

УДК 539.375:534.1

© 2006 г. Г. П. Ежов, В. И. Кондауров

## О ВОЛНАХ РАЗРУШЕНИЯ В НАЧАЛЬНО-НАПРЯЖЕННОМ СЛОЕ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

В отличие от традиционного моделирования реакции высотных сооружений на динамические воздействия с помощью стандартных вычислительных пакетов, что сопряжено с принципиальными трудностями из-за большого числа конструктивных элементов и сложной геометрии соединений, предлагается альтернативное описание коллапса сооружения, которое рассматривается как сплошная хрупкая среда с высокой начальной пористостью. Для описания накопления рассеянного разрушения и коллапса сооружения используется энергетическая модель поврежденности хрупкого материала с начальной пористостью, позволяющая описать ряд качественных особенностей его поведения. Главная из этих особенностей – наличие пороговой деформации, при которой начинается накопление поврежденности, приводящей, в конечном счете, к возникновению реологической неустойчивости, характеризующей прочность пористой среды на растяжение, сдвиг и сжатие. Эти предельные состояния зависят как от параметров материала, так и от истории деформирования. Исследовано распространение волн напряжений, вызванных импульсной сжимающей нагрузкой, приложенной к верхней границе плоского слоя. Показано, что относительно слабое воздействие может трансформироваться в волну разрушения из-за начальных напряжений в материале, находящемся в поле тяжести. Установлено, что умеренные сжимающие воздействия приводят к сдвиговым разрушениям, а напряжения в зависимости от уровня воздействия могут как расти, так и уменьшаться в процессе распространения головной волны. Показано, что интенсивные воздействия приводят к объемному разрушению, которое из-за сильного затухания реализуется только на начальном этапе движения. Получено уравнение волны макроразрушения. Исследованы условия ее образования и зависимость времени задержки коллапса при динамическом воздействии. Показано, что увеличение модуля сдвига и коэффициента поглощения высвобождаемой энергии повышают стойкость сооружения. К этому же ведет уменьшение параметров пористой среды, характеризующих высвобождение энергии вследствие эволюции поврежденности. Выявлен новый эффект, связанный со слабой зависимостью волны макроразрушения от приложенного напряжения.

Динамическое воздействие даже небольшой интенсивности на высотное сооружение может приводить к его частичному повреждению или полному разрушению вследствие высвобождения потенциальной энергии [1]. Использование разностных схем и конечно-элементных методов расчета динамических процессов малоперспективно из-за накопления ошибки и потери аппроксимации в силу сложной геометрии соединений конструктивных элементов, число которых измеряется тысячами, и необходимости проведения расчетов на больших интервалах времени, на порядки превышающих время пробега акустической волны по отдельным конструктивным элементам.

Альтернативный подход к описанию разрушения высотного сооружения опирается на континуальные, осредненные модели, согласно которым сооружение рассматривается как сплошная хрупкая среда с начальной пористостью. Такой материал должен обладать рядом особенностей поведения. К ним, в первую очередь, относятся упругая реакция при малых напряжениях, накопление поврежденности при интенсивном растяжении, сдвиге и сжатии, высвобождение энергии при разрушении начально-напряженной среды, быстрый рост и локализация поврежденности в состояниях, близких к макроразрушению.

Для описания поведения материала с учетом указанных особенностей используется модель континуального разрушения [2, 3], основанная на концепции эффективной поверхностной энергии ансамбля микродефектов и скрытой энергии структурных изменений. Этот энергетический подход аналогичен подходу Гриффитса в механике изолированной трещины [4, 5]. Центральный пункт описания – учет локального баланса между упругой энергией деформированного тела и поверхностной энергией многочисленных микротрещин. Рассматривается изотропная среда, хотя более реалистичным был бы случай материала с ортотропной симметрией или трансверсальной изотропией.

Кинетика рассеянного разрушения опирается на предположение о пропорциональности скорости роста поврежденности производной полной энергии, равной сумме упругого потенциала и поверхностной энергии, по параметру поврежденности. Используемое кинетическое уравнение не только обеспечивает неотрицательность диссипации в любых процессах накопления поврежденности, но и позволяет естественным образом определить скалярную меру “динамической перегрузки” материала, применимую при любом трехосном напряженно-деформированном состоянии.

Как и в работах [6, 7], в качестве критерия прочности используется условие Адамара [8, 9] вещественности скоростей нестационарных характеристик динамических уравнений. Нарушение этого необходимого условия гиперболичности приводит к потере корректности краевых задач для рассматриваемой системы уравнений и означает невозможность описывать дальнейшее однородное деформирование материала в рамках изучаемой модели. Таким образом, это ограничение, налагаемое на допустимую деформацию и поврежденность, играет роль критерия прочности, который заведомо не может быть превышен. В отличие от традиционных критериев прочности типа ограничения максимального главного напряжения, энергии формоизменения и т.п. [10], используемый критерий непосредственно связан с деформационными свойствами среды.

**1. Основные соотношения.** При математическом моделировании сплошной среды, коэффициент пористости которой близок к единице, ограничимся для простоты приближением малых деформаций. Влиянием температуры пренебрежем. Среду будем считать однородной и изотропной.

Пусть  $\mathbf{u}$  – перемещение,  $\mathbf{e} = 1/2(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)$  – симметричный тензор малых деформаций,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  – скорость материальной частицы. Здесь и далее точка обозначает производную по времени,  $\nabla$  – градиент по пространственной переменной  $\mathbf{x}$ . В силу малости деформаций лагранжевы и эйлеровы переменные не различаются. Знак  $\otimes$  соответствует внешнему (тензорному) умножению [11].

Текущее состояние элемента среды определяется деформаций  $\mathbf{e}$  и скалярным параметром поврежденности  $\omega \geq 0$ . Реакция среды задается соотношениями

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega), \quad u = u(\mathbf{e}, \omega), \quad u_f = u_f(\omega) \quad (1.1)$$

которые определяют симметричный тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и упругий потенциал  $u$  как изотропные функции деформации и поврежденности. Плотность эффективной поверхностной энергии  $u_f$  считается функцией только поврежденности, так как  $\dot{u}_f = 0$  при  $\dot{\omega} = 0$ . Упругий потенциал и эффективная поверхностная энергия (1.1) задаются выражениями [2, 3]

$$\rho u(\mathbf{e}, \omega) = \frac{1}{2} K I_1^2(\mathbf{e}) + \mu J^2(\mathbf{e}) - \alpha_p (I_1) \omega I_1(\mathbf{e}) - \alpha_s \omega J(\mathbf{e}) \quad (1.2)$$

$$\rho u_f(\omega) = \rho u_f^0 + \gamma\omega + \frac{1}{2}\beta\omega^2 \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала,  $I_1(\mathbf{e}) = \mathbf{e} : \mathbf{I}$ ,  $J(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}' : \mathbf{e}')^{1/2}$ ,  $\mathbf{e}' = \dot{\mathbf{e}} - I_1 \mathbf{I}/3$  – девиатор тензора упругих деформаций. Материальные параметры  $K$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta$ ,  $u_f^0$ ,  $\gamma$  зависят от свойств скелета и начальной пористости.

Потенциал (1.2) представляет собой разложение скалярной изотропной функции  $\rho u(\mathbf{e}, \omega)$  в ряд Тейлора до членов второго порядка малости по деформациям и поврежденности. Первые два слагаемых правой части равенства (1.2) соответствуют изотропной линейно-упругой среде. Два последних слагаемых описывают изменение упругой энергии вследствие накопления поврежденности. Знак минус перед указанными членами связан с уменьшением энергии при увеличении  $\omega$ . Функция  $\alpha_p(I_1)$  – знакопеременная величина, отрицательная при сильном сжатии и положительная при растяжении и умеренном сжатии. Требование знакопеременности связано с тем, что упругая энергия должна уменьшаться при накоплении поврежденности, которая в среде с начальной пористостью может развиваться как при растяжении ( $I_1(\mathbf{e}) > 0$ ), так и при сжатии ( $I_1(\mathbf{e}) < 0$ ).

Простейший способ определения модулей  $K$  и  $\mu$ , которые зависят от начальной пористости, – использование модулей твердого скелета, умноженных на его объемную долю. Механика композитов [10] может дать более точное определение эффективной жесткости. Особенно привлекательным представляется метод асимптотических осреднений периодических структур [12, 13].

Законы сохранения для рассматриваемой среды представлены уравнениями

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T), \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega) + \rho \mathbf{g} \quad (1.4)$$

$$\rho \dot{u}(\mathbf{e}, \omega) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}} - \rho \dot{u}_f(\omega) - \delta \quad (1.5)$$

В уравнении (1.5) учтены распределенные стоки энергии: величина  $\rho \dot{u}_f(\omega)$  определяет затраты энергии, связанные непосредственно с ростом поврежденности  $\omega$ , величина  $\delta$  в изотермическом процессе равна отводимому теплу (диссипации), которое продуцируется при неупругом деформировании материала. Точка между векторами (тензорами) означает скалярное произведение, двоеточие – двойное скалярное произведение, такое что  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij}$ .

Кинетическое уравнение поврежденности принимается в виде

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau\beta} \left\langle -\frac{\partial \rho(u + u_f)}{\partial \omega} \right\rangle = \frac{1}{\tau\beta} \langle \alpha_p(I_1)I_1 + \alpha_s J - \gamma - \beta\omega \rangle \quad (1.6)$$

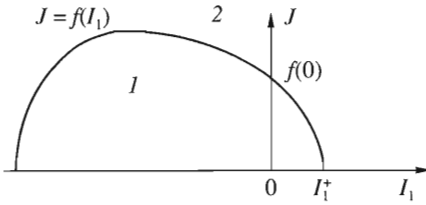
где  $\tau = \text{const} > 0$  – время релаксации напряжений вследствие роста поврежденности,  $\langle x \rangle = 1/2(x + |x|)$ . Соотношение (1.6) выражает собой предположение, что скорость накопления поврежденности существенным образом связана с балансом упругой и поверхностной энергии. Рост поврежденности происходит только в случае, когда скорость высвобождения энергии ( $\partial \rho u / \partial \omega < 0$ ) по абсолютной величине больше скорости ее поглощения ( $\partial \rho u_f / \partial \omega > 0$ ). Это приводит к неравенству

$$\alpha_p(I_1(\mathbf{e}))I_1(\mathbf{e}) + \alpha_s J(\mathbf{e}) - \gamma - \beta\omega > 0, \quad \omega \geq 0 \quad (1.7)$$

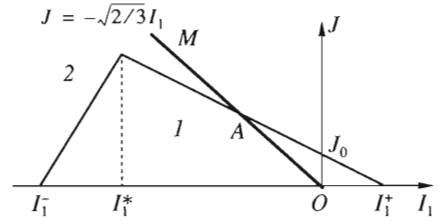
которое служит условием того, что процесс является активным, т.е.  $\dot{\omega} > 0$ . Если это условие не выполняется, поврежденность остается неизменной. Из уравнения (1.6) следует, что в любом процессе активного деформирования диссипация

$$\delta = -\frac{\partial \rho(u + u_f)}{\partial \omega} \dot{\omega} = \frac{1}{\tau\beta} \left[ \frac{\partial \rho(u(\mathbf{e}, \omega) + u_f(\omega))}{\partial \omega} \right]^2 \geq 0$$

Величина  $-\rho \dot{u}(\mathbf{e}, \omega)$ , равная скорости изменения суммы упругой и поверхностной энергий относительно приращения поврежденности, является естественной скалярной мерой “динамичес-



Фиг. 1



Фиг. 2

кой перегрузки" [14], которая применима для произвольного трехосного напряженно-деформированного состояния. Уравнение (1.6) позволяет единым образом описать качественные особенности рассеянного разрушения пористых сред, в частности, наличие пороговых значений деформаций, при которых начинается накопление поврежденности, возможность разрушения при растяжении, сдвиге и сжатии, отсутствие эволюции поврежденности при разгрузке ниже порогового значения. В медленном процессе ( $\dot{\omega} \rightarrow 0$ ) соотношение (1.6) приводит к модели с "мгновенной кинетикой" поврежденности [3], когда локальный баланс упругой и поверхностной энергии дает конечную связь поврежденности и текущей деформации

$$\omega = \beta^{-1} [\alpha_p(I_1(\mathbf{e}))I_1(\mathbf{e}) + \alpha_s J(\mathbf{e}) - \gamma]$$

При фиксированном значении поврежденности неравенство (1.7) приводит к разбиению полуплоскости ( $I_1, J \geq 0$ ) инвариантов тензора деформации на две области (фиг. 1). Полагая в условии (1.7)  $\omega = 0$ , приходим к кривой

$$J = f(I_1) = [\gamma - \alpha_p(I_1)I_1] / \alpha_s \quad (1.8)$$

которая ограничивает область 1 упругого неповрежденного материала. Эта кривая обладает сильной асимметрией относительно оси  $J$ , что связано с существенным различием прочностных свойств материала при растяжении и сжатии. Область 2 соответствует поврежденному материалу. Если граница  $J = f(I_1)$  известна, то из равенства (1.8) следует связь между функцией  $\alpha_p(I_1)$  и уравнением границы упругой области [3].

Далее используется представленная на фиг. 2 кусочно-линейная аппроксимация этой границы [2, 3]

$$J(I_1) = \begin{cases} J_0(1 - I_1/I_1^+), & I_1^* \leq I_1 \leq I_1^+ \\ J_1(1 - I_1/I_1^-), & I_1^- \leq I_1 \leq I_1^* \end{cases}, \quad J_1 \equiv J_0 \frac{1 - I_1^*/I_1^+}{1 - I_1^*/I_1^-}$$

Кусочно-линейная аппроксимация границы упругой области позволяет существенно упростить выкладки, сохраняя в то же время все качественные особенности поведения среды с начальной пористостью. В этом случае зависимость

$$\alpha_p(I_1) = \begin{cases} \alpha_p^+ \equiv \alpha_s J_0 / I_1^+ > 0, & I_1^* \leq I_1 \leq I_1^+ \\ \alpha_p^- \equiv \alpha_s J_1 / I_1^- < 0, & I_1^- \leq I_1 \leq I_1^* \end{cases}$$

является кусочно-постоянной знакопеременной функцией.

Из уравнения (1.5) следует, что тензор напряжений связан с упругим потенциалом соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial u(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e}} = (K I_1(\mathbf{e}) - \alpha_p(I_1)\omega) \mathbf{I} + \left( 2\mu - \frac{\alpha_s \omega}{J(\mathbf{e})} \right) \mathbf{e}' \quad (1.9)$$

Связь (1.9) напряжений с текущей деформацией и поврежденностью показывает, что касательные модули рассматриваемого материала могут уменьшаться при накоплении поврежденности вплоть до нуля. Это означает, что в пространстве деформаций допустимые состояния должны быть ограничены некоторой предельной поверхностью (критерием прочности).

**2. Характеристики и критерий прочности поврежденного материала.** Чтобы сформулировать критерий прочности для изучаемого материала, используем условие Адамара [8, 9], т.е. условие вещественности скоростей, с которыми распространяются нестационарные характеристики динамических уравнений. Нарушение необходимого условия гиперболичности динамической системы уравнений (1.4), (1.6) означает потерю корректности краевой задачи, вследствие чего дальнейшая однородная деформация материала не может быть реализована в рамках изучаемой модели. Так как эволюция поврежденности определяется кинетическим уравнением (1.6), то предельная поверхность зависит не только от текущих деформаций, но и от их истории. Причем этот критерий прочности непосредственно связан с механическими свойствами материала, определяемыми упругим потенциалом (1.2) и эффективной поверхностной энергией (1.3).

Динамика повреждающейся среды с начальной пористостью в активном процессе ( $\dot{\omega} > 0$ ) описывается системой уравнений (1.4), (1.6), (1.9). Пусть  $\mathbf{N} = \mathbf{e}'/J(\mathbf{e})$  – нормированный тензор деформаций,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{n}$  – скорость распространения и нормаль к поверхности слабого разрыва. Нестационарные характеристики ( $c \neq 0$ ) определяются уравнением

$$\det(\rho c^2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{e}, \omega, \mathbf{n}) = M\mathbf{I} + \Lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \xi \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (2.1)$$

$$\xi(\mathbf{e}, \omega) = \alpha_s \omega / J(\mathbf{e}), \quad M(\xi) = \mu - \xi/2, \quad \Lambda(\xi) = \lambda + \mu - \xi/6, \quad \mathbf{m} = \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}$$

Собственные числа акустического тензора  $\mathbf{A}$  определяются выражениями

$$\rho c_{1,2}^2(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{n}) = M + P \pm (P^2 - Q)^{1/2}, \quad \rho c_3^2(\mathbf{e}, \xi) = M \quad (2.2)$$

$$2P(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{n}) = \Lambda + \xi \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \lambda + \mu + \xi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2(\mathbf{e})\mathbf{n} - 1/6) \quad (2.3)$$

$$Q(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{n}) = \xi \Lambda(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2) = \xi \Lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n})^2)$$

Из соотношений (2.2), (2.3) можно видеть, что существует направление  $\mathbf{n}$  и значение  $\xi$ , для которых скорость нестационарных характеристик стремится к нулю. В этом случае положительно определенный акустический тензор  $\mathbf{A}$  вырождается. Будем говорить [6, 7], что состояние  $(\mathbf{e}^*, \xi^*)$  элемента материала является реологически неустойчивым, если существует направление  $\mathbf{n}_*(\mathbf{e}^*, \xi^*)$ , такое, что  $c(\mathbf{e}^*, \xi^*, \mathbf{n}_*) = 0$ .

Реологическая неустойчивость может сопровождаться образованием поверхностей локализации деформации с определенной ориентацией  $\mathbf{n}_*(\mathbf{e}^*(\mathbf{x}, t), \omega^*(\mathbf{x}, t))$  этих элементов. Действительно, вектор скачка нормальной производной массовой скорости  $\mathbf{V} = [\partial v / \partial n]$ , который определяется уравнением  $(\rho c^2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V} = 0$ , при  $c \rightarrow 0$  может быть отличен от нуля. Тогда из первого уравнения системы (1.4) следует, что при  $\mathbf{V} \neq 0$  скачок нормальной производной тензора деформации  $\mathbf{E} = [\partial \mathbf{e} / \partial n]$  при  $c \rightarrow 0$  неограниченно увеличивается. Это означает, что слабый разрыв становится сильным разрывом, на поверхности которого скорость непрерывна, но деформация терпит разрыв. Поверхность такого разрыва является поверхностью локализации деформации.

Из соотношений (2.2) следует, что вырождение по скорости  $\rho c_3^2(\mathbf{e}, \omega)$  происходит в состояниях

$$\xi^* = 2\mu \quad (2.4)$$

Ориентация таких поверхностей локализации деформации произвольна.

Экстремум скорости  $\rho c_2^2(\mathbf{e}, \xi, \mathbf{n})$  определяется уравнением

$$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{V} \equiv (\Lambda + M - \rho c_2^2) \mathbf{N}^2(\mathbf{e}) - 2\Lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N}(\mathbf{e}) \quad (2.5)$$

Видно, что  $\mathbf{n}$  – собственный вектор симметричного тензора  $\mathbf{V}$ , представляющего собой квадратичный полином симметричного тензора  $\mathbf{N}(\mathbf{e})$  с коэффициентами, зависящими от параметра  $\xi$  и инвариантов  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{e})\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^2(\mathbf{e})\mathbf{n}$ . Поэтому собственные векторы тензора  $\mathbf{N}$  являются собственными векторами тензора  $\mathbf{V}$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Можно показать, что при  $c_2 = 0$  система (2.5) имеет следующие решения:

1) нормаль  $\mathbf{n}$  совпадает с одним из собственных векторов тензора  $\mathbf{N}(\mathbf{e})$ ; потеря реологической устойчивости материала происходит при  $\xi^* = 2\mu$ , поверхности локализации деформации ориентированы перпендикулярно главным осям тензора  $\mathbf{N}(\mathbf{e})$ ;

2) если два собственных числа тензора  $\mathbf{V}$  совпадают (для определенности  $B_1 = B_2$ ), то реологическая неустойчивость возникает при  $\xi^* > 2\mu$ , где  $\xi^*$  – корень уравнения

$$\begin{aligned} M + P - (P^2 - Q)^{1/2} &= 0 \\ 2P &= \Lambda + \xi^*(N_1^2 n_1^2 + N_2^2 n_2^2), \quad Q = \xi^* \Lambda (N_1 - N_2)^2 n_1^2 n_2^2 > 0 \\ M(\xi^*) &= \mu - 1/2 \xi^*, \quad \Lambda(\xi^*) = \lambda + \mu - 1/6 \xi^* \end{aligned} \quad (2.6)$$

а плоскости разрыва проходят через одну из главных осей тензора  $\mathbf{N}(\mathbf{e})$  и делят угол между двумя другими главными осями в соответствии с формулами (для любой круговой перестановки 1, 2, 3):

$$2n_1^2 = (1 - M\Lambda^{-1}N_3/(N_1 - N_2)), \quad n_2^2 = 1 - n_1^2, \quad n_3 = 0 \quad (2.7)$$

3) если тензор  $\mathbf{V}$  – шаровой, что возможно только для одноосной деформации (для любой круговой перестановки 1, 2, 3)

$$\mathbf{e} = e(t)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}(\mathbf{e}) = \kappa \sqrt{2/3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \kappa(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)/\sqrt{6}, \quad \kappa = \text{sign}e(t)$$

то экстремальная нормаль совпадает с нормалью к поверхности кругового конуса с осью  $\mathbf{e}_1$ . Угол  $\Psi$  полураствора этого конуса определяется выражением

$$n_1^2 \equiv \sin^2 \Psi = 1/2(1 + 1/3M\Lambda^{-1}), \quad n_2^2 + n_3^2 = 1 - n_1^2 \quad (2.8)$$

Значение параметра  $\xi^* > 2\mu$  определяется уравнением (2.6) для нормали (2.8).

Будем считать, что первой в процессе нагружения реализуется форма реологической неустойчивости, которая соответствует наименьшему значению момента времени  $t_*$ , когда величина  $\xi(\mathbf{e}(t_*), \omega(t_*))$  на заданной траектории деформирования становится равной критическому значению  $\xi^*$ . В этот момент времени одна из скоростей звука обращается в нуль, тогда  $t_* = \min t^{(i)}$ , где значения  $t^{(i)}$  определяются уравнением

$$\alpha_s \hat{\omega}[\mathbf{e}(s), t^{(i)}]_{s=0}^{s=t^{(i)}} = \xi^* J(\mathbf{e}(t^{(i)})) \quad (2.9)$$

где  $\hat{\omega}$  – параметрически зависящее от  $t$  решение кинетического уравнения (1.6) с нулевыми начальными данными, а параметр  $\xi^*$  равен либо  $2\mu$ , либо корню уравнения (2.6).

**3. Головная волна напряжений.** Рассмотрим теперь распространение волны, вызванной нормальным напряжением сжатия  $\sigma_0 = -p_0 H(t)$ ,  $p_0 = \text{const} > 0$ , приложенным к верхней границе  $x^1 = 0$  начально-напряженному слою  $0 \leq x^1 \leq h$  высокопористого материала. Здесь  $H(t)$  – функция Хевисайда. ось  $x^1 \equiv x$  декартовых координат  $x^k$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) направлена по нормали к границе, а оси  $x^2, x^3$  принадлежат

границе  $x^1 = 0$ . Поврежденность и массовая скорость равны нулю в начальном равновесном состоянии, деформация и напряжение имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^0 &= e^0 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma_{11}^0 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^0 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ \sigma_{11}^0(x) &= -\rho g x, \quad \sigma_{22}^0(x) = -\lambda g x / \Lambda_0, \quad e^0(x) = -g x / \Lambda_0; \quad \Lambda_0 = \lambda + 2\mu \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, направленное вдоль оси  $x$ ,  $\lambda, \mu$  – упругие модули пористого материала, причем параметры материала и ускорение свободного падения удовлетворяют неравенству

$$g h / \Lambda_0 < \gamma / |\alpha_p^+ + \alpha_s \sqrt{2/3}|$$

которое означает отсутствие поврежденности в начальном состоянии. В процессе нагружения тензор деформации остается тензором одноосного сжатия  $\mathbf{e} = e(x, t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ ,  $e < 0$ . Инварианты и девиатор деформации определены формулами

$$I_1(\mathbf{e}) = e, \quad J(\mathbf{e}) = -\sqrt{2/3} e, \quad \mathbf{e}' = e(2/3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 1/3 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3))$$

На полуплоскости  $(I_1, J)$  такой деформации соответствует прямая линия  $OAM$ , для которой  $J = -\sqrt{2/3} I_1$  (фиг. 2). В зависимости от значений параметров материала реализуется один из двух возможных режимов деформирования и разрушения материала. В первом случае, когда прямая  $OAM$  пересекает правую часть границы области неповрежденного материала, т.е.

$$J_0(1 - I_1^* / I_1^+) \leq -\sqrt{2/3} I_1^* \quad (3.2)$$

процесс накопления поврежденности начинается в области умеренного сжатия  $I_1^* < I_1 < 0$ , в которой преобладает сдвиговый механизм разрушения материала; затем с ростом  $|I_1|$  деформированное состояние переходит в область сильного сжатия  $I_1^- < I_1 < I_1^*$ . Во втором случае граница упругой области такова, что прямая  $OAM$  одноосного сжатия сразу пересекает левую часть границы; при этом сразу начинается накопление поврежденности с объемным механизмом разрушения.

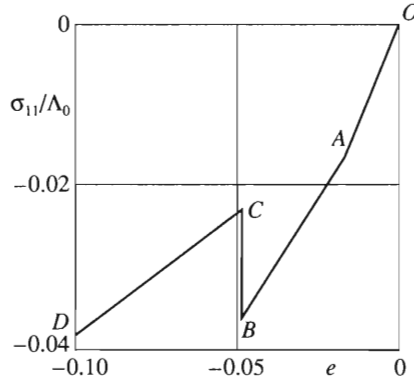
Будем предполагать, что реализуется первая форма нагружения, когда прямая линия  $J = -\sqrt{2/3} I_1$  на фиг. 2 пересекает правую часть границы упругой области. При этом справедливо неравенство (3.2), или, что то же,

$$\alpha_p^+ I_1^+ \leq (\alpha_p^+ - \alpha_s) \sqrt{2/3} I_1^*$$

Тогда одноосное динамическое сжатие рассматриваемого материала описывается системой трех дифференциальных уравнений относительно неизвестных  $(v_1, \sigma_{11}, \omega)$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} &= \rho g, \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \Lambda_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}(\sigma_{11}, \omega), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\tau} z_{\pm}(\sigma_{11}, \omega) \\ \sigma_{11} &= \Lambda_0 e - \alpha_{\pm} \omega, \quad z_{\pm}(\sigma_{11}, \omega) \equiv \frac{\alpha_{\pm} \sigma_{11} - \gamma \Lambda_0}{\beta \Lambda_0} - \left( 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta \Lambda_0} \right) \omega, \quad \alpha_{\pm} = \alpha_p^{\pm} - \alpha_s \sqrt{2/3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Индексы плюс и минус соответствуют интервалам  $I_1^* < I_1 < 0$  и  $I_1 < I_1^*$ .



Фиг. 3

В безразмерных переменных

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{v} = \frac{v_1}{c_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{11}}{\Lambda_0}, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\Lambda_0}, \quad \bar{g} = \frac{\rho g h}{\Lambda_0}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{t_0}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\Lambda_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\Lambda_0}, \quad \bar{\alpha}_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm}}{\Lambda_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\Lambda_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\Lambda_0}; \quad c_0 = \left(\frac{\Lambda_0}{\rho}\right)^{1/2}, \quad t_0 = \frac{h}{c_0}$$

система (3.3) записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = g, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\tau} z_{\pm}; \quad z_{\pm}(\sigma, \omega) \equiv \frac{\alpha_{\pm} \sigma - \gamma}{\beta} - b_{\pm}^2 \omega, \quad b_{\pm}^2 = 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta} \quad (3.4)$$

Здесь и далее черта над безразмерными переменными опущена.

При бесконечно малой скорости деформирования, которой соответствует  $\dot{\omega} \rightarrow 0$ , правая часть последнего уравнения системы (3.4) также стремится к нулю. В этом случае поврежденность  $\omega$  явным образом выражается через деформацию  $e$  или напряжение  $\sigma$ :

$$\omega = \beta^{-1}(\alpha_{\pm} e - \gamma), \quad \beta \Lambda_0 \omega - \alpha_{\pm}^2 \omega = \alpha_{\pm} \sigma_{11} - \gamma \Lambda_0$$

Отсюда видно, что  $\alpha_{\pm} - \alpha_p \sqrt{2/3} < 0$ , поскольку при сжатии  $e < 0$ , а поврежденность  $\omega > 0$ . Выражение для компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}$  при бесконечно малой скорости деформирования приводится к кусочно-линейной зависимости

$$\sigma_{11}(e) = \begin{cases} \Lambda_0 e, & e_A < e < 0 \\ \Lambda_f^+(e - e_A) + \sigma_A, & e_B < e < e_A \\ \Lambda_f^-(e - e_B) + \sigma_C, & e < e_B \end{cases}$$

Здесь и далее

$$e_A = \gamma/\alpha_+, \quad \sigma_A = \Lambda_0 e_A = \Lambda_0 \gamma/\alpha_+, \quad e_B = I_1^*, \quad \sigma_C = \Lambda_f^- e_B + \gamma \alpha_-/\beta, \quad \Lambda_f^{\pm} = \Lambda_0 - \alpha_{\pm}^2/\beta$$

Зависимость  $\sigma_{11}(e)/\Lambda_0$  представлена на фиг. 3 ломаной OABCD для материала с параметрами

$$\lambda = \mu = 0.33, \quad \alpha_p^+ = 0.3, \quad \alpha_p^- = -0.02, \quad \alpha_s = 1.0, \quad \gamma = 0.01, \quad \beta = 1.0$$

В точке  $e_B = I_1^*$  эта зависимость терпит разрыв. Используя соотношения

$$\sigma_B = \Lambda_f^+(e_B - e_A) + \sigma_A, \quad \sigma_C = \Lambda_f^- e_B + \gamma \alpha_- / \beta$$

получим выражение для скачка напряжения

$$\sigma_C - \sigma_B = \beta^{-1} (\alpha_+ - \alpha_-) \{ \alpha_+ (e_B - e_A) + \alpha_- e_B \} > 0$$

Неотрицательность этого скачка следует из условия сжатия  $e < 0$  и вытекающих из определения  $\alpha_{\pm}$  неравенств

$$\alpha_+ > \alpha_-, \quad \alpha_+ < 0, \quad \alpha_- < 0$$

Таким образом, при статическом деформировании достижение точки  $B$ , соответствующей объемному сжатию  $I_1^*$ , сопровождается сбросом сжимающего напряжения, т.е. статическая диаграмма рассматриваемого материала имеет падающий участок. Однако вследствие зависимости напряжений от скорости деформирования материала явления неустойчивости, связанные с потерей гиперболичности, здесь не возникают. Наклон участка  $CD$  всегда меньше наклона участка  $AB$  в силу неравенства  $\alpha_- < \alpha_+ < 0$ .

Краевые условия для системы (3.4) имеют вид

$$\sigma(x, 0) = -gx, \quad v(x, 0) = \omega(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{3.5}$$

$$\sigma(0, t) = \sigma_0, \quad v(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{3.6}$$

Для квазилинейной гиперболической системы (3.4) скорости характеристик  $c = \pm 1$ . Решение задачи содержит головную ударную волну с началом в точке  $x = t = 0$ , связанную с разрывом краевых условий (3.5), (3.6) в этой точке. Будем рассматривать систему (3.4) в треугольнике  $\{0 \leq x \leq t, t \geq 0\}$ , который соответствует первому пробегу ударной волны по начально-напряженному слою. Краевые условия записываются в виде

$$\sigma(0, t) = \sigma_0, \quad v(t, t) = -(gx(t) + \sigma(t, t)), \quad \omega(t, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.7}$$

и представляют собой первое соотношение (3.6) и условие на сильном разрыве  $x = t$ , записанное с учетом начального состояния (3.5) в невозмущенной области  $\{x < t, t > 0\}$ .

Рассмотрим эволюцию напряжения  $\sigma_*(t) \equiv \sigma(t - 0, t)$  на фронте ударной волны. При этом возможны три различных случая – высокое, умеренное и низкое давление, приложенное к верхней границе  $x = 0$ .

При *высоком давлении* ( $\sigma_0 < \sigma_B, \sigma_B = e_B$ ) ударное сжатие материала с начальной пористостью вызывает объемную деформацию, превосходящую (по модулю) значение  $e_B \equiv I_1^*$ , разделяющее области сдвигового и объемного разрушения. В этом случае выбирается коэффициент  $\alpha_{\pm}$  с индексом минус, соответствующий деформации  $e < I_1^*$ . Правая часть  $(\alpha_- \sigma - \gamma) / \beta$  кинетического уравнения в точке  $x = t = 0$  больше нуля, поэтому уже в момент приложения нагрузки начинается накопление поврежденности. Распространение головной волны сопровождается уменьшением ее амплитуды  $\sigma_*(t)$ . В момент времени  $t_B$ , такой, что  $\sigma_*(t_B) = \sigma_B$ , характер рассеянного разрушения меняется, объемное разрушение сменяется сдвиговым. Изменение напряжения на ударной волне определяется задачей Коши

$$\frac{d\sigma_*}{dt} = -A_- \left( \sigma_* - \frac{\gamma}{\alpha_-} \right) - g, \quad \sigma_*(0) = -p_0, \quad 0 < t < t_B \tag{3.8}$$

$$\frac{d\sigma_*}{dt} = -A_+ \left( \sigma_* - \frac{\gamma}{\alpha_+} \right) - g, \quad \sigma_*(t_B) = \sigma_B, \quad t_B < t; \quad A_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm}^2}{2\tau\beta}$$

решение которой может быть записано в явной форме

$$\sigma_*(t) - \sigma_0 = \left( \sigma_\infty - \sigma_0 + \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\alpha_-} \sigma_A \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\alpha_-^2}{\alpha_+^2 (\sigma_A - \sigma_\infty)} g t \right) \right], \quad \sigma_0 \leq \sigma_*(t) \leq \sigma_B \quad (3.9)$$

$$\sigma_*(t) - \sigma_B = (\sigma_\infty - \sigma_B) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{g(t-t_B)}{\sigma_A - \sigma_\infty} \right) \right], \quad \sigma_B \leq \sigma_*(t) < \sigma_\infty$$

Второе из соотношений (3.9) показывает, что при малых временах релаксации  $\tau \ll 1$  напряжение  $\sigma_*$  стремится к асимптотическому значению

$$\sigma_\infty = \frac{\gamma}{\alpha_+} - \frac{2\tau\beta g}{\alpha_+^2} = \sigma_A - \frac{2\tau\beta g}{\alpha_+^2} = \sigma_A - \frac{2\tau g}{1-b_+^2} \quad (3.10)$$

Величина  $\sigma_\infty$  превосходит пороговое значение  $\sigma_A = \gamma/\alpha_+$ , при котором начинается накопление поврежденности. Появление величины  $\sigma_\infty$  обусловлено взаимодействием кинетики поврежденности и начального сжатия материала. Этот эффект отсутствует в задачах распространения волн в упруговязкопластических телах [14] и повреждающихся материалах без начальных напряжений [15], где асимптотическое значение точно равно пороговому напряжению  $\sigma_A$ .

Из решения (3.9) видно, что сжимающие напряжения экспоненциально убывают при распространении волны. Так как  $\alpha_-^2/\alpha_+^2 > 1$ , то спад амплитуды волны объемного разрушения более интенсивный по сравнению с волной сдвигового разрушения. Скорость изменения пропорциональна отношению скорости свободного падения  $g(t-t_B)$  к ширине кинетического интервала

$$\Delta_{\text{kin}} \equiv \sigma_A - \sigma_\infty = 2\tau g / (1 - b_+^2)$$

Зависимость  $\sigma_*(t)/\sigma_A$  амплитуды головной волны при  $\sigma_0 = 10\sigma_A$  для материала с параметрами

$$\lambda = \mu = 0.33, \quad \alpha_p^+ = 0.3, \quad \alpha_p^- = -0.1, \quad \alpha_s = 1.1, \quad \gamma = 0.01, \quad \beta = 1.0, \quad e_B = 3e_A \quad (3.11)$$

для трех времен релаксации  $\tau = 0.01, 0.03, 0.05$  (кривые 1–3) представлены на фиг. 4, на которой отчетливо виден излом кривых, соответствующий моменту

$$t_B = -\frac{\alpha_+^2 (\sigma_A - \sigma_\infty)}{\alpha_-^2 g} \ln \left[ 1 - \frac{\sigma_B - \sigma_0}{\alpha_+ \sigma_A / \alpha_- - \sigma_0 - 2\tau g / (1 - b_+^2)} \right] \quad (3.12)$$

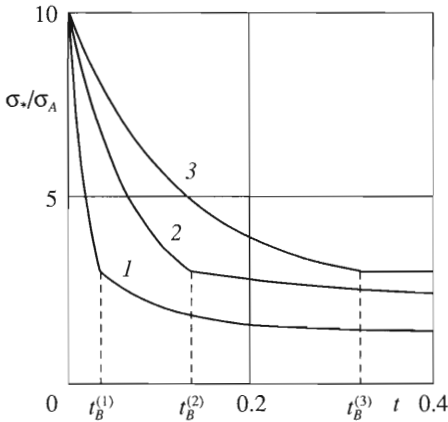
перехода от объемного к сдвиговому разрушению.

При умеренном давлении  $\sigma_B < \sigma_0 < \sigma_A$  накопление поврежденности также начинается при  $t = 0$ . При этом реализуется сдвиговое разрушение. Эволюция амплитуды головной волны определяется соотношением

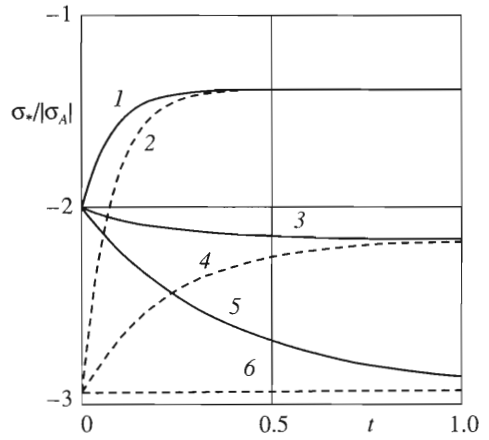
$$\sigma_*(t) - \sigma_0 = (\sigma_\infty - \sigma_0) [1 - \exp(-gt/(\sigma_A - \sigma_\infty))] \quad (3.13)$$

Если приложенное к границе напряжение  $\sigma_0$  находится в диапазоне  $\sigma_B < \sigma_0 < \sigma_\infty$ , т.е. вне кинетического интервала, то коэффициент  $\sigma_\infty - \sigma_0$  в равенстве (3.13) положителен. Амплитуда  $|\sigma_*(t)|$  напряжения на фронте волны монотонно убывает от  $|\sigma_0|$  до асимптотического значения  $|\sigma_\infty|$ , определенного выражением (3.10).

Если же напряжение  $\sigma_0$  принадлежит кинетическому интервалу, т.е.  $\sigma_\infty < \sigma_0 < \sigma_A$ , то распространение головной волны сопровождается ростом ее амплитуды  $|\sigma_*(t)|$  до значения  $|\sigma_\infty|$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Зависимость  $\sigma_*(t)/|\sigma_A|$  при умеренном воздействии, когда  $\sigma_0 = 2\sigma_A$  (кривые 1, 3, 5) и  $\sigma_0 = 2.9\sigma_A$  (кривые 2, 4, 6), для значений параметров материала (3.11) при  $\tau = 0.01$  (кривые 1, 2),  $\tau = 0.03$  (кривые 3, 4) и  $\tau = 0.05$  (кривые 5, 6) представлены на фиг. 5. Можно видеть, что при заданных значениях приложенного давления  $\sigma_0$  амплитуда головной волны ведет себя по-разному в зависимости от времени релаксации: она может уменьшаться (кривые 1, 2, 4), увеличиваться (кривые 3, 5), оставаться постоянной (кривая 6). Увеличение амплитуды – эффект, непосредственно связанный с начальными напряжениями в материале.

Третий, наиболее содержательный случай реализуется при малом напряжении  $\sigma_0$ , приложенном к границе  $x = 0$ , когда  $z_+(\sigma_0, 0) \equiv \alpha_+\sigma_0 - \gamma \leq 0$ . На начальном участке распространения головной волны поврежденность отсутствует, так как правая часть кинетического уравнения равна нулю. Материал ведет себя упругим образом. Решение задачи (3.4)–(3.6) является кусочно-постоянным

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \sigma_0 - gx, & v(x, t) &= -\sigma_0, & \omega(x, t) &= 0, & 0 \leq x \leq t, & t > 0 \\ \sigma(x, t) &= -gx, & v(x, t) &= 0, & \omega(x, t) &= 0, & t < x, & t > 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Максимальное сжатие  $\sigma(1, 1) = \sigma_0 - gx$  достигается в основании слоя  $x = 1$  при  $t = 1$ . Материал в этом сечении остается неповрежденным при условии

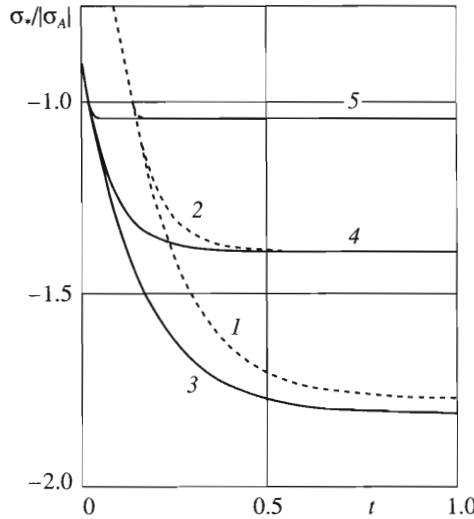
$$\sigma_0 \geq \sigma_0^e \equiv g + \gamma/\alpha_+$$

Если же приложенное к границе напряжение  $|\sigma_0|$  больше, чем  $|\sigma_0^e|$ , из соотношений (3.14) следует, что напряжение в головной волне достигает порогового значения  $\sigma_A = \gamma/\alpha_+$  в точке  $x_A$ :

$$\sigma_0 = gx_A + \gamma/\alpha_+ \tag{3.15}$$

после чего начинается накопление поврежденности, т.е. упругий предвестник превращается в волну сдвигового разрушения. Напряжение  $\sigma_*(t)$ , которое в момент времени  $t_A = x_A$  равно сумме приложенного и начального напряжений, определяется зависимостью

$$\sigma_*(t) - \sigma_A = -(\sigma_A - \sigma_\infty)[1 - \exp(-g(t - t_A)/(\sigma_A - \sigma_\infty))], \quad t > t_A \tag{3.16}$$



Фиг. 6

На фиг. 6 представлено решение при  $\sigma_0 = 0.3\sigma_A$  (кривые 1, 2) и  $\sigma_0 = 0.9\sigma_A$  (кривые 3, 4, 5) для материала с параметрами (3.11) и временем релаксации  $\tau = 0.001$  (кривая 5),  $\tau = 0.01$  (кривые 2, 4) и  $\tau = 0.02$  (кривые 1, 3). Построенное решение свидетельствует о том, что при малых начальных нагрузках объемное разрушение в головной ударной волне не реализуется, разрушение происходит только по сдвиговому механизму. В отличие от производной  $d\sigma_*/dt = -g$  в интервале  $t \leq t_A$  в моменты времени  $t > t_A$  производная

$$\frac{d\sigma_*}{dt} = -g + A|\alpha_+| \frac{\alpha_+ \sigma_* - \gamma}{2\tau} > -g$$

т.е. отрицательный наклон кривой  $\sigma_*(t)$  уменьшается. Это означает, что начально-напряженный материал разгружается в окрестности головной волны  $x = t$ , оставаясь сжатым ниже порогового значения  $\sigma_A$ .

**4. Макроразрушение пористого слоя.** Условие реологической неустойчивости (2.9) позволяет определить, как волна макроскопического разрушения, соответствующая точкам, в которых выполняется критерий прочности, движется по пористому слою. При этом следует заметить, что система уравнений (3.4), являясь системой с линейной дифференциальной частью со скоростями характеристик  $c = \pm 1$ , не вырождается. Нарушение условия Адамара происходит за счет других компонент тензора деформаций, отличных от компоненты  $e_{11}$  одноосной деформации. Это означает, что макроскопическое разрушение в рамках рассматриваемой модели – сугубо многомерный процесс, реализующийся в виде сильно растущих малых возмущений тензора деформации.

Как показано в разд. 2, реологическая неустойчивость материала в состоянии одноосной деформации наступает при значении параметра  $\xi \equiv \alpha_+ \omega / J(\epsilon)$ , равном  $\xi^* = 2\mu$ . Это условие, как будет видно из дальнейшего, и определяет закон движения волны макроразрушения.

На ударной волне, уравнение которой в характеристических переменных

$$\zeta = (x+t)/2, \quad \eta = (t-x)/2$$

имеет вид  $\eta = 0$ , поврежденность  $\omega(\zeta, 0) = 0$ . Напряжение определено соотношениями (3.9), (3.13), (3.16). Для построения решения за волной при  $\eta > 0$  необходимы производные  $\partial v / \partial \eta$ ,  $\partial \sigma / \partial \eta$ ,  $\partial \omega / \partial \eta$ . Учитывая формулы

$$t = \zeta + \eta, \quad \partial\omega/\partial t|_{\zeta = \text{const}} = \partial\omega/\partial\eta$$

получаем из соотношений (3.7)

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \frac{1}{\tau} z_{\pm}(\zeta, \eta), \quad z_{\pm} \equiv \frac{\alpha_{\pm}}{\beta} \left( \sigma - \frac{\gamma}{\alpha_{\pm}} \right) - b_{\pm}^2 \omega, \quad b_{\pm}^2 = 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta}$$

Отсюда находим в окрестности характеристики  $\eta = 0$

$$\omega(\zeta, \eta) = \frac{\eta}{\tau} z_{\pm}^*(\zeta), \quad z_{\pm}^*(\zeta) \equiv z_{\pm}(\zeta, 0) = \frac{\alpha_{\pm} \sigma_*(\zeta) - \gamma}{\beta} \tag{4.1}$$

Здесь  $z_{\pm}^*(\zeta)$  – неотрицательная функция с разрывом при  $t = t_B$  вследствие скачка  $\alpha_{\pm}$ .

В малой окрестности характеристики  $\eta = 0$  производная  $\partial\sigma/\partial\eta$  удовлетворяет уравнению первого порядка с начальным условием при  $\zeta = 0$

$$\frac{dY_{\pm}}{d\zeta} + A_{\pm} Y_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm} b_{\pm}^2}{2\tau^2} z_{\pm}^*(\zeta) - \frac{\alpha_{\pm} dz_{\pm}^*(\zeta)}{2\tau d\zeta}, \quad Y_{\pm}(\zeta) = \left. \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right|_0, \quad A_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm}^2}{2\tau\beta} \tag{4.2}$$

$$Y_{\pm}(0) = g + A_{\pm} \left( \sigma_0 - \frac{\gamma}{\alpha_{\pm}} \right) = g + \frac{\alpha_{\pm}}{2\tau} z_{\pm}^*(0) \tag{4.3}$$

Точкам  $\zeta$ , в которых  $\sigma_B < \sigma_*(\zeta) < \sigma_A$ , соответствует индекс плюс, точкам, в которых  $\sigma_*(\zeta) < \sigma_B$ , – минус. Решение задачи Коши (4.2), (4.3) имеет вид:

для умеренного напряжения  $\sigma_B < \sigma_0 < \sigma_A$

$$Y_{+}(\zeta) = \left( g + \frac{\alpha_{+}}{\tau} z_{+}^*(0) \right) e^{-A_{+}\zeta} - \frac{\alpha_{+}}{2\tau} z_{+}^*(\zeta) + B_{+} e^{-A_{+}\zeta} \int_0^{\zeta} z_{+}^*(s) e^{A_{+}s} ds \tag{4.4}$$

для сильного сжатия  $\sigma_0 < \sigma_B$

$$Y_{-}(\zeta) = \left( g + \frac{\alpha_{-}}{\tau} z_{-}^*(0) \right) e^{-A_{-}\zeta} - \frac{\alpha_{-}}{2\tau} z_{-}^*(\zeta) + B_{-} e^{-A_{-}\zeta} \int_0^{\zeta} z_{-}^*(s) e^{A_{-}s} ds, \quad \zeta < \zeta_B \tag{4.5}$$

$$Y_{+}(\zeta) = \left[ Y_{-}(\zeta_B) + \frac{\alpha_{+}}{2\tau} z_{+}^*(\zeta_B) \right] e^{-A_{+}(\zeta - \zeta_B)} - \frac{\alpha_{+}}{2\tau} z_{+}^*(\zeta) + B_{+} e^{-A_{+}\zeta} \int_{\zeta_B}^{\zeta} z_{+}^*(s) e^{A_{+}s} ds, \quad \zeta > \zeta_B$$

Здесь

$$B_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm}}{\tau^2} \left( 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{2\beta} \right) = \frac{\alpha_{\pm}(1 + b_{\pm}^2)}{4\tau^2}$$

$\zeta_B = t_B$  – момент перехода от объемного к сдвиговому разрешению, определяемый по формуле (3.12).

Для доказательства продифференцируем по  $\zeta$  уравнение вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$

$$\frac{\partial(v + \sigma)}{\partial\eta} = g - \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}(\zeta, \eta)$$

В результате получим на линии  $\eta = 0$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \left. \frac{\partial v}{\partial\eta} \right|_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta} \left. \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right|_0 = -\frac{\alpha_{\pm} dz_{\pm}^*(\zeta)}{\tau d\zeta} \tag{4.6}$$

Другое соотношение вдоль характеристики  $\zeta = \text{const}$  имеет вид

$$\frac{\partial(v - \sigma)}{\partial\zeta} = g + \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}^*(\zeta, \eta)$$

Линеаризуя это уравнение в окрестности  $\eta = 0$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \left( v_*(\zeta) + \eta \frac{\partial v}{\partial\eta} \Big|_0 \right) - \frac{\partial}{\partial\zeta} \left( \sigma_*(\zeta) + \eta \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \Big|_0 \right) = g + \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}^*(\zeta) + \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} \eta \frac{\partial z_{\pm}^*}{\partial\eta} \Big|_0$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial v_*(\zeta)}{\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_*(\zeta)}{\partial\zeta} = g + \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} z_{\pm}^*(\zeta)$$

$$\frac{\partial z_{\pm}^*}{\partial\eta} \Big|_0 = \frac{\alpha_{\pm} \partial\sigma}{\beta \partial\eta} \Big|_0 - \left( 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta} \right) \frac{\partial\omega}{\partial\eta} \Big|_0 = \frac{\alpha_{\pm} \partial\sigma}{\beta \partial\eta} \Big|_0 - \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta} \right) z_{\pm}^*(\zeta)$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{\partial v}{\partial\eta} \Big|_0 - \frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \Big|_0 = \frac{\alpha_{\pm} \partial\sigma}{\tau\beta \partial\eta} \Big|_0 - \frac{\alpha_{\pm}}{\tau} \left( 1 - \frac{\alpha_{\pm}^2}{\beta} \right) z_{\pm}^*(\zeta) \quad (4.7)$$

Вычитая уравнение (4.7) из уравнения (4.6) приходим к уравнению (4.2).

Начальное условие (4.3) следует из равенства  $\sigma(\zeta, \zeta) = \sigma_0$ , если учесть равенство нулю производной  $2\partial\sigma/\partial t = \partial\sigma/\partial\zeta + \partial\sigma/\partial\eta = 0$  на границе  $x = \xi - \eta = 0$  и формулы (3.8) для производных напряжений в головной волне. Справедливо представлений (4.4), (4.5) несложно установить непосредственной проверкой.

Теперь можно сформулировать уравнение для макроразрыва. Используя условие неустойчивости (2.9), соотношение  $J = -\sqrt{2/3} (\sigma + \alpha_{\pm}\omega)$ , выражение (4.1) и разложение

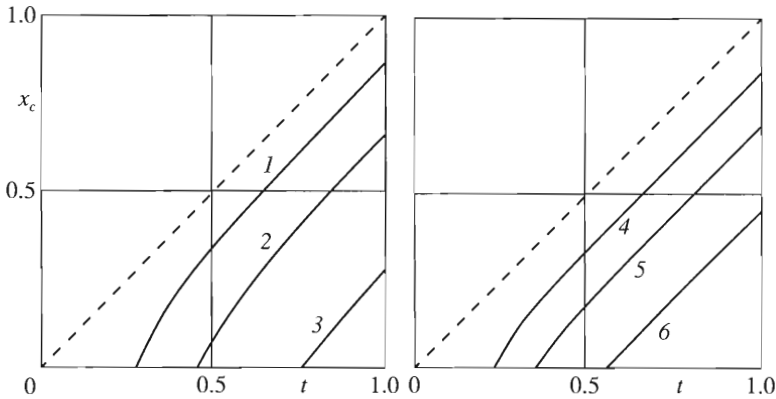
$$\sigma(\zeta, \eta) = \sigma_*(\zeta) + \eta \partial\sigma/\partial\eta \Big|_0 + O(\eta^2)$$

где производная определена формулами (4.4), (4.5), получаем для волны макроразрушения

$$x(t) = t - 2|\sigma_*(t)|/F_{\pm}(t), \quad F_{\pm}(t) = \tau^{-1} (\sqrt{3/2} \alpha_s / \xi^* - |\alpha_{\pm}|) z_{\pm}^*(t) + Y_{\pm}(t) \quad (4.8)$$

Амплитуда головной волны  $\sigma_*(t)$  задается одной из формул (3.9), (3.13), (3.16), положительная величина  $z_{\pm}^*(\zeta)$  определяется выражением (4.1), а функция  $Y_{\pm}(\zeta) \equiv \partial\sigma(\zeta, 0)/\partial\eta -$  соотношениями (4.4), (4.5), где  $\zeta = (x + t)/2$ .

Координата волны макроразрыва  $\eta_{\pm}^*(\zeta) \equiv (t - x)/2 > 0$ . Это возможно при  $F_{\pm}(\zeta) > 0$ . Поскольку параметр  $\xi^*$  входит только в первое слагаемое функции  $F_{\pm}(\zeta)$ , то значение  $F_{\pm}(\zeta)$  максимально при наименьшем значении  $\xi^* = 2\mu$ , которое соответствует самой быстрой волне макроразрыва. Значение  $\xi^* = 2\mu$  дает либо вырождение по скорости  $\rho c_3^2$  с произвольной ориентацией поверхности локализации деформаций, либо вырождение по скорости  $\rho c_2^2$ , которой соответствует первая форма реологической неустойчивости. Это означает, что в рамках решения задачи об одноосной деформации невозможно определить форму проявления реологической неустойчивости (характер макроразрушения), для этого требуется численное решение многомерной задачи.



Фиг. 7

Фронты волн макроразрушения  $x = x_c(t, \sigma_0)$  представлены слева на фиг. 7 для материала с параметрами (3.11) и  $g = 0.1$ ,  $\tau = 0.02$  при трех значениях умеренной нагрузки  $\sigma_B < \sigma_0 < \sigma_A$ . Штриховая кривая соответствует головной волне  $x = t$ , кривые 1–3 – линиям  $x = x_c(t, \sigma_0)$  для  $\sigma_0/\sigma_A = 2.8, 2.4, 2.3$ .

Следует отметить нетривиальное влияние времени релаксации на движение волн макроразрушения. Зависимости  $x = x_c(t, \sigma_0)$  представлены справа на фиг. 7 при времени релаксации  $\tau = 0.01$  для  $\sigma_0/\sigma_A = 2.66, 2.70, 2.8$  (кривые 4–6). В этом случае волна макроразрушения возникает при напряжении  $\sigma_0/\sigma_A > 2.6$ , в то время как при  $\tau = 0.02$  макроразрушение начинается при нагрузке  $\sigma_0/\sigma_A > 2.25$ . Это означает, что с уменьшением времени релаксации  $\tau$  стойкость тела возрастает. Увеличение модуля сдвига также способствует повышению стойкости пористого слоя. Сдвиговое макроразрушение начинается при указанных значениях параметров при  $\sigma_0/\sigma_A > 2.66$  для  $\mu = 0.45$ ,  $\lambda = 0.10$ ,  $\tau = 0.01$ .

В случае интенсивной динамической нагрузки  $|\sigma_0| > |\sigma_B|$  функция  $x = x_c(t, \sigma_0)$  слабо зависит от приложенного давления и фактически совпадает (с точностью до нескольких процентов) с кривой  $x = x_c(t, \sigma_0)$ , соответствующей началу объемного разрушения материала. Это связано с быстрым затуханием волны напряжения в окрестности границы  $x = 0$  до значения  $\sigma_{\infty}$ , смысл которого подробно обсуждался в разд. 3.

Авторы благодарят И.Г. Горячеву и В.Н. Кукуджанова за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН “Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, температурных и радиационных воздействиях” и Российского фонда фундаментальных исследований (03-05-64643).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bazant Z.P., Zhou Y. Why did World Trade Center collapse? – Simple analysis // Arch. Appl. Mech. 2001. V. 71. № 12. P. 802–806.
2. Кондауров В.И., Кутлярова Н.В. Повреждаемость и реологическая неустойчивость начально-пористых материалов // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 99–109.
3. Кондауров В.И., Фортвов В.Е. Основы термомеханики конденсированных сред. М.: Изд-во МФТИ, 2002. 336 с.

4. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1920. V. 221. P. 163–198.
5. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1973. 640 с.
6. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for localization of deformation in pressuresensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. V. 23. P. 371–393.
7. *Кондауров В.И.* Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // *ПММ.* 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
8. *Courant R.* *Partial Differential Equations.* N.Y.; L.: Interscience, 1962 = *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
10. *Работнов Ю.Н.* Механика твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1979. 744 с.
11. *Truesdell C.* *A First Course in Rational Continuum Mechanics.* Baltimore: The John Hopkins Univ., 1972 = *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
12. *Бахвалов Н.С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // *Докл. АН СССР.* 1973. Т. 218. № 4. С. 1046–1048.
13. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
14. *Кукуджанов В.Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
15. *Кондауров В.И.* Об особенностях волн разрушения в высокооднородных хрупких материалах // *ПММ.* 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 722–729.

Долгопрудный  
e-mail: vk@mipt.ru

Поступила в редакцию  
14.III.2005