

УДК 539.375

© 2006 г. В. М. Александров, Д. А. Пожарский

К ЗАДАЧАМ О РАЗРЕЗЕ В ТРЕХМЕРНОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

Вариационный метод Ритца применяется к задачам о трещине (разрезе) в срединной полуплоскости трехмерного упругого клина. Грани упругого клина либо свободных от напряжений (задача А), либо находятся в условиях скользящей или жесткой заделки (задачи Б и В соответственно). Трещина находится в раскрытом состоянии под действием заданной нормальной нагрузки. Каждая из задач сводится к операторному интегро-дифференциальному уравнению относительно скачка нормального перемещения в области трещины. Выбранный метод позволяет рассчитать коэффициент интенсивности напряжений при относительно близком расстоянии от ребра клина до области разреза. Проводится сравнение численного и асимптотического решений [1] для эллиптической трещины. Во второй части статьи изучается случай выхода разреза на ребро клина в одной точке, моделирующий клиновидную трещину, кончик которой достигает ребра клина, давая новую особую точку при решении краевых задач для уравнений упругого равновесия. Исследуется асимптотика нормальных перемещения и напряжения в окрестности кончика трещины. При этом уточняется метод [2, 3], связанный с нахождением спектра оператора. Выбранная новая система базисных функций позволяет выразить элементы бесконечномерной матрицы сходящимися рядами. Определяется асимптотика нормального напряжения вне клиновидного разреза, совпадающая с асимптотикой контактного давления в контактной задаче для упругого клина, вдвое меньшего угла раствора, когда область контакта дополняет указанную область разреза до грани клина.

Ранее [1] применялся регулярный асимптотический метод, эффективный при достаточном удалении трещины от ребра. Метод Ритца был использован [4] при решении аналогичной задачи о трещине в упругом слое. Полосовая трещина, выходящая на ребро клина, рассматривалась в [5] при помощи метода парных интегральных уравнений. Задача о трещине вблизи свободной границы упругого полупространства [6, 7] является частным случаем решаемой здесь задачи (угол клина равен 180°). Используемый во второй части статьи метод эффективен при любых углах раствора трещины и упругого клина и применялся ранее к контактным задачам при клиновидной области контакта [8, 9]. Регулярное асимптотическое решение для клиновидной трещины малого угла раствора в упругом клине показало [10] отсутствие осциллирующих членов, связанных с комплексными точками спектра. Исследовались особенности при выходе трещины на регулярную поверхность [11], а также особенности упругих напряжений в вершине полиэдра [12].

1. Метод Ритца для эллиптической трещины в клине. Постановка задач А, Б, В о разрезе в срединной полуплоскости клина при трех разных типах граничных условий на гранях клина дана ранее ([1], разд. 1). Эти задачи сводятся к интегро-дифференциальному уравнению ([1], уравнение (1.2)). Далее придерживаемся принятых ранее обозначений [1] с учетом двух опечаток: в формуле для $g_2(t)$ ([1], формула (1.4)) должно быть $\text{cth}\alpha t$ вместо $\text{cth}2\alpha t$; в формуле для $g_*(u)$ ([1], формула (1.10)) в числителе должно быть $2\cos 2\alpha$ вместо $\cos 2\alpha$.

Пусть область трещины – вытянутый вдоль ребра клина эллипс Ω :

$$(r-a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1, \quad b \geq c$$

Введем безразмерные величины по формулам ([1], формулы (2.1)), содержащим два основных геометрических параметра: $\lambda = a/b$ и $c' = c/b$ (штрихи далее опускаем). Для простоты положим, что к берегам разреза приложена постоянная нормальная нагрузка q . Тогда имеем ([1], уравнение (1.2)) следующее интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $f(r, z)$ раскрытия разреза:

$$-\Delta_{rz} \int_{\Omega} \frac{f(x, y)}{R} dx dy + \iint_{\Omega} f(x, y) F(x, y, r, z) dx dy = 2\pi q, \quad (r, z) \in \Omega \quad (1.1)$$

Здесь $R = ((r-x)^2 + (z-y)^2)^{1/2}$, функция $F(x, y, r, z)$ определена ранее (см. [1], формула (1.8) для задачи А или формула (1.11) для задач Б и В с заменой x на $x + \lambda$ и r на $r + \lambda$).

В предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ уравнение (1.1) имеет точное решение

$$f(r, z) = A \sqrt{s(r, z)}, \quad A = \frac{cq}{E(e)}, \quad e = \sqrt{1-c^2}, \quad s(r, z) = 1 - \frac{r^2}{c^2} - z^2 \quad (1.2)$$

соответствующее трещине в неограниченной упругой среде [5]; $E(e)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

В предположении $\lambda > c$ (разрез не выходит на ребро клина) для решения уравнения (1.1) используем вариационный метод Ритца. Исследуем минимум функционала

$$\mathcal{F}(f) = (f, \mathcal{B}f) - 4\pi(f, q)$$

где \mathcal{B} – оператор в левой части уравнения (1.1). Ищем решение в виде

$$f(r, z) = A \sqrt{s(r, z)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left[A_{mn} U_{2m} \left(\frac{r}{c} \right) + B_{mn} U_{2m+1} \left(\frac{r}{c} \right) \right] \cos(\pi n z) \quad (1.3)$$

где $U_m(x)$ – полиномы Чебышева второго рода.

Воспользуемся разложением ([13], формула 2.5.6.4 и [14], формула 2.16.14.1)

$$-\Delta_{rz} \frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u^2 + v^2} \cos(u(r-x)) \cos(v(z-y)) du dv \quad (1.4)$$

понимаемом в обобщенном смысле. Внося представление (1.4) в уравнение (1.1), на основе условий минимума функционала \mathcal{F} получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{mn}, B_{mn} ($m=0, 1, \dots, M; n=0, 1, \dots, N$). При этом следует заменить модифицированную функцию Бесселя ее интегральным представлением ([13], формула 2.4.18.4) и учесть значения интегралов ([13], формула 2.5.44.13 и [14], формула 2.12.4.6)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \cos Ax \cos By \sqrt{s(x, y)} dx dy &= 2\pi c F_0(cA, B) \\ F_0(s, t) &= \frac{\sin H - H \cos H}{H^3}, \quad H = \sqrt{s^2 + t^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega} U_{2m} \left(\frac{x}{c} \right) \cos Ax \cos By \sqrt{s(x, y)} dx dy = 2\pi c F_{2m}(cA, B)$$

$$\int_{\Omega} U_{2m+1} \left(\frac{x}{c} \right) \sin Ax \cos By \sqrt{s(x, y)} dx dy = 2\pi c F_{2m+1}(cA, B)$$

Два последних интеграла (1.5) вычисляются путем дифференцирования первой формулы (1.5) по A . Первые несколько функций $F_m(s, t)$ имеют вид

$$F_1(s, t) = 2s \frac{(3 - H^2) \sin H - 3H \cos H}{H^5} \tag{1.6}$$

$$F_2(s, t) = \frac{(12 - 5H^2) \sin H - (12H - H^3) \cos H}{H^5} - 4s^2 \frac{(15 - 6H^2) \sin H - (15H - H^3) \cos H}{H^7}$$

Указанная система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N A_{kl} P_{2k, l, 2m, n} + \frac{c^2}{\pi} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N (A_{kl} P_{2k, l, 2m, n}^1 + B_{kl} P_{2k+1, l, 2m, n}^2) = \pi E(e) F_{2m}(0, \pi n) \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N B_{kl} P_{2k+1, l, 2m+1, n} + \frac{c^2}{\pi} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N (-B_{kl} P_{2k, l, 2m, n}^1 + A_{kl} P_{2k, l, 2m+1, n}^2) = 0$$

где элементы, не зависящие от угла раствора клина 2α , т.е. соответствующие трещине в неограниченной среде и связанные с главной частью оператора в левой части уравнения (1.1), имеют вид

$$P_{\kappa, l, \mu, n} = \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty F_\kappa(u, \nu \pm \pi l) \sum_{\nu=0}^\infty F_\mu(u, \nu \pm \pi n) \sqrt{u^2 + c^2} \nu^2 du d\nu \tag{1.8}$$

$$\kappa = 2k, 2k + 1; \quad \mu = 2m, 2m + 1$$

Здесь и далее введено обозначение

$$\sum f(\pm a) = f(+a) + f(-a)$$

Остальные компоненты матрицы системы (1.7) во избежание громоздкости приведем при значении коэффициента Пуассона $\nu = 1/2$:

$$P_{\kappa, l, \mu, m}^1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 [W_j^{-1}(u) - \text{cth} \pi u] \text{sh} \pi u \cos us \cos ut \times \\ \times \int_{\beta \text{ch} r}^\infty \exp(-\lambda p_1) \sum F_\kappa(ic p_1, \beta \pm \pi l) dp_1 \int_{\beta \text{ch} s}^\infty \exp(-\lambda p_2) \sum F_\mu(ic p_2, \beta \pm \pi n) dp_2 du d\beta ds dt \\ P_{\kappa, l, \mu, n}^2 = iP_{\kappa, l, \mu, n}^1 \tag{1.9}$$

$$W_1(u) = \frac{\text{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha}{2(\text{sh}^2 \alpha u - u^2 \sin^2 \alpha)}, \quad W_2(u) = \frac{\text{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha}{\text{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha}$$

$$W_3(u) = \frac{\text{sh} 2\alpha u - u \sin 2\alpha}{\text{ch} 2\alpha u + u^2(1 - \cos 2\alpha) + 1}$$

Здесь $j = 1, 2, 3$ для задач А, Б и В соответственно.

В общем случае к элементам (1.9) следует добавить компоненты, порождаемые членами при $(1 - 2\nu)$ в ядрах, и учесть зависимость функции $W_3(u)$ от ν (см. [1], формулы (1.4), (1.8) и (1.11)).

Для элементов (1.9) выполняются условия симметрии

$$P_{\kappa, l, \mu, n}^1 = P_{\mu, n, \kappa, l}^1, \quad P_{\kappa, l, \mu, n}^2 = P_{\mu, n, \kappa, l}^2$$

которые обеспечивают симметрию матрицы системы уравнений (1.7) и являются следствием симметрии ядра уравнения (1.1).

На основе решения (1.3) получим формулу для отношения коэффициентов интенсивности нормальных напряжений (КИН) для рассматриваемого случая и для случая трещины в пространстве ($\lambda = \infty$)

$$\frac{K_I}{K_I^\infty} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [A_{mn} U_{2m}(\cos \psi) + B_{mn} U_{2m+1}(\cos \psi)] \cos(\pi n \sin \psi) \quad (1.10)$$

где ψ – угол между положительным направлением полуоси r и лучом, выходящим из начала координат по направлению к точке на контуре трещины, в которой вычисляется отношение (1.10).

Для тестирования метода Ритца используем полученное ранее [1] регулярное асимптотическое решение, эффективное при больших значениях λ (вдали от ребра клина). Запишем его в виде

$$f(r, z) = A \sqrt{s(r, z)} \left\{ 1 - \frac{A_* c^2}{2\lambda^3} \left[\frac{2}{3E(e)} - \frac{e^2 r}{\lambda D(e)} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right\} \quad (1.11)$$

$$D(e) = (2 - c^2)E(e) - c^2 K(e)$$

где $K(e)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Постоянная A_* при $\nu = 1/2$ вычисляется по формуле

$$A_* = \int_0^\infty u^2 [W_j^{-1}(u) \operatorname{th} \pi u - 1] du \quad (1.12)$$

На основе решения (1.11) отношение КИН (1.10) принимает вид

$$\frac{K_I}{K_I^\infty} = 1 - \frac{A_* c^2}{2\lambda^3} \left[\frac{2}{3E(e)} - \frac{e^2 c \cos \psi}{\lambda D(e)} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (1.13)$$

где угол ψ имеет тот же смысл, что и в (1.10). Далее обозначим $K_1 = K_I/K_I^\infty$ при $\psi = 0$,

$$K_2 = K_I/K_I^\infty \text{ при } \psi = \pi.$$

Для задачи А при $2\alpha = 180^\circ$ (полупространство), $\nu = c = 1/2$ (при этом постоянная $A_* = -0.4375$) приведем результаты тестирования метода Ритца: для раскрытия разреза в его центре $f_0 = f(0, 0)/q = 0.415$ (0.414) и для коэффициентов $K_1 = 1.010$ (1.003), $K_2 = 1.011$ (1.005). В скобках приведено асимптотическое решение; для значения $2\alpha = 180^\circ$ оно применимо при $\lambda > 1 + c$ [1].

Метод Ритца применим при $\lambda > c$ и дает приемлемые результаты при неострых углах 2α раствора клина. При $2\alpha \leq 90^\circ$ возникают трудности с точным вычислением интегралов по переменной u в формулах (1.9), поскольку

$$W_j^{-1}(u) - \operatorname{cth} \pi u = O(\exp(-2\alpha u)) \text{ при } u \rightarrow +\infty$$

Таблица 1

2α	λ	1.5		1.0		0.8		0.7	
	c	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
180°	f ₀	0.419	0.479	0.434	0.507	0.459	0.561	–	–
	K ₁	1.02	1.02	1.04	1.05	1.08	1.11	–	–
	K ₂	1.02	1.03	1.08	1.14	1.21	1.50	–	–
270°	f ₀	–	–	0.414	0.472	0.416	0.476	0.418	0.480
	K ₁	–	–	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
	K ₂	–	–	1.01	1.01	1.02	1.04	1.03	1.09

Метод Ритца особенно эффективен при углах 2α ≥ π, когда клин превращается в угловую зазубрину в упругом пространстве (V-образную выемку).

В табл. 1 даны значения f₀ и КИН для задачи А при ν = 1/2 и разных значениях 2α, λ и с. Трещина в первую очередь начнет распространяться в сторону ребра, поэтому всегда K₂ ≥ K₁. При приближении к ребру (λ уменьшается, с увеличивается) значение K₂ возрастает, если угол клина уменьшается. Раскрытие разреза f₀ также возрастает при приближении области разреза к ребру клина. Чем меньше угол клина и относительное расстояние от области Ω до ребра, тем опаснее трещина в смысле ее дальнейшего распространения.

2. Клиновидная трещина в клине. Известно [6], что нормальные напряжения вне клиновидного разреза с углом 2β в упругом пространстве в вершине этого разреза имеют ту же асимптотику, что и контактные напряжения в задаче о клиновидном штампе с углом 2π – 2β на упругом полупространстве. Аналогично связаны задачи о разрезе с углом 2β в срединной полуплоскости упругого клина с углом 2α и о действии штампа на грань упругого клина с углом α, когда область контакта в плане занимает всю эту грань за исключением клиновидного выреза с углом 2β (на фигуре эта область заштрихована).

Пусть область разреза Ω – клин с углом 2β (на фигуре не заштрихован); угол между отрицательной полуосью z и ближней стороной клиновидного разреза равен γ. В исходном интегро-дифференциальном уравнении ([1], уравнение (1.2)) перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad r = r_* \cos \varphi, \quad z = r_* \sin \varphi$$

$$\Delta_{rz} \rightarrow \Delta_{r_*\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad f(x, y) = f_*(\rho, \psi), \quad q(r, z) = q_*(r_*, \varphi) \quad (2.1)$$

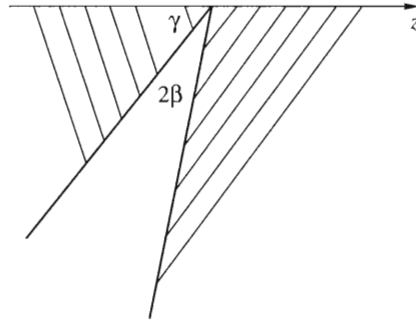
и будем искать его решение в форме интеграла Меллина

$$f_*(\rho, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_s^*(\psi) \rho^{-s-3/2} ds \quad (2.2)$$

где контур Γ следует выбирать из условия f_{*}(0, ψ) = 0. Используем значения известных интегралов ([14], формула 2.16.14.3 и [15], формула (1.7)) и введем обозначение

$$R_{\pm}^u(s, \varphi) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + iu\right) \left\{ \begin{matrix} \operatorname{cosec} \\ \operatorname{sec} \end{matrix} \right\} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s - iu\right) \right] [P_{s-1/2}^{-iu}(\sin \varphi) \pm P_{s-1/2}^{-iu}(-\sin \varphi)] \quad (2.3)$$

где Γ(z) – гамма-функция, P_s^{-iu}(x) – функция Лежандра, для вычисления которой удобно использовать ее представление ([16], формула 8.704) через гипергеометрическую функцию.



Если теперь правую часть рассматриваемого уравнения представить в форме

$$q_*(r_*, \varphi) \frac{1-\nu}{G} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} q_s^*(\varphi) r_*^{-s-5/2} ds \quad (2.4)$$

и ввести новые обозначения

$$\varphi = \beta x + \beta_*, \quad \psi = \beta \xi + \beta_*, \quad \beta_* = \beta + \gamma - \pi/2, \quad f_s^*(\psi) = f_s(\xi), \quad \beta q_s^*(\varphi) = q_s(x)$$

то приходим к одномерному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{d^2}{dx^2} + \beta^2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \int_{-1}^1 f_s(\xi) K_s(\beta(x-\xi)) d\xi + \\ & + \beta^2 \int_{-1}^1 f_s(\xi) F_s(\beta x + \beta_*, \beta \xi + \beta_*) d\xi = \pi q_s(x), \quad |x| \leq 1 \\ & K_s(t) = \frac{\pi}{2 \cos \pi s} P_{s-1/2}(-\cos t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} F_s(\varphi, \psi) = & \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{sh} \pi u \left\{ \frac{u^2 (W_j^{-1}(u) - \operatorname{cth} \pi u)}{\cos \varphi \cos \psi} \sum [R_{\pm}^u(-s, \psi) R_{\pm}^u(s+1, \varphi)] - \right. \\ & \left. - (1-2\nu) g_n(u) \sum [R_{\pm}^u(-s+1, \psi) R_{\pm}^u(s+2, \varphi)] + \tilde{F}_s(u, \varphi, \psi) \right\} du \end{aligned}$$

Для задачи А ($j=1, n=2$)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s(u, \varphi, \psi) = & \frac{u W_*(u)}{2 \cos \varphi \cos \psi \operatorname{ch}(\pi u/2)} \sum [\Phi_{\pm}(u) R_{\pm}^u(s+1, \varphi)] + \\ & + (1-2\nu) g_*(u) \int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u} \left\{ W_*(t) t \operatorname{sh} \pi t \sum [R_{\pm}^t(-s, \psi) R_{\pm}^t(s+2, \varphi)] - \right. \\ & \left. - W_2(t) \operatorname{sh} \frac{\pi t}{2} \sum [\Phi_{\pm}(t) R_{\pm}^t(s+2, \varphi)] \right\} dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем функции $\Phi_{\pm}(t)$ находятся из уравнений Фредгольма второго рода

$$\Phi_{\pm}(u) - (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L_2(u, y) \Phi_{\pm}(y) dy = X_{\pm}(u), \quad 0 \leq u < \infty \tag{2.7}$$

$$X_{\pm}(u) = 2(1 - 2\nu) \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi y g_*(y)}{\operatorname{ch} \pi u + \operatorname{ch} \pi y} R_{\pm}^y(-s + 1, \psi) dy -$$

$$- 2(1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L_2(u, y) y \operatorname{ch} \frac{\pi y W_*(y)}{2 W_2(y)} R_{\pm}^y(-s, \psi) dy$$

Для задач Б, В ($j = n = 2, 3$ соответственно) $\tilde{F}_s(u, \varphi, \psi) = 0$.

Показатель особенности функции $f_*(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$ связан с точками спектра оператора в левой части уравнения (2.5). Поллюсами s_k функции $f_s(\xi)$ будут те значения параметра s , при которых могут существовать нетривиальные решения соответствующего однородного уравнения, т.е. точки спектра оператора (2.5); при этом s_k не зависят от ξ .

Для нахождения s_k проводится дискретизация уравнения (2.5) по схеме метода Бубнова: решение ищется в виде разложения по системе базисных функций $v_m(\xi)$

$$f_s(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(s) v_m(\xi) \tag{2.8}$$

а для определения $t_m(s)$ невязка раскладывается по второму базису $\{u_l\}_{l=0}^{\infty}$; в результате относительно неизвестных возникает бесконечная система

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{lm} t_m = q_l, \quad l = 0, 1, \dots \tag{2.9}$$

где

$$a_{lm} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} + \beta^2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \int_{-1}^1 K_s(\beta(x - \xi)) v_m(\xi) d\xi \right\} w_l(x) dx +$$

$$+ \frac{\beta^2}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_s(\beta x + \beta_*, \beta \xi + \beta_*) v_m(\xi) w_l(x) d\xi dx \tag{2.10}$$

$$q_l = \int_{-1}^1 q_s(x) w_l(x) dx$$

Здесь $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ – система проекторов на базис $\{u_l\}_{l=0}^{\infty}$, т.е. $(u_l, w_k)|_{L_2} = \delta_{kl}$, где δ_{kl} – символ Кронекера.

Функция $f_s(\xi)$ при $\xi = \pm 1$ ведет себя как $(1 - \xi^2)^{1/2}$. Для регуляризации исходной некорректной задачи – уравнения (2.5) – необходимо учесть эту особенность в координатных функциях, поэтому в качестве базисных выберем функции (см. [16], формула 7.343)

$$v_m(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} U_m(\xi), \quad u_l(x) = 2U_l(x)$$

где $U_m(x)$ – полиномы Чебышева второго рода. В системе функций $u_l(x)$ особенность не вводится, так как правая часть и невязка – гладкие функции. В силу условия ортогональности полиномов Чебышева получим, что

$$w_k(x) = \sqrt{1 - x^2} U_k(x) / \pi$$

Используя разложение функции Лежандра вида [2]

$$\frac{1}{2\cos\pi s} P_{s-1/2}(-\cos(t-p)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(s) \exp(ik(t-p))$$

$$G_k(s) = \frac{\tilde{G}_k(s)\tilde{G}_k(-s)}{2\tilde{G}_s(s+1)\tilde{G}_k(-s+1)}, \quad \tilde{G}_k(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{|k|}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

а также получаемое при помощи известных формул ([16], формулы 7.355, 8.471, 8.941) значение интеграла

$$\int_{-1}^1 \exp(\pm iax) \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx = \pi \exp\left(\pm i\frac{\pi m}{2}\right) \frac{m+1}{a} J_{m+1}(a)$$

дважды дифференцируя по x под знаком интеграла в формуле (2.10) и делая в системе (2.9) замены

$$a_{lm}^* = \frac{a_{lm}}{(l+1)(m+1)}, \quad t_m^* = \frac{t_m}{m+1}, \quad f_l^* = \frac{f_l}{l+1}$$

для элементов $a_{lm}^* = a_{lm}^*(s)$ ($l, m = 0, 1, \dots$) получим

$$a_{lm}^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(s) \frac{n^2 - (s+1/2)^2}{\beta^2 n^2} J_{l+1}(\beta n) J_{m+1}(\beta n) \cos\left(\pi \frac{l-m}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 (l+1)(m+1)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_s(\beta x + \beta_*, \beta y + \beta_*) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} U_m(x) U_l(y) dx dy \quad (2.11)$$

Штрих у знака суммы означает, что первый член ($n = 0$) ряда берется с коэффициентом $1/2$.

Благодаря удачно подобранной системе базисных функций, ряд в формуле (2.11) сходится. Если при $s = s_k$ определитель бесконечномерной матрицы с элементами (2.11) обращается в нуль, то, как следует из выражения (2.2),

$$f_*(\rho, \psi) \sim \rho^{\gamma_*}, \quad 0 < \gamma_* < 1, \quad \gamma_* = -s_k - 3/2 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0$$

При этом нормальное напряжение вне разреза (контактное давление в задаче о штампе в дополнительной области для клина с углом α) согласно формуле (2.4), имеет асимптотику

$$q_*(\rho, \psi) \sim \rho^{\gamma_* - 1} \quad (\rho \rightarrow 0)$$

Таблица 2

Задача	2β	2α						
		45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
А	45°	0.048	0.83	0.90	0.95	0.92	0.93	0.94
	90°	0.96	0.97	0.75	0.81	0.78	0.79	0.79
	135°	0.94	0.72	0.66	0.65	0.65	0.65	0.64
Б	45°	0.90	0.88	0.90	0.96	0.93	0.93	0.94
	90°	0.77	0.74	0.75	0.81	0.78	0.78	0.80
	135°	0.67	0.66	0.65	0.64	0.64	0.65	0.64
В	45°	0.98	0.96	0.95	0.93	0.96	0.96	0.96
	90°	0.89	0.85	0.81	0.79	0.81	0.82	0.82
	135°	0.72	0.67	0.66	0.65	0.64	0.64	0.64

При $\beta > 0.1\pi$ и не слишком малых α достаточно урезать матрицу с элементами (2.11) до размерности 10–12, чтобы обеспечить две верные значащие цифры для нулей ее определителя на действительной оси.

Задача Б при $2\alpha = 360^\circ$, $F_s(\varphi, \psi) = 0$, соответствует трещине в упругом пространстве. Здесь получаем $\gamma_* = 0.500$ при $2\beta = 180^\circ$ [7], $\gamma_* = 0.815$ при $2\beta = 90^\circ$ [17]; при других углах трещины показатель γ_* соответствует особенности $\gamma_* - 1$ контактных давлений в кончике клиновидного штампа с углом $2\pi - 2\beta$ на упругом полупространстве [8, 9].

В табл. 2 даны значения γ_* для трех задач при $\beta_* = 0$ (ось симметрии разреза перпендикулярна ребру клина), $\nu = 0.3$ и разных углах трещины и упругого клина. Влияние граничных условий на гранях клина на искомые асимптотики падает с увеличением угла 2α раствора упругого клина. При малых углах трещины расчеты стыкуются с полученными ранее результатами [10]. Например, при $2\alpha = 270^\circ$, $2\beta = 0.4$, $\beta_* = 0$ для трех задач имеем $0.98 < \gamma_* \leq 0.99$, что соответствует полученному ранее графику ([10], рис. 2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00002, 04-01-00119).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожарский Д.А. Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 105–112.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
3. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 82–86.
4. Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1030–1038.
5. Пожарский Д.А. О пространственной задаче для упругого клина, имеющего полосовой разрез // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 148–153.
6. Nisitani A., Murakami Y. Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subject to tension // Int. J. Fract. 1974. V. 10. № 3. P. 353–368.
7. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 222 с.
8. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-Dimensional Contact Problems. Dordrecht etc.: Kluwer, 2001. 406 p.
9. Александров В.М., Пожарский Д.А. К задаче о клиновидном штампе на грани упругого клина // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 152–156.

10. Пожарский Д.А. О клиновидном разрезе в трехмерном упругом клине // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 3. С. 27–32.
11. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 146–150.
12. Glushkov E., Glushkova N., Lapina O. 3-D elastic stress singularity at polyhedral corner points // Int. J. Solids and Struct. 1999. V. 36. № 8. P. 1105–1128.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
15. Александров В.М., Бабешко В.А. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
17. Bazant Z.P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: A general numerical method // Int. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 3. P. 221–243.

Москва

Поступила в редакцию
7.X.2004