в разложениях (3.2) и изменение ε на расширенном интервале (порядка единицы). Заметим, что увеличение значений параметра ε и “выход” за пределы области, формально предписываемой методами асимптотической теории или регулярных разложений, имеет весьма условный характер наводящих соображений. Такой прием применен ниже при исследовании термомеханической автоколебательной системы на основе решения второго приближения асимптотических методов локальных интегральных многообразий и усреднения (см. выше).

4. Автоколебания в термомеханических системах (второе приближение). В качестве примера применения изложенной выше методики асимптотического анализа квазилинейных систем третьего порядка рассмотрим задачу о возникновении автоколебаний в термомеханических системах. Определяющее уравнение (1.2) в безразмерных переменных имеет вид

$$\ddot{\xi} + (\kappa + \varepsilon\sigma)\dot{\xi} + (1 + \varepsilon\sigma\kappa)\xi + (\kappa + \varepsilon)\xi - \varepsilon\xi^3 = 0, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{4.1}$$

В частности, к уравнению вида (4.1) сводится система, описывающая автоколебания резонатора Гельмгольца [7, 10]. Уравнению (4.1) соответствуют выражения $f = -\sigma\dot{\xi}$, $g = \xi - \xi^3$ системы (1.1).

Переход к системе уравнений в стандартной форме (1.5) проводится по формулам (1.4), в которых теперь $x = \xi$. В результате получаем выражения для правых частей системы (1.5)

$$\begin{aligned} A &= (\kappa \cos \psi - \sin \psi)Z(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) \\ \Psi &= -a^{-1}(\kappa \sin \psi + \cos \psi)Z(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}), \quad a > 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$Z \equiv (1 + \kappa^2)^{-1}(\xi^3 - \xi - \sigma\kappa\dot{\xi} - \sigma\ddot{\xi})$$

Переходя от функции z к функции h согласно соотношениям (2.1) и (2.2), можно одновременно найти выражения для первых двух членов разложения h в ряд теории возмущений. Тогда по рассчитанным выражениям для H_1^* и H_2^* первые два приближения для h находятся с помощью формул (2.5)

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{a}{4(\kappa^2 + 1)} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 + 1} [\kappa(3a^2 - 4)\sin \psi - (4\sigma(\kappa^2 + 1) + 3a^2 - 4)\cos \psi] + \right. \\ &\left. + \frac{a^2}{\kappa^2 + 9} [3\cos 3\psi - \kappa \sin 3\psi] \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$h_2 = \frac{a}{(\kappa^2 + 1)^4 (\kappa^2 + 9)} \left\{ h_{2,1}^s \sin \psi + h_{2,1}^c \cos \psi + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 9} [h_{2,3}^s \sin 3\psi + h_{2,3}^c \cos 3\psi] + \frac{(\kappa^2 + 1)^2}{\kappa^2 + 25} [h_{2,5}^s \sin 5\psi + h_{2,5}^c \cos 5\psi] \right\} \quad (4.4)$$

Коэффициенты тригонометрических многочленов для h_2 согласно соотношениям (2.2) и (2.4) имеют вид

$$h_{2,1}^s = \frac{1}{8} \{ 9(5\kappa^4 + 30\kappa^2 - 7)a^4 + (6(\kappa^2 + 1)(\kappa^4 + 18\kappa^2 - 15)\sigma - 72(\kappa^4 + 7\kappa^2 + 2))a^2 - \\ - 8(\kappa^2 + 9)((\kappa^4 - 1)\sigma - (3\kappa^2 - 1)) \}$$

$$h_{2,1}^c = \kappa \{ 9(\kappa^2 + 5)a^4 + (3(\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 17)\sigma - 3(5\kappa^2 + 29))a^2 + (\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 9)\sigma^2 - \\ - 4(\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 9)\sigma + 4(\kappa^2 + 9) \}$$

$$h_{2,3}^s = -\frac{1}{16} a^2 \{ 3(15\kappa^4 - 10\kappa^2 - 153)a^2 + 4[(\kappa^2 + 1)(\kappa^4 - 30\kappa^2 - 135)\sigma - \\ - 4(3\kappa^4 - 5\kappa^2 - 36)] \}$$

$$h_{2,3}^c = \frac{3}{2} \kappa a^2 \{ 3(3\kappa^2 + 11)a^2 + 2[(\kappa^4 + 4\kappa^2 + 3)\sigma - (5\kappa^2 + 17)] \}$$

$$h_{2,5}^s = \frac{9}{16} a^4 (\kappa^2 - 15), \quad h_{2,5}^c = -\frac{9}{2} \kappa a^4$$

Далее будут исследованы первое и второе приближения функций амплитуды и фазы, для анализа поведения которых достаточно знать выражение для h с точностью до первого порядка малости, т.е. с учетом выражения для h_1 (4.3).

В соответствии с системой (2.6) после определения h_1 от системы (1.5) переходим к анализу стандартной системы второго порядка с вращающейся фазой. Подставляя разложения амплитуды и фазы, а также их производных (3.1) и (3.2) в систему (2.6) и разделяя порядки теории возмущений и выполняя процедуру усреднения, последовательно получаем выражения для $\Lambda_{1,2}$ и $\Phi_{1,2}$:

$$\Lambda = \varepsilon \Lambda^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad \Lambda^{(2)} = \Lambda_1 + \varepsilon \Lambda_2 = -\frac{a_\lambda \alpha^4 + 2b_\lambda \alpha^2 + c_\lambda}{2(\kappa^2 + 1)^3} \alpha \quad (4.5)$$

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad \Phi^{(2)} = \Phi_1 + \varepsilon \Phi_2 = -\frac{a_\phi \alpha^4 + 2b_\phi \alpha^2 + c_\phi}{256(\kappa^2 + 1)^3 (\kappa^2 + 9)} \quad (4.6)$$

Коэффициенты $a_{\lambda,\phi}$, $b_{\lambda,\phi}$, $c_{\lambda,\phi}$ в выражениях для $\Lambda^{(2)}$ (4.5) и $\Phi^{(2)}$ (4.6), зависят от ε , κ и σ , они соответственно равны

$$a_\lambda = \frac{3 \varepsilon \kappa [(\kappa^2 + 13)^2 - 48]}{16(\kappa^2 + 9)}, \quad a_\phi = 3\varepsilon(17\kappa^6 + 259\kappa^4 + 851\kappa^2 - 159)$$

$$b_\lambda = \frac{3}{16}[2(\kappa^2 + 1)^2 - \epsilon\kappa(\kappa^2 + 13) + 4\epsilon\kappa\sigma(\kappa^2 + 1)], \quad b_\phi = 24(\kappa^2 + 9)(b_0\epsilon + b_1)$$

$$b_0 = (3\kappa^2 - 1)(\kappa^2 + 1)\sigma - (2\kappa^4 + 11\kappa^2 - 3), \quad b_1 = 2\kappa(\kappa^2 + 1)^2$$

$$c_\lambda = -[(\kappa^2 + 1)^2 - 2\epsilon\kappa - \sigma(\kappa^2 + 1)^3 + \epsilon\kappa\sigma(\kappa^2 + 1)], \quad c_\phi = 32(\kappa^2 + 9)(c_0\epsilon - c_1)$$

$$c_0 = (\kappa^2 + 1)^3\sigma^2 - 2(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 + 1)\sigma + (\kappa^4 + 6\kappa^2 - 3), \quad c_1 = 4\kappa(\kappa^2 + 1)^2$$

Сравнение выражений функций Φ и Λ , вычисленных с точностью до первого и второго порядка малости, показывает, что учет членов второго порядка приводит к изменению степени полиномиальной зависимости правых частей производной амплитуды с третьей на пятую, а фазы – со второй на четвертую. При этом оказывается, что коэффициенты при старших степенях α пропорциональны малому параметру ϵ . Поэтому использование аналитических процедур разложения по ϵ для исследования корней α уравнения

$$\Lambda^{(2)}(\alpha, \kappa, \sigma, \epsilon) = 0, \quad \alpha = \alpha^*(\kappa, \sigma, \epsilon) \tag{4.7}$$

т.е. анализа стационарных точек системы (2.6), дает возможность построения регулярных по ϵ корней уравнения (4.7). Применение методов теории возмущений в данном случае осложняется зависимостью коэффициентов полинома (4.5) от других параметров задачи, когда малость ϵ компенсируется другими параметрами. Поэтому анализ корней уравнения (4.7) был выполнен точно.

После построения и исследования корней функций $\alpha^*(\kappa, \sigma, \epsilon)$ (4.7) может быть определена стационарная добавка к усредненной частоте, т.е. функция

$$\Phi^{(2)}(\alpha^*(\kappa, \sigma, \epsilon), \kappa, \sigma, \epsilon) = \text{const} \tag{4.8}$$

В пространстве параметров κ, σ, ϵ может быть изучено поведение функции $\Phi^{(2)}$. Для приложений существенный интерес представляет знакоопределенность $\Phi^{(2)}$ (4.8), а также нахождение значений параметров, для которых $\Phi^{(2)} = 0$ или $\Phi^{(2)} \leq 0$.

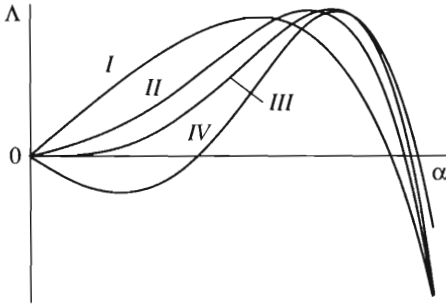
Проанализируем поведение системы (2.6) в более простом случае, когда диссипация σ отсутствует ($\sigma = 0$), и определим области существования автоколебаний. Для этого построим картины смены типов зависимости $\Lambda^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от α при изменении параметров ϵ и κ .

При $\sigma = 0$ параметры ϵ и κ группируются в функции $\Lambda^{(2)}$ таким образом, что картина становится “квазиодномерной” (т.е. зависит от параметра κ неявным образом) и может быть приведена к виду, представленному на фиг. 1. При этом границы режимов колебаний определяются параметрами $\epsilon_{\lambda, b}$ и $\epsilon_{\lambda, c}$, значения которых зависят от параметра κ :

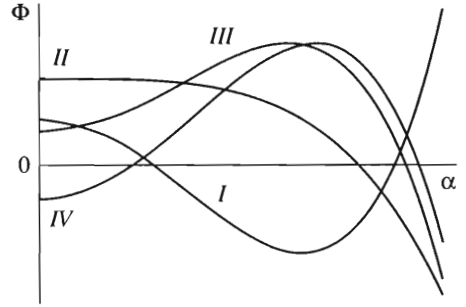
$$\epsilon_{\lambda, b} = \frac{2(\kappa^2 + 1)^2}{\kappa(\kappa^2 + 13)}, \quad \epsilon_{\lambda, c} = \frac{(\kappa^2 + 1)^2}{2\kappa}, \quad 0.54387 \leq \epsilon_{\lambda, c}^{(\min)} < 0.54389$$

Выполненный в соответствии с (4.7) анализ стационарных точек амплитуды колебаний показывает, что в интервале изменения ϵ от 0 до $\epsilon_{\lambda, b}$ единственной устойчивой точкой автоколебаний является точка с $\alpha = \alpha_{\lambda, 1}$, когда $\Lambda^{(2)}$ обращается в нуль – (кривая I).

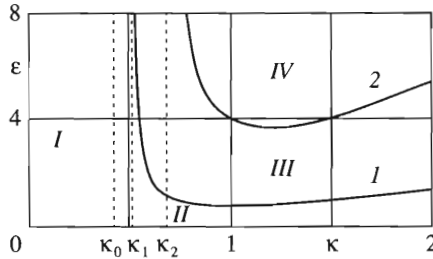
При переходе к следующему интервалу вплоть до точки $\epsilon_{\lambda, c}$ производная $\Lambda^{(2)}$ в нуле уменьшается, и положение равновесия становится слабо неустойчивым. В окрестности этой точки возможно существование колебательных режимов в течение ограниченного промежутка времени, после чего рост возмущений будет приводить к потере устойчивости (кривые II и III). Дальнейшее увеличение ϵ ($\epsilon > \epsilon_{\lambda, c}$) приводит к возникновению двух



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

устойчивых положений равновесия $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_{\lambda, 2}$, в окрестности которых возникают автоколебания, и появлению еще одной неустойчивой стационарной точки $\alpha = \alpha_{\lambda, 1}$ (кривая IV).

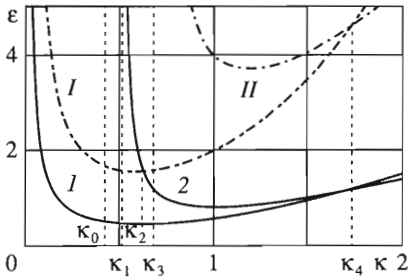
Чтобы выяснить характер изменения усредненной частоты колебаний, проанализируем картины качественного поведения функции $\Phi^{(2)}$, предварительно заметив, что в отличие от графиков для амплитуды качественная зависимость частоты колебаний является реально двумерной. На фиг. 2 изображены допустимые виды кривых четвертого порядка $\Phi^{(2)}(\alpha)$. Номерам кривых на фиг. 2 соответствуют области на фиг. 3, ограниченные кривыми $\epsilon_{\varphi, b}$ (кривая с номером 1) и $\epsilon_{\varphi, c}$ (кривая с номером 2). Видно, что границы областей смены режимов частоты колебаний определяются тремя значениями параметра κ и двумя кривыми $\epsilon_{\varphi, b}$ и $\epsilon_{\varphi, c}$, определяемыми по результатам анализа поведения биквадратичной функции $\Phi^{(2)}(\alpha)$, в форме

$$\epsilon_{\varphi, b} = \frac{2\kappa(\kappa^2 + 1)^2}{2\kappa^4 + 11\kappa^2 - 3}, \quad \epsilon_{\varphi, c} = \frac{4\kappa(\kappa^2 + 1)^2}{\kappa^4 + 6\kappa^2 - 3}$$

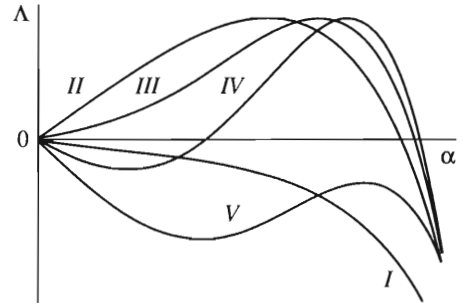
$$\kappa_0 = \arg(a_{\varphi}(\kappa)) \approx 0.42092, \quad \kappa_1 = \sqrt{\sqrt{145} - 11}/2 \approx 0.51029, \quad \kappa_2 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0.68125$$

Прямые $\kappa = \kappa_1$ и $\kappa = \kappa_2$ являются вертикальными асимптотами гипербол $\epsilon_{\varphi, b}$ и $\epsilon_{\varphi, c}$ соответственно.

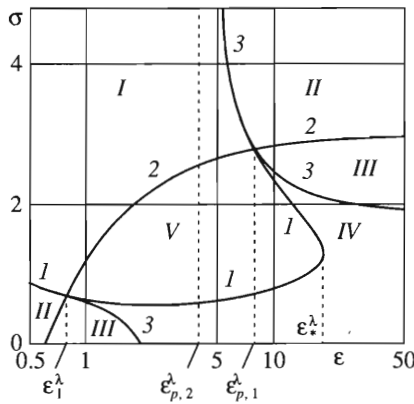
Сравнивая положение стационарных точек с положением нулей функции $\Phi^{(2)}$, определяем поправки к частоте колебаний по сравнению с невозмущенным состоянием. Для этого дополнительно нанесем границы областей с качественно различным поведением функций $\epsilon_{\varphi, b}$, $\epsilon_{\varphi, c}$, $\epsilon_{\lambda, b}$, $\epsilon_{\lambda, c}$ (кривые I, I, 2, II соответственно) на единую диаграмму



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

(фиг. 4). Точки пересечения граничных кривых обозначены κ_3 ($\kappa_3 = \sqrt{-7 + \sqrt{73}}/2 \approx 0.62128$) и κ_4 ($\kappa_4 = \sqrt{3}$).

Анализ показывает, что частота колебаний в окрестности второй устойчивой стационарной точки будет всегда уменьшаться: $\Phi_{\alpha_{\lambda_1}}^{(+)} < 0$ (верхний индекс плюс означает, что эта величина относится к устойчивой стационарной точке, плюс-минус – к слабо неустойчивой); в окрестности квазиустойчивого нуля возрастает: $\Phi_0^{(\pm)} > 0$ ($\epsilon_{\lambda, b}^{(0)} < \epsilon < \epsilon_{\lambda, c}^{(0)}$, $\kappa < \kappa_4$); наконец, при больших значениях $\epsilon > \epsilon_{\lambda, c}^{(0)}$ и $\kappa < \kappa_4$ нуль станет устойчивой точкой, а частота колебаний в его окрестности будет уменьшаться: $\Phi_0^{(+)} < 0$.

При учете диссипации σ выражения (4.5) и (4.6) приводят к существенному усложнению картин скоростей изменения амплитуд и фазы колебаний. Возникают режимы, которые отсутствовали в предыдущем случае. Картина изменения скоростей колебания становится “квазидвумерной” (границы режимов оказываются зависящими от параметра κ), а частоты – трехмерной. Результаты анализа картин скоростей амплитуд приведены на фиг. 5 и 6.

Границы режимов для картин скоростей амплитуд колебаний во втором приближении $\Lambda^{(2)}(\alpha)$ для $\sigma \neq 0$ определяются величинами

$$\sigma_j^\lambda = \frac{(y^2 + 21y + 72)y^2 + (y^2/2 + 6(y + 8) + (-1)^j \sqrt{(y^2 + 24y + 96)\Delta})\epsilon\kappa}{6y(y + 8)\epsilon\kappa}, \quad j = 1, 2$$

$$\sigma_p^\lambda = \frac{y^2 - 2\epsilon\kappa}{y(y^2 - \epsilon\kappa)}, \quad \sigma_y^\lambda = \frac{(y + 12)\epsilon\kappa - 2y^2}{4\epsilon\kappa y}, \quad \epsilon_{p,1}^\lambda = 2\epsilon_{p,2}^\lambda = \frac{(\kappa^2 + 1)^2}{\kappa}$$

$$\epsilon_1^\lambda = \frac{4y}{(y + 10 - \sqrt{y^2 + 12y + 68})\kappa}$$

$$\epsilon_*^\lambda = y^2 \frac{\sqrt{3}\sqrt{(y + 8)(3y^3 + 44y^2 + 108y + 96)} - y^2 - 6y - 48}{2(y^2 + 18y + 48)\kappa}$$

$$y = \kappa^2 + 1, \quad \Delta = \frac{1}{(\epsilon\kappa)^2} [(y^2 + 18y + 48)y^4 + (y^2 + 6y + 48)y^2\epsilon\kappa - 2(y + 6)y(\epsilon\kappa)^2]$$

Римскими цифрами на фиг. 5 обозначены допустимые виды зависимостей $\Lambda^{(2)}(\alpha)$, а на фиг. 6 – области значений параметров (σ, ϵ) им соответствующие. Границы режимов обозначены на фиг. 6 арабскими цифрами: двузначной кривой 1 соответствуют две одностепенные кривые $\sigma_{1,2}^\lambda$, кривой 2 – σ_y^λ и кривой 3 – σ_p^λ .

Дальнейшие исследования свидетельствуют, что в рассматриваемой автоколебательной системе третьего порядка (4.1) возможна бифуркация стационарных режимов при увеличении параметра самовозбуждения ϵ . Предварительные расчеты показали, что при $\epsilon \approx 1$, $\kappa \approx 0.5$, $\sigma = 0$ имеет место бифуркация в окрестности значения $\alpha \approx \alpha^* = \sqrt{4/3}$, отвечающего квазилинейным автоколебаниям [10]. Анализ режимов в широком диапазоне изменения параметра ϵ для разных значений κ и σ требует разработки высокоточного алгоритма построения периодических решений в сочетании с процедурой продолжения по параметрам [8–10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00043).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
3. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
4. Lefschetz S. Differential Equations: Geometric Theory. N.Y.; L: Interscience, 1957 = Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 388 с.
5. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin: Springer, 1958 = Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
6. Харкевич А.А. Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 171 с.
7. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 272 с.

8. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Автоколебания существенно нелинейной системы // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 42–48.
9. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Автоколебания осцилляторов Релея и Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах обратной связи // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 273–281.
10. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Аналитическое исследование квазилинейных автоколебаний резонатора Гельмгольца // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 6–15.
11. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
12. Акуленко Л.Д. Периодические движения автономных систем в окрестности устойчивого интегрального многообразия // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 26–35.
13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
14. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
15. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
16. Еругин Н.П. Неявные функции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1956. 59 с.

Москва
e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
28.VII.2005