УДК 531.36:534.1

© 2006 г. А. Л. Куницын, В. Н. Тхай

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

Исследуется устойчивость точки покоя системы Ляпунова [1], описывающей возмущенное движение динамической системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что характеристическое уравнение системы первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней, а квадратичная часть интеграла не является знакоопределенной. Рассматривается как нерезонансный случай, так и случаи резонансов низших порядков (второго, третьего и четвертого). В случаях, когда задача решается совокупностью первых нелинейных членов нормальной формы, даются необходимые и достаточные условия устойчивости.

От редакции. Профессору Андрею Леонидовичу Куницыну, известному специалисту в области теории устойчивости и небесной механики, 26 июля 2006 г. исполнилось 70 лет. Он родился в Саратове, где проживал до переезда в 1952 г. в Южно-Сахалинск. В 1954 г., окончив с золотой медалью среднюю школу, поступил в Московский авиационный институт (МАИ), после окончания которого работал в ОКБ В.Н. Челомея, где занимался расчетами траекторий спутников и космических аппаратов. В 1962 г. поступил в аспирантуру МАИ, где под руководством Г.В. Каменкова исследовал устойчивость нелинейных систем с приложениями в небесной механике и космодинамике; принимал активное участие в работе семинара по механике, возглавляемом В.В. Румянцевым. В 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1967 г. по 1977 г. работал на кафедре теоретической механики Московского инженерно-физического института, где читал курс теоретической механики, спецкурсы по небесной механике, теории устойчивости и теории нелинейных колебаний. Активно занимался научными исследованиями, в том числе со студентами, пятеро из которых вскоре после окончания института защитили кандидатские диссертации; двое из них (П.С. Красильников и В.Н. Тхай) впоследствии стали докторами наук. Он активно содействовал развитию науки и образования в Казахстане, подготовив 7 кандидатов наук, некоторые из них ныне заведуют кафедрами.

В.Л. Куницын внес существенный вклад в теорию устойчивости нелинейных резонансных систем. Результаты этих исследований с приложениями в небесной механике и космодинамике изложены в его докторской диссертации (1980 г.) и в монографии "Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем" (Алма-Ата, изд-во Гылым, 1990 г.), написанной в соавторстве с его учеником Л.Г. Ташимовым, и хорошо известны в нашей стране и за рубежом. Всего В.Л. Куницыным опубликовано около 100 научных работ, включая три монографии и несколько учебных пособий. Он продолжает активно заниматься научными исследованиями, работая на кафедре теоретической механики МАИ.

Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и ученики сердечно поздравляют А.Л. Куницына с юбилеем, желают ему крепкого здоровья и новых творческих успехов.

1. Постановка задачи. Вопрос об устойчивости положения равновесия или стационарного движения многих динамических систем сводится к задаче об устойчивости тривиального решения системы уравнений (точкой обозначено дифференцирование по времени)

$$x^{\cdot} = Px + X(x), \quad X(0) = 0, \quad x \in R^n \tag{1.1}$$

(P – постоянная матрица, $X(x)$ – аналитическая функция x), обладающей аналитическим интегралом

$$H \equiv H_2(x) + H_3(x) + \ldots = h = \text{const} \tag{1.2}$$

где $H_m(x)$ – формы m-го порядка, $m = 2, 3, \ldots$.

Если среди собственных значений матрицы P есть хотя бы одна пара чисто мнимых, то система (1.1) называется системой Ляпунова [1]. Частные случаи таких систем – консервативные или обобщенно-консервативные гамильтоновы системы.

Для указанных систем Ляпуновым [2] был разработан алгоритм построения периодических движений в окрестности точки покоя $x = 0$. Эти движения образуют однопараметрическое семейство, примыкающее к точке покоя. Показано [3], что в случае двух пар чисто мнимых корней появляются два семейства, из которых в резонансной ситуации одно может исчезнуть, в результате чего возникают резонансные движения. Было также показано [4], что в окрестности устойчивой точки покоя при знакоопределенном интеграле (1.2) в "почти" резонансной ситуации на каждом уровне $H(x) = h$ рождаются циклы. Вопрос об устойчивости самой точки покоя системы (1.1), когда форма H_2 интеграла (1.2) не является знакоопределенной (в противном случае интеграл (1.2) гарантирует устойчивость), до сих пор не изучен (исключение представляют гамильтоновы системы, устойчивости которых посвящено большое количество работ (см., например, обзор [5])). Исследованию этой задачи для динамической системы с двумя степенями свободы ($n = 4$) и посвящена настоящая работа.

Заметим прежде всего, что устойчивость тривиального решения системы (1.1), как и у гамильтоновых систем, возможна лишь в критическом случае, т.е. когда все собственные значения матрицы P или чисто мнимые, или нулевые. Действительно, как было показано [6], наличие в интеграле (1.2) квадратичной формы (что обязательно для рассматриваемого класса систем) всегда позволяет линейную часть системы (1.1) представить в гамильтоновом виде. Тогда в предположении отсутствия у матрицы P нулевых собственных значений в комплексно-сопряженных переменных z_s, $\bar{z}_s$ систему (1.1) можно записать как

$$z_s^{\cdot} = i\lambda_s z_s + \sum Z_s^{(m)}, \quad \bar{z}_s^{\cdot} = -i\lambda_s \bar{z}_s + \sum \bar{Z}_s^{(m)}; \quad s = 1, 2 \tag{1.3}$$

Здесь $Z_s^{(m)}$ и $\bar{Z}_s^{(m)}$ – комплексно-сопряженные формы m-го порядка (m = 2, 3, ...) комплексно-сопряженных переменных z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, а $\pm i\lambda_s$ – чисто мнимые собственные значения матрицы P. Известно [2, 7, 8], что вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1.3) существенно зависит от арифметических свойств величин λ_1, λ_2, а именно удовлетворяют они или нет одному из целочисленных соотношений

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1 = 2\lambda_2, \quad \lambda_1 = 3\lambda_2 \tag{1.4}$$

называемых условиями внутреннего резонанса соответственно второго, третьего и четвертого порядков [5, 7]. Именно в этих случаях резонанса задача устойчивости для системы (1.3) может решаться уже по формам второго порядка или по совокупности форм второго и третьего порядков ее правой части, в то время как резонансы более высокого порядка существенны лишь при высокой степени вырождения правых частей системы (1.3), и при отсутствии такового задача сводится к нерезонансному случаю [7].

2. Нерезонансный случай и случай резонанса третьего порядка. Рассмотрим вначале нерезонансный случай и случай резонанса третьего порядка как наиболее простые. Проводя нормализацию системы (1.3) согласно указанному ранее [7], в полярных координатах $r_s^{1/2}$, θ_s ($z_s = r_s^{1/2}\exp(i\theta_s)$, $\bar{z}_s = r_s^{1/2}\exp(-i\theta_s)$, получим следующую ее нормальную форму в нерезонансном случае с точностью до членов третьего порядка исходной системы включительно:

$$r_s^{\bullet} = 2r_s(A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2) + \ldots, \quad \theta_s^{\bullet} = \lambda_s + (B_{s1}r_1 + B_{s2}r_2) + \ldots; \quad s = 1, 2 \tag{2.1}$$

(A_{sj} и B_{sj} – действительные постоянные). Систему, получаемую из (2.1) отбрасыванием невыписанных членов, будем называть модельной (она получается из совокупности нелинейных членов системы (1.3) до третьего порядка включительно [7]).

Учитывая, что интеграл (1.2) в новых переменных принимает вид

$$r_1 - r_2 + \ldots = h \tag{2.2}$$

заключаем, что в системе (2.1) будет $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = A_{21} = A$. Кроме того, в уравнениях для r_s в их нормальной форме будут отсутствовать слагаемые вида $A_s^{(m)}r_s^m$ и для всякого $m > 2$.

Покажем, что при $A > 0$ тривиальное решение исходной системы (1.3) неустойчиво. В этом легко убедиться, рассмотрев поведение системы (2.1) на многообразии $h = 0$, где $r_1 = r_2 + \ldots$. Действительно, полагая $r_1 = r_2 = r$, для модельной системы, соответствующей (2.1), будем иметь

$$r^{\bullet} = 2Ar^2$$

и неустойчивость в полученной системе при $A > 0$ очевидна. Известно [7], что из такой неустойчивости (существование растущего решения) вытекает и неустойчивость тривиального решения исходной системы.

В случае $A < 0$ функция Ляпунова

$$V = r_1 + r_2$$

гарантирует устойчивость тривиального решения исходной системы. Действительно, для ее производной в силу системы (2.1) будем иметь

$$V^{\bullet} = 4r_1r_2[A + W(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)]$$

где $W(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ – 2-периодическая относительно θ_1, θ_2 функция, обращающаяся в нуль при $r_1 = r_2 = 0$. Таким образом, $V^{\bullet}$ – постоянно-отрицательная функция для полной системы (2.1), а значит, сама функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости тривиального решения системы (2.1), а следовательно, и исходной системы (1.1). В вырожденном случае $A = 0$ можно утверждать об устойчивости тривиального решения лишь модельной системы, соответствующей системе (2.1), поскольку в этом случае знакопостоянство производной $V^{\bullet}$ может нарушиться при учете членов более высокого порядка малости. Рассмотрение этого случая выходит за рамки поставленной задачи получения условий устойчивости по первым нелинейным членам. Отметим еще, что на многообразии $h = 0$, где $r_1 = r_2 + \ldots$, при $A < 0$ производная $V^{\bullet}$ становится знакоопределенной и противоположной по знаку V, и, следовательно, на основании теоремы Ляпунова тривиальное решение как системы (2.1), так и исходной системы (1.1) оказывается в этом случае асимптотически устойчивым – свойство принципиально невозможное в гамильтоновых системах. Таким образом, для нерезонансного случае справедлива следующая

Теорема 1. В нерезонансном случае тривиальное решение исходной системы (1.1) неустойчиво (устойчиво), если в ее нормальной форме (2.1) коэффициент $A > 0$ ($A < 0$); причем, если начальные возмущения удовлетворяют условию $h = 0$, устойчивость становится асимптотической. В вырожденном случае $A = 0$ вопрос об устойчивости исходной системы не решается рассмотрением только первых нелинейных (квадратичных и кубических) членов.

Рассмотрим теперь случай резонанса третьего порядка, когда $\lambda_1 = 2\lambda_2$. В этом случае нормальную форму системы (1.3) при учете интеграла (2.2) можно представить как (a,b – действительные постоянные)

$$\begin{gathered} r_1^{\bullet} = r_2^{\bullet} = 2RQ, \quad \theta^{\bullet} = R(r_1^{-1} + 2r_2^{-1})dQ/d\theta \\ R = r_1^{1/2} r_2, \quad Q = Q(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta, \quad \theta = \theta_1 + 2\theta_2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения системы (2.3) при отсутствии полного вырождения ее нормальной формы ($a^2 + b^2 \neq 0$) является наличие у нее знакоопределенного, линейного относительно r_1, r_2 интеграла [7]. Поскольку интеграл (2.2) – знакопеременный, то при $a^2 + b^2 \neq 0$ заключаем о неустойчивости тривиального решения системы (2.3), которая сохраняется и в исходной системе (1.1) [7].

В случае указанного вырождения, проводя дальнейшую нормализацию, придем к системе (2.1), и, таким образом, этот случай резонанса 3-го порядка полностью совпадает с нерезонансным случаем. На основании проведенного анализа можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Тривиальное решение системы (1.1) в случае резонанса третьего порядка ($\lambda_1 = 2\lambda_2$) либо неустойчиво (при отсутствии полного вырождения ее нормальной формы (2.3)), либо вопрос об устойчивости решается как в нерезонансном случае с помощью теоремы 1.

3. Случай резонанса четвертого порядка. Перейдем теперь к исследованию устойчивости тривиального решения системы (1.1) в случае резонанса четвертого порядка, когда $\lambda_1 = 3\lambda_2$. Заметим, что по сложности он принципиально отличается от рассмотренного выше резонанса третьего порядка: для систем общего вида невозможно получить критерий устойчивости в алгебраической форме даже для модельной системы [8, 9]. Однако для рассматриваемых систем Ляпунова задача решается практически полностью.

В этом случае, полагая

$$a\cos\theta + b\sin\theta = C\sin\psi, \quad \theta = \theta_1 + 3\theta_2, \quad C = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

нормальную форму системы (1.3) можно записать так:

$$\begin{gathered} r_1^{\bullet} = r_2^{\bullet} = 2(Ar_1r_2 + CR\sin\psi) + \ldots, \quad \psi^{\bullet} = B_1r_1 + B_2r_2 + \\ + CR(r_1^{-1} + 3r_2^{-1})\cos\psi + \ldots; \quad R = (r_1r_2^3)^{1/2} \end{gathered} \tag{3.1}$$

где A, B_1, B_2, C – действительные постоянные.

На многообразии $h = 0$, где $r_1 = r_2 + \ldots$, нормализованная часть системы принимает вид $(B = B_1 + B_2)$

$$r_1^{\bullet} = 2(A + C\sin\psi)r_1^2 + \ldots, \quad \psi^{\bullet} = (B + 4C\cos\psi)r_1 + \ldots \tag{3.2}$$

и совпадает с нормальной формой периодической системы второго порядка при одночастотном резонансе четвертого порядка, полностью исследованной [7] на основе известных результатов Г.В. Каменкова по критическому случаю двух нулевых корней [10]. Проведенный детальный анализ показал [7], что при выполнении неравенства

$$4C < |B| \tag{3.3}$$

устойчивость или неустойчивость тривиального решения системы (3.2) определяется знаком коэффициента A: при $A < 0$ – асимптотическая устойчивость, а при $A > 0$ – неустойчивость. Этот вывод остается справедливым и для тривиального решения исходной системы (1.1) при $h = 0$.

Рассмотрим теперь случай $A \leq 0$, когда $h \neq 0$. Замечая, что при $A = 0$ модельная система, соответствующая (3.1), становится обратимой, воспользуемся ранее развитым подходом [11, 12] и в случае $A \neq 0$. Для этого рассмотрим функцию [11]

$$V = (r_1 - r_2)^2 + V_1^2(r_1, r_2, \psi) \tag{3.4}$$

где

$$V_1 = B_1 r_1^2 + B_2 r_2^2 + 4CR\cos\psi$$

Пусть V_1^* – значение V_1 на многообразии $h = 0$. Тогда, очевидно, функция (3.4) будет знакоопределенной на этом многообразии, если

$$V_1^* \equiv (B + 4C\cos\psi)r_1^2 \neq 0, \quad B = B_1 + B_2$$

Отсюда получаем условие знакоопределенности функции (3.4) в виде неравенства (3.3). Для производной $V^{\bullet}$ в силу модельной системы, соответствующей (3.2), получим

$$V^{\bullet} = 8Ar_1 r_2 V_1^{*2} \tag{3.5}$$

Как видим, при $A < 0$ производная $V^{\bullet}$ – знакопостоянная отрицательная, а при $A = 0$ тождественно равна нулю. Таким образом, при выполнении неравенств (3.3) и $A \leq 0$ функция (3.4) удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости тривиального решения рассматриваемой модельной системы на многообразии $h = 0$.

Покажем, что при $A < 0$ производная (3.5) будет отрицательной и вблизи указанного многообразия, и следовательно, вывод об устойчивости остается справедливым и для любых возмущений , когда $h \neq 0$. Для этого рассмотрим область

$$G = \{r_1 r_2 \colon r_1 + r_2 \leq 2p, \ |h| \leq h_0\}$$

(p и h_0 – положительные числа). На границе области G , где $r_1 + r_2 = 2p$, $|h| \leq h_0$, имеем $2r_2 + h = 2p$. Значит, при малых h_0 производная V на этой границе близка к значению (3.5), т.е. остается отрицательной. Таким образом, неравенство $A \leq 0$ совместно с (3.3) остается условием устойчивости (не асимптотической) и при $h \neq 0$, но только для модельной системы, соответствующей (3.1).

Рассмотрим теперь случай, когда вместо неравенства (3.3) имеем

$$|B| \le 4C \tag{3.6}$$

Согласно полученным ранее результатам [7] необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3.2) в этом случае является неравенство

$$A < -(C^2 - B^2/4)^{1/2} \tag{3.7}$$

Тот же вывод остается справедливым и для исходной системы при $h = 0$. Заметим, что неравенство, противоположное (3.7), будет условием неустойчивости исходной системы и при $h \ne 0$.

Покажем, что условие (3.7) остается условием устойчивости (не асимптотической) тривиального решения модельной системы, соответствующей (3.1), и при $h \ne 0$. Для этого, исключая в системе (3.1) с помощью интеграла (2.2) переменную r_2, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} h^{\bullet} &= 0 \\ r_1^{\bullet} &= 2[Ar_1(r_1+h) + Cr_1^{1/2}(r_1+h)^{3/2}\sin\psi)] + \dots \\ \psi^{\bullet} &= B_1 r_1 + B_2(r_1+h) + CR[r_1^{-1} + 3(r_1+h)^{-1}]\cos\psi + \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

При $h = 0$ полученная система обращается в систему (3.2), тривиальное решение которой асимптотически устойчиво при одновременном выполнении условий (3.6) и (3.7), что вытекает из существования функции Ляпунова $V(r_1, \psi) > 0$ [10] со знакоопределенной производной $V^{\bullet}(r_1, \psi) < 0$. Рассматривая функцию $V_1 = h^2 + V$, для ее производной $V_1^{\bullet}(r_1, \psi, h)$ в силу системы (3.8) получим функцию, непрерывную относительно параметра h и при $h = 0$ обращающуюся в $V(r_1, \psi) < 0$. Но тогда для достаточно малых h функция $V_1^{\bullet}(r_1, \psi, h)$ также будет отрицательной, и, следовательно, все условия теоремы Ляпунова для системы (3.8) выполнены, а значит будет устойчивым и тривиальное решение $r_1 = r_2 = 0$ системы (3.1).

Таким образом, в случае резонанса четвертого порядка оказывается справедливой следующая

Теорема 3. При выполнении неравенства (3.3) для устойчивости тривиального решения модельной системы, соответствующей (3.1), необходимо и достаточно, чтобы $A \le 0$ (при $A < 0$ и $h = 0$ устойчивость становится асимптотической). При выполнении неравенства, противоположного (3.3), для устойчивости тривиального решения системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$A < -(C^2 - B^2)^{1/2}/4$$

(устойчивость становится асимптотической при $h = 0$). Условия неустойчивости и асимптотической устойчивости остаются справедливыми и для исходной системы (1.1).

4. Случай резонанса второго порядка. Перейдем к рассмотрению последнего случая резонанса, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Здесь так же, как и при резонансе четвертого порядка, для систем общего вида не существует критерия устойчивости в алгебраической форме, а можно только получить достаточные условия устойчивости или неустойчивости [13]. Однако для рассматриваемых систем Ляпунова задача решается практически полностью.

Нормальная форма системы (1.3) в этом случае будет такой:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1/2 &= R[r_1(Q_1+Q_2)+r_2Q_3+RQ_7]+r_1(A_{11}r_1+A_{12}r_2)+\ldots \\ \dot{r}_2/2 &= R[r_1Q_4+r_2(Q_5+Q_6)+RQ_8]+r_2(A_{21}r_1+A_{22}r_2)+\ldots \\ \dot{\theta} &= B_1r_1+B_2r_2+R(Q_5'-Q_1'-Q_2'-Q_6')+ \\ &+r_1(r_1/r_2)^{1/2}Q_4'+r_2(r_2/r_1)^{1/2}Q_3'+r_1Q_8'+r_2Q_7'+\ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь

$$R = (r_1, r_2)^{1/2}, \quad \theta = \theta_2-\theta_1$$

$$Q_i = Q_i(\theta) = a_i\cos\theta+b_i\sin\theta, \quad i = 1, \ldots, 6$$

$$Q_j = Q_j(\theta) = a_j\cos 2\theta+b_j\cos 2\theta, \quad j = 7, 8$$

a_s, b_s – постоянные, штрихом обозначено дифференцирование по θ.

Из существования интеграла (2.2) вытекает, что должно быть

$$Q_1+Q_2 = Q_4, \quad Q_6+Q_5 = Q_3, \quad Q_7 = Q_8$$

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad A_{12} = A_{21} = A$$

Хотя нормальная форма системы в этом случае существенно сложнее, чем во всех предыдущих случаях, структура ее принципиально не изменилась, что позволяет решить задачу устойчивости, не меняя изложенного выше подхода. Для этого опять рассмотрим поведение системы (4.1) на многообразии $h=0$, где $r_1 = r_2 + \ldots$ Тогда вместо (4.1) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1/2 &= \dot{r}_2/2 = [A+C_1\cos(\theta+\psi_1)+C_2\cos(2\theta+\psi_2)]r_1^2+\ldots \equiv P(\theta)r_1^2+\ldots \\ \dot{\theta} &= [B_1+B_2+C_3\cos(\theta+\psi_3)+C_4\cos(2\theta+\psi_4)]r_1+\ldots \equiv Q(\theta)r_1+\ldots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\psi_1, \ldots, \psi_4, C_1, \ldots, C_4$ – постоянные, известным образом выражающиеся через a_s, b_s.

Как видим, нормализованная часть системы (4.2) имеет принципиально ту же структуру, что и система (3.2), и, следовательно, для нее опять справедливы выводы [7], полученные на основе результатов Каменкова Г.В. [10]. Однако в связи с некоторым усложнением нормальной формы по сравнению со случаем резонанса четвертого порядка, здесь не представляется возможным получить условия устойчивости в аналитическом виде. Но для каждой конкретной системы их проверка вполне осуществима. Как и при резонансе четвертого порядка, следует различать два случая в зависимости от того, выполняется или нарушается неравенство

$$|B_1+B_2| > C_3+C_4 \tag{4.3}$$

Таким образом, в этом случае справедлива следующая

Теорема 4. Пусть для системы (4.2) выполняется неравенство (4.3). Тогда, если $A>0$, ее тривиальное решение (а также тривиальное решение исходной системы) неустойчиво, а при $A<0$ – асимптотически устойчиво. При нарушении неравенства (4.3) тривиальное решение системы (4.2) (а также тривиальное решение исходной системы) неустойчиво, если на всех решениях уравнения $Q(\theta)=0$ функция $P(\theta)$ положительна и асимптотически устойчиво, если она отрицательна (при этом тривиальное решение исходной системы будет устойчиво неасимптотически).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00391), Минобразования (102-14.0-1804) и комплексной программы РАН (19–1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. С. 491.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. 1956. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–256.
3. *Тхай В.Н.* Резонансные ляпуновские семейства периодических движений обратимых систем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 384–401.
4. *Тхай В.Н.* Цикл в системе, близкой к резонансной системе // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 254–272.
5. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
6. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 156. Вып. 6. С. 900–906.
7. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.
8. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 6. С. 1309–1311.
9. *Красильников П.С.* Об асимптотической устойчивости при резонансе 1:3 // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 23–29.
10. *Каменков Г.В.* Два равных нулю корня. Избр. тр. Т. 1. 1971. С. 39–84.
11. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40–48.
12. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
13. *Красильников П.С.* Об обобщенной схеме построения функций Ляпунова из первых интегралов // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 199–210.

Москва
e-mail: akunitsyn@mail.ru

Поступила в редакцию
10.VI.2005