

УДК 539.374

© 2006 г. И. В. Ширко

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ
ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА**

Разработана теория предельного равновесия анизотропной обобщенно пластической среды при плоском деформированном состоянии. Предложенный критерий текучести (условие предельного равновесия) получен с помощью объединения критерия текучести Мизеса–Хилла идеально-пластического анизотропного материала и условия предельного равновесия обобщенной пластической среды Прандтля. Показано, что задача является статически определимой, т.е. если граничные условия заданы в напряжениях, напряженное состояние в пластической области может быть получено только с помощью уравнений равновесия. Установлено, что уравнения, описывающие напряженное состояние, принадлежат к гиперболическому типу и имеют два семейства характеристик, которые пересекаются под переменными углами. При выводе уравнений, описывающих поле скоростей, материал предполагается жесткопластическим и применяется ассоциированный закон течения. Показано, что уравнения для скоростей также принадлежат к гиперболическому типу и их характеристики совпадают с характеристиками уравнений для напряжений. Однако направление главных значений тензора напряжений и скоростей деформаций оказываются различными вследствие анизотропии материала. Характеристические направления отличаются от изотропного случая тем, что действующие по этим площадкам нормальная и касательная компоненты тензора напряжений не удовлетворяют предельным соотношениям. Установлено, что полученные уравнения допускают частные решения, при этом хотя бы одно семейство характеристик состоит из прямых линий. Исследованы условия вдоль линий разрыва скоростей и показано, что, как и в изотропном случае, они являются характеристиками основной системы уравнений. В анизотропной постановке решена известная задача Ренкина о предельном состоянии весомого слоя. Из анализа поля скоростей показано, что пластическое течение всего слоя возможно лишь при угле наклона к горизонту, равного углу внутреннего трения. При углах наклона меньших угла внутреннего трения полученные решения являются решениями задач о давлении среды на подпорные стенки. Исследовано изменение этого давления в зависимости от параметров анизотропии, которое оказалось существенным.

Согласно сложившейся терминологии, следуя Прандтлю [1], под механикой обобщенно пластических сред понимают науку о законах деформирования под действием внешних нагрузок грунтов, горных пород, собственно сыпучих и гранулированных сред и других материалов, поведение которых характеризуется тем, что условия перехода к состоянию пластического течения (критерии текучести) зависят от гидростатического давления и называются условиями пластичности общего вида. Физически это означает, что среда переходит в пластическое состояние, если в рассматриваемой точке существует такая площадка, на которой нормальная σ_n^* и касательная $\tilde{\tau}_n^*$ составляющие тензора напряжений удовлетворяют предельному соотношению $\tilde{\tau}_n^* = f(\sigma_n^*)$. В

изотропной механике сыпучих и пластических сред такие площадки называются площадками скольжения, которые при плоском деформированном состоянии совпадают по направлению с характеристиками основной системы уравнений. Широко применяемый в механике сыпучих сред критерий Кулона [2] является частным случаем, когда предельное соотношение – линейная функция.

Начиная с основополагающих работ Кулона и до начала 1960-х годов механика изотропных обобщенно пластических сред развивалась в основном как статика. Это в значительной степени объясняется тем, что уравнения, описывающие напряженное состояние среды при плоском деформированном состоянии [2], так же как и уравнения теории идеальной пластичности [3], являются статически определимыми, т.е. в случае статически определимых краевых условий могут быть решены без привлечения кинематических соотношений. При этом уравнения, описывающие напряженное состояние, принадлежат к гиперболическому типу и имеют два семейства характеристик, являющихся линиями скольжения и пересекающихся под углами, зависящими от угла внутреннего трения среды.

Попытки исследования деформированного состояния таких сред основывались, как правило, на предположениях о жесткопластическом поведении материала и его несжимаемости. Последнее предположение приводило к тому, что уравнения для определения полей скоростей также имели два семейства характеристик, которые оказывались взаимно ортогональными и, следовательно, не совпадающими с характеристиками уравнений, описывающих напряжения.

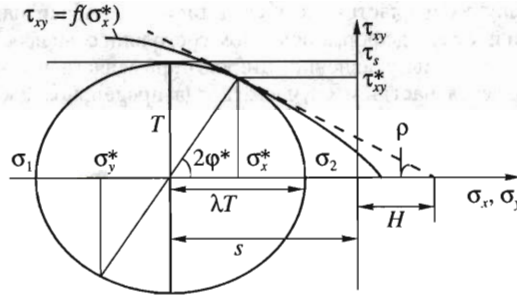
Это противоречие удалось преодолеть в рамках теории течения [4], основанной на применении к критерию текучести ассоциированного закона течения. Основное преимущество этой теории [4] состоит в том, что характеристики уравнений, описывающих поля напряжений и скоростей при плоском деформированном состоянии, совпадают, и области предельного равновесия могут быть определены однозначно. На базе этой модели было проведено [5–8] подробное исследование разрешающей системы уравнений, линий разрыва скоростей и напряжений, решен ряд новых задач, в том числе и со смешанными краевыми условиями, разработаны эффективные численные методы решения краевых задач.

Исторически сложилось так, что изложенные выше теории, следуя Кулону, не вполне точно называют теориями предельного равновесия. Их основная задача – нахождение предельных нагрузок, трактуемых как нагрузки, при достижении которых происходит потеря равновесия (потеря устойчивости) среды. По существу, с современной точки зрения, они являются теориями течения жесткопластического материала, а предельные нагрузки понимаются как нагрузки, при достижении которых такое течение становится возможным. Именно в этом смысле указанные термины применяются ниже.

В известных работах Седова, Ильющина, Трусдела, Нолла получили существенное развитие фундаментальные вопросы нелинейной континуальной механики, связанные с проблемами симметрии, возможными формами записи скалярных, векторных и тензорных функций, инвариантных относительно некоторых ортогональных преобразований. Современное изложение этих проблем можно найти в книге [9], где также приводятся обобщения теории течения и деформационной теории пластичности на случай конечных деформаций и изменения температур.

При определении напряженно-деформированного состояния сыпучей среды в качестве уравнений связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций часто используются соотношения, подобные соотношениям теории упругости и деформационной теории пластичности. В качестве примера можно привести уже ставшие классическими работы [10, 11], в первой из которых разработана упругопластическая модель мягкого грунта, в дальнейшем обобщенная на твердые горные породы, подверженные действию интенсивных нагрузок. Такие подходы широко применяются, особенно в инженерных приложениях [12, 13], при решении конкретных задач. Обоснование возможности такого подхода и его связь с теорией предельного равновесия рассматривались ранее [14].

Несмотря на обширную литературу, посвященную механике обобщенно пластических сред, вопросы, связанные с учетом анизотропных свойств среды за пределами упругости, изучены недостаточно. Общеизвестная теория деформирования анизотропной среды, подобная теории Мизеса–Хилла для анизотропного идеально пластического материала, до настоящего времени не разработана. Она представляет не только теоретический интерес, но и имеет важное прикладное значение, поскольку большинство грунтов и горных пород обладает выраженной анизотропией механических свойств.



Фиг. 1

1. Основные уравнения. В анизотропной теории идеальной пластичности при плоском деформированном состоянии компоненты тензора напряжений удовлетворяют критерию текучести Мизеса–Хилла [15]

$$T^2 = \tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4\lambda^2} = \tau_s^2; \quad 0 < \lambda < \infty \quad (1.1)$$

При этом материал предполагается жесткопластическим и ортотропным, оси x, y совпадают с главными осями анизотропии, τ_s – предел текучести при чистом сдвиге в этой системе координат, λ – параметр анизотропии.

Условие пластичности (1.1) удовлетворяется тождественно, если σ_x, σ_y и τ_{xy} представить в виде

$$\sigma_{x,y} = s \pm \lambda \tau_s \cos 2\mu, \quad \tau_{xy} = \tau_s \sin 2\mu; \quad s = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \quad (1.2)$$

Если ввести плоскость напряжений, такую, что по оси абсцисс отложены компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y , а по оси ординат – компонента τ_{xy} , то в такой системе координат (1.2) – параметрическое уравнение эллипса, касающегося прямой $\tau_{xy} = \tau_s$ (фиг. 1). Отметим, что угол μ , определяющий положение компонент (1.2) на эллипсе, связан с углом φ между направлением главного напряжения σ_1 и осью x соотношением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} 2\mu \quad (1.3)$$

Если материал изотропен ($\lambda = 1$), соотношение (1.1) превращается в критерий текучести Мизеса, углы μ и φ будут равными, а эллипс становится окружностью, причем величины углов μ^* и φ^* , соответствующие площадке, на которой касательное напряжение τ_{xy}^* достигает максимального значения $\tau_{xy}^* = \tau_s$, равны $\mu^* = \varphi^* = \pi/4$.

Будем полагать, что анизотропная сыпучая среда переходит в предельное состояние, если в точке среды существует такая площадка, вдоль которой нормальная σ_x^* и касательная τ_{xy}^* компоненты тензора напряжений связаны предельным соотношением

$$\tau_{xy}^* = f(\sigma_x^*) \quad (1.4)$$

где $f(\sigma_x)$ – известная функция, определяемая для каждого материала экспериментально.

В общем случае для обобщенно пластической анизотропной среды положим, что величина T в уравнении (1.1) не является постоянной, а зависит от гидростатического давления:

$$T = T(s) \quad (1.5)$$

и определяется так, чтобы предельная кривая (1.4) была огибающей однопараметрического семейства эллипсов (1.2). При этом

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{1}{\lambda} \sin \bar{\rho}, \quad \operatorname{tg} \bar{\rho} = \lambda \operatorname{tg} \rho \quad (1.6)$$

где ρ – в общем случае переменный угол между касательной к предельной кривой (1.4) и отрицательным направлением оси абсцисс (фиг. 1). Вид предельной кривой (1.4) и соотношение (1.6) позволяют получить искомую зависимость (1.5), после чего формулы, аналогичные (1.2), запишутся так:

$$\sigma_{x,y} = s \pm \lambda T(s) \cos 2\mu, \quad \tau_{xy} = T(s) \sin 2\mu \quad (1.7)$$

и после подстановки их в уравнения равновесия в отсутствие внешних сил получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(s + \lambda T(s) \cos 2\mu) + \frac{\partial}{\partial y}(T(s) \sin 2\mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(T(s) \sin 2\mu) + \frac{\partial}{\partial y}(s - \lambda T(s) \cos 2\mu) = 0 \quad (1.8)$$

Если граничные условия рассматриваемой задачи заданы в напряжениях, то уравнения (1.8) совместно с (1.5) позволяют полностью определить напряженное состояние и соответствующие предельные нагрузки. Следовательно, задача предельного равновесия ортотропной сыпучей среды при условии пластичности общего вида является статически определимой.

Полагая, что функция $T(s)$ (1.5) – пластический потенциал, для компонент скоростей деформации найдем

$$\dot{\epsilon}_{x,y} = \frac{v}{2\lambda} (\sin \bar{\rho} \pm \cos 2\mu), \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{v}{2} \sin 2\mu \quad (1.9)$$

Неопределенный множитель v связан с величиной максимальной скорости сдвига g так:

$$g = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \dot{\gamma}_{xy}} = \frac{v \cos 2\mu}{2\lambda \cos 2\psi} \quad (1.10)$$

где 2ψ – угол между максимальной скоростью деформации $\dot{\epsilon}_1$ и осью анизотропии x , связанный с углом φ (1.3) соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} = \lambda^2 \operatorname{tg} 2\varphi \quad (1.11)$$

которое показывает, что в силу анизотропии среды главные оси тензоров напряжений и скоростей деформации не совпадают.

Скорость относительного изменения объема

$$e = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} = \frac{v}{2\lambda} \sin \bar{\rho}$$

связана с величиной (1.10) соотношением

$$e = g \sin \bar{\rho} \frac{\cos 2\psi}{\cos 2\mu} = -g \cos 2\alpha; \quad \cos 2\alpha = -\sin \bar{\rho} \frac{\cos 2\psi}{\cos 2\mu} \quad (1.12)$$

Поскольку угол $\alpha \geq \pi/4$, деформации сдвига вызывают увеличение объема, так называемую дилатансию, или распаковку.

С помощью формул (1.9)–(1.11) выражения компонент скоростей деформаций в системе координат t, n повернутой относительно x, y на угол β в положительном направлении, запишутся так:

$$\dot{\epsilon}_n, \dot{\epsilon}_t = e \pm g \cos 2(\psi - \beta), \quad \dot{\gamma}_{tn} = g \sin 2(\psi - \beta) \quad (1.13)$$

Заменяя в формулах (1.9) компоненты тензора скоростей деформаций через составляющие u, v вектора скорости \mathbf{v} , уравнение для скоростей получим в виде

$$2\lambda \sin 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\cos 2\mu + \sin \bar{\rho}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad 2\lambda \sin 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = (-\cos 2\mu + \sin \bar{\rho}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.14)$$

Можно показать, что если $0 \leq \bar{\rho} \leq \pi/2$, то уравнения (1.8) и (1.14) принадлежат к гиперболическому типу и имеют два совпадающих семейства характеристик. Получающиеся выражения имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся.

2. Сыпучая среда Кулона. С целью упрощения дальнейших выкладок допустим, что предельное соотношение (1.4) является критерием Кулона

$$\tau_{xy}^* = k - \sigma_x^* \operatorname{tg} \rho = (H - \sigma_x^*) \operatorname{tg} \rho \quad (2.1)$$

Отметим, что в статике сыпучих сред величины k и $H = k \operatorname{ctg} \rho$ называются соответственно коэффициентом сцепления и приведенным коэффициентом сцепления, а ρ – углом внутреннего трения. Зависимость (1.5) примет вид

$$T = \frac{1}{\lambda} (H - s) \sin \bar{\rho} \quad (2.2)$$

причем $\operatorname{tg} \bar{\rho} = \lambda \operatorname{tg} \rho = \operatorname{const}$.

Критерий текучести, аналогичный (1.1), будет таким:

$$\lambda^2 \tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(H - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 \bar{\rho} \quad (2.3)$$

Уравнения, подобные (1.7), запишутся так:

$$\sigma_{x,y} = s \pm (H - s) \sin \bar{\rho} \cos 2\mu, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{\lambda} (H - s) \sin \bar{\rho} \sin 2\mu \quad (2.4)$$

а уравнения (1.14), так же как и формулы (1.9)–(1.13), не изменятся, если учесть, что в этом случае $\sin \bar{\rho} = \operatorname{const}$.

Подставляя выражения (2.4) в уравнения равновесия и вводя замену

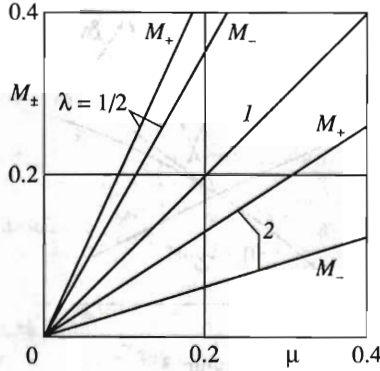
$$(H - s) = H \operatorname{tg} \bar{\rho} \exp(2zt \operatorname{tg} \bar{\rho})$$

получим

$$\begin{aligned} (1 - \sin \bar{\rho} \cos 2\mu) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\lambda} \sin \bar{\rho} \sin 2\mu \frac{\partial z}{\partial y} + \cos \bar{\rho} \sin 2\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{1}{\lambda} \cos \bar{\rho} \cos 2\mu \frac{\partial \mu}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\lambda} \sin \bar{\rho} \sin 2\mu \frac{\partial z}{\partial x} - (1 + \sin \bar{\rho} \cos 2\mu) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \cos \bar{\rho} \cos 2\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + \cos \bar{\rho} \sin 2\mu \frac{\partial \mu}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения (1.14), (2.5) принадлежат к гиперболическому типу и имеют два семейства характеристик, которые можно записать так:

$$\eta = z - M_+ = \operatorname{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) \quad (2.6)$$



Фиг. 2

$$\xi = z + M_- = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \text{tg}(\psi + \alpha) \quad (2.7)$$

где

$$z = -\int \frac{ds}{2\text{tg}\bar{\rho}(H-s)} = \frac{1}{2\text{tg}\bar{\rho}} \ln \frac{H-s}{H\text{tg}\bar{\rho}} \quad (2.8)$$

$$M_{\pm} = \int \frac{\cos\bar{\rho}(\cos^2 2\mu + \lambda^2 \sin^2 2\mu) d\mu}{\lambda\sqrt{\cos^2 2\mu + \lambda^2 \sin^2 2\mu} - \sin^2 \bar{\rho} \pm (\lambda^2 - 1)\sin\bar{\rho} \sin 2\mu \cos 2\mu}$$

Зависимости $M_{\pm}(\mu)$ для ряда значений λ показаны на фиг. 2.

Отметим, что в изотропном случае ($\lambda = 1$) $M_{\pm} = \mu = \phi$, а уравнения (1.8), (1.14) преобразуются в аналогичные уравнения работы [16]. Характеристики (2.6), соответствующие значению характеристического параметра $\eta = \text{const}$, обычно называют характеристиками первого семейства. Характеристики (2.7) – $\xi = \text{const}$ – второго семейства. Подобно аналогичным уравнениям изотропной теории идеальной пластичности и механики сыпучей среды уравнения (2.6), (2.7) допускают частные решения, соответствующие постоянным значениям характеристических параметров η, ξ .

Если в некоторой области $\eta = \eta_0 = \text{const}$, а величина ξ – переменная, то вдоль каждой из характеристик второго семейства (2.7) величины ψ, μ и α постоянны, и они будут прямыми линиями. При этом уравнения (2.7) могут быть проинтегрированы, а их интегралы записаны так:

$$X = y \cos(\psi + \alpha) - x \sin(\psi + \alpha) = X(\xi), \quad V = u \cos(\psi + \alpha) + v \sin(\psi + \alpha) = V(\xi) \quad (2.9)$$

$$z - M_+ = \eta_0, \quad M_+ + M_- = \xi + \eta_0$$

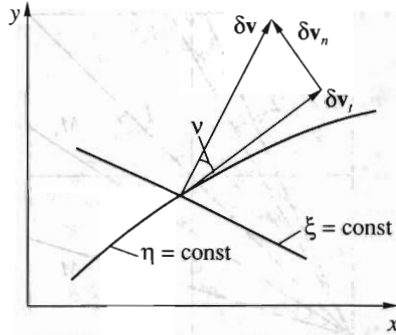
где $X(\xi)$ и $V(\xi)$ – произвольные функции, которые определяются соответствующими краевыми условиями. Характеристики первого семейства в плоскости координат x, y и годографа u, v криволинейны, они пересекают прямые линии (2.9) под углами 2α .

Если в некоторой области $\xi = \xi_0 = \text{const}$, а величина η – переменная, то интегралы уравнений (2.6) будут такими:

$$Y = y \cos(\psi - \alpha) - x \sin(\psi - \alpha) = Y(\eta), \quad U = u \cos(\psi - \alpha) + v \sin(\psi - \alpha) = U(\eta) \quad (2.10)$$

$$z + M_- = \xi_0, \quad M_+ + M_- = \xi_0 + \eta$$

т.е. прямыми линиями будут характеристики первого семейства.



Фиг. 3

Когда в пластической области постоянны оба характеристических параметра: $\eta = \eta_0$, $\xi = \xi_0$, тогда оба характеристических семейства – параллельные прямые, причем прямые первого и второго семейства пересекаются под постоянным углом $2\alpha_0$, и напряженное состояние в этой области постоянно. Отметим, что введенные величины U (2.10) и V (2.9) представляют собой ортогональные проекции вектора скорости v на направления первого и второго семейства характеристик соответственно.

Выведем условие на линиях, вдоль которых напряжения непрерывны, а вектор скорости разрывен. Рассмотрим такую линию с касательной осью t и нормальной осью n . Будем полагать, что при переходе через линию разрыва как касательная v_t , так и, вследствие дилатансии (1.12), нормальная v_n составляющие скорости могут быть разрывны. Ясно, что скорости v_t и v_n мало изменяются вдоль этой линии, а потому можно положить

$$\dot{\epsilon}_n = \partial v_n / \partial n, \quad \dot{\epsilon}_t = 0, \quad 2\dot{\gamma}_{tn} = \partial v_t / \partial n$$

Из соотношений (1.13), если $\dot{\epsilon}_t = 0$, получим

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\psi \pm \alpha), \quad \beta = \psi \pm \alpha \quad (2.11)$$

т.е. линии разрыва должны совпадать с одной из линий скольжения. Тогда остальные скорости деформации дают следующие равенства:

$$\partial v_n / \partial n = -2g \cos 2(\psi - \beta), \quad \partial v_t / \partial n = \pm 2g \sin 2(\psi - \beta) \quad (2.12)$$

Из последних соотношений получаем

$$\delta v_n / \delta v_t = \mp \operatorname{ctg} 2(\psi - \beta) = \mp \operatorname{ctg} 2\alpha$$

где через δv_n и δv_t обозначены нормальная и касательная составляющие скачка скорости δv .

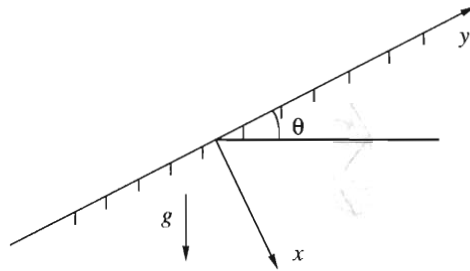
Пусть линии разрыва скорости принадлежат семейству линий скольжения $\eta = \operatorname{const}$ (фиг. 3). Если представить угол 2α в виде $2\alpha = \pi/2 + \nu$, то можем записать

$$\delta v_n / \delta v_t = \operatorname{tg} \nu$$

т.е. вектор δv наклонен к линии разрыва под углом ν и образует с линией скольжения семейства $\xi = \operatorname{const}$ прямой угол. Следовательно, вектор δv имеет нулевую проекцию на линию скольжения $\xi = \operatorname{const}$ и проекция вектора скорости V (2.9) на эту линию скольжения меняется непрерывно.

Если линия разрыва скорости принадлежит семейству $\xi = \operatorname{const}$, то

$$\delta v_n / \delta v_t = -\operatorname{tg} \nu$$



Фиг. 4

и вектор dv имеет нулевую проекцию на линию скольжения $\eta = \text{const}$, т.е. проекция вектора скорости U (2.10) на эту линию при переходе через линию разрыва меняется непрерывно.

3. Предельное равновесие весомого слоя. Рассмотрим слой высоты h из ортотропного сыпучего материала, лежащий на жестком основании, нагруженный объемными силами собственного веса γ , свободная поверхность которого образует угол θ с горизонтом и свободна от напряжений. В изотропном случае задача о предельном равновесии такого слоя впервые была поставлена и решена Ренкином [17] и подробно рассмотрена Надаи [18]. Решение этой задачи можно получить в простой и наглядной форме, если допустить, что материал идеально сыпучий, т.е. в формулах (2.1)–(2.4) величины $k = H = 0$.

Введем прямоугольную систему координат, ось y которой направлена вверх вдоль слоя, а ось x – вглубь слоя (фиг. 4). Учитывая, что напряженное состояние не зависит от координаты y и на свободной поверхности $x = 0$ имеем $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, из уравнений равновесия найдем

$$\sigma_x = -\gamma x \cos \theta, \quad \tau_{xy} = \gamma x \sin \theta \quad (3.1)$$

Положив в формулах (2.4) $H = 0$ и приравняв соответствующие компоненты тензора напряжений значениям (3.1), для нахождения искомых функций s и μ получим два уравнения

$$s \omega \sin 2\mu = -\lambda \gamma x \sin \theta, \quad s(1 - \omega \cos 2\mu) = -\gamma x \cos \theta, \quad \omega = \sin \bar{\rho} \quad (3.2)$$

которые имеют два комплекта решений

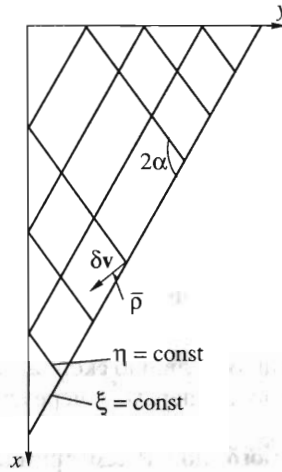
$$\sin 2\mu_{a,p} = \omega^{-1} \sin \chi (\cos \chi \pm \sqrt{\omega^2 - \sin^2 \chi}), \quad s_{a,p} = -\gamma x \cos \theta / (1 - \omega \cos 2\mu_{a,p}) \quad (3.3)$$

где введено обозначение $\text{tg } \chi = \lambda \text{tg } \theta$. Нетрудно показать, что если $\theta < \rho$, то $\omega^2 > \sin^2 \chi$.

В механике сыпучих сред напряженное состояние, соответствующее знаку плюс в первом равенстве (3.3), называется минимальным, или активным, а знаку минус – максимальным, или пассивным. Смысл этих терминов будет ясен из решения задачи для скоростей.

Первая формула (3.3) показывает, что угол μ не зависит от координаты x , поэтому каждое из двух семейств характеристик состоит из параллельных прямых, причем прямые первого и второго семейства пересекаются под углом 2α . Из нее также следует, что, когда $\chi = \bar{\rho}$, $\theta = \rho$, т.е. угол склона равен углу внутреннего трения, два комплекта решений совпадают:

$$\mu_a = \mu_p = \mu^* = \pi/4 - \bar{\rho}/2, \quad s_a = s_p = -\gamma x \cos \rho / (1 - \omega^2) \quad (3.4)$$



Фиг. 5

и компоненты тензора напряжений σ_x^* , τ_{xy}^* удовлетворяют (при $H = 0$) критерию Кулона (2.1). При этом величины ψ^* и α^* , определяющие углы наклона характеристик, будут такими:

$$\psi^* = \pi/4 - \rho/2, \quad \alpha^* = \pi/4 + \rho/2$$

Следовательно, как и в изотропном случае [18], характеристики первого семейства (2.6) – вертикальные прямые, параллельные силе тяжести, а характеристики второго семейства (2.7) – прямые, параллельные склону.

Рассмотрим второй крайний случай, когда угол склона равен нулю. В этом случае

$$\mu_a = \psi_a = \pi/2, \quad \alpha_a = \pi/4 + \bar{\rho}/2, \quad s_a = -\gamma x/(1 + \omega), \quad \sigma_y^a = -\gamma x(1 - \omega)/(1 + \omega) \quad (3.5)$$

и соответствующее напряженное состояние будет активным, а поле характеристик показано на фиг. 5.

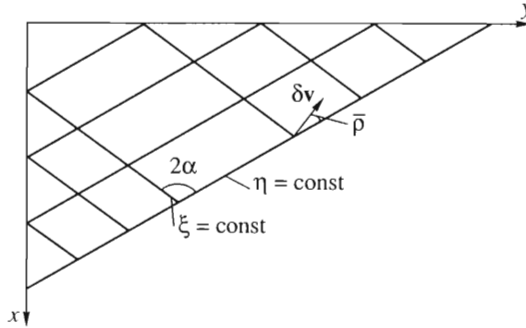
Для второго комплекта решений из соотношений (3.3) получим

$$\mu_p = \psi_p = 0, \quad \alpha_p = \alpha_a, \quad s_p = -\gamma x/(1 - \omega), \quad \sigma_y^p = -\gamma x(1 + \omega)/(1 - \omega) \quad (3.6)$$

и напряженное состояние будет пассивным, а поле характеристик показано на фиг. 6.

Когда угол склона $\theta < \rho$, нижняя граница склона $x = h$ не является характеристикой, и следовательно, на ней скорости должны быть непрерывны, т.е. $u = v = 0$. Поскольку эти условия определяют задачу Коши для однородных уравнений (1.14), во всем слое скорость движения среды будет нулевой. Следовательно, полагать, что решения (3.3), так же как и (3.5), (3.6), справедливы на протяжении всего склона, нельзя. Однако их можно трактовать как решение задачи о давлении среды на подпорную стенку.

Для случая $\theta = 0$ поле скоростей можно построить, если допустить, что плоскость $y = 0$ – поверхность идеально гладкой подпорной стенкой. Если среда сдвигает стенку, и она движется влево, то напряженное состояние описывается формулами (3.5), поле характеристик показано на фиг. 5. При этом ограничивающая пластическую область характеристика семейства $\xi = \text{const}$, проходящая через точку $y = 0$, $x = h$ (нижний край стенки), будет линией разрыва скоростей. Вдоль этой линии проекция вектора скорости U (2.10) непрерывна и, следовательно, равна нулю, а полный вектор скорости δv , с которым пластическая область движется как жесткое целое, образует с линией разрыва постоянный угол $\bar{\rho}$.



Фиг. 6

Если же стенка сдвигает среду и движется вправо, то напряженное состояние в среде описывается формулами (3.6), линия разрыва скорости, ограничивающая пластическую область, принадлежит семейству характеристик $\eta = \text{const}$. Поле характеристик и направление движения пластической области показано на фиг. 6.

Сила давления среды на стенку для этих случаев определяется напряжениями σ_y^a (3.5) или σ_y^p (3.6) и соответственно называется активным (Na) или пассивным (Np). Численные значения этих сил для угла внутреннего трения, такого, что $\sin \rho = 1/3$, и ряда значений λ представлены ниже

λ	0.5	1	2
$\sin \bar{\rho}$	0.17	0.33	0.58
$2Na(\gamma h^2)$	0.7	0.5	0.27
$2Np(\gamma h^2)$	1.42	2	3.73

Значение $\lambda = 1$ соответствует классическому решению Ренкина [18] для изотропной сыпучей среды.

Отметим, что движущей силой при активном напряженном состоянии является сила веса сползающей массы сыпучего материала, работа которой будет затрачена на диссипацию энергии за счет сил внутреннего трения вдоль линии разрыва скорости и работу противодействия стенки. В случае пассивного напряженного состояния движущей силой будет сила давления подпорной стенки, работа которой будет по-прежнему затрачена на диссипацию энергии вдоль линии разрыва скорости и изменение потенциальной энергии сдвигаемой массы сыпучего материала.

Аналогичным образом с помощью формул (3.3) могут быть получены напряженные состояния и построены поля скоростей в окрестности подпорной стенки для угла склона $0 < \theta < \rho$.

Если угол склона равен углу внутреннего трения, то напряженное состояние дается формулами (3.4), и в этом случае жесткопластическая граница $x = h$ является характеристикой семейства $\xi = \text{const}$, которая параллельна склону. Она будет линией разрыва скорости, вектор скорости движения среды образует с ней угол ρ и слой на всем своем протяжении движется с постоянной скоростью в горизонтальном направлении. Следовательно, весь слой переходит в состояние пластического течения только при его угле склона равном углу внутреннего трения, при меньших углах пластическое течение возможно лишь в ограниченных областях, примыкающих к подпорной стенке. Проведен-

ный анализ поля скоростей и предложенная трактовка решения задачи Ренкина справедлива также и для изотропного случая, и она не описана в литературе.

В заключение отметим, что при использовании известных методов и подходов [19] уравнение (1.8) можно проинтегрировать, и на базе разработанной теории предельного равновесия может быть построена более полная теория упругопластического деформирования анизотропных обобщенно пластических сред деформационного типа.

Автор благодарит Д.С. Кондратьева за обсуждение работы и А.А. Комарову за помощь при расчетах и оформлении результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-05-97200-р2004) и Программы Министерства образования РФ "Развитие потенциала высшей школы в 2006–2008 гг." (6827).

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden // ZAMM. 1921. Bd. 1. H. 1. S. 15–20.
2. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 243 с.
3. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis on limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. № 2. P. 157–165.
5. Ширко И.В. Поля скоростей при условии пластичности общего вида // Тр. МФТИ. 1961. Т. 7. С. 71–84.
6. Ширко И.В. Разрывы полей напряжений при условии пластического общего вида // Инж. ж. 1961. Т. 1. № 3. С. 188–192.
7. Ширко И.В. Некоторые задачи теории пластичности со смешанными граничными условиями // Инж. ж. 1962. Т. 2. № 2. С. 305–310.
8. Shirko I.V. Effective method of numerical solving the problems of plastic flow of materials // Proc. Advanced Techn. of Plasticity. Kyoto. 1990. V. 1. P. 435–439.
9. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 207 с.
10. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1072.
11. Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643–669.
12. Далматов Б.И., Бронин В.Н., Карлов В.Д. и др. Механика грунтов // Основы геотехники. Ч. 1. М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГА-СУ, 2000. 201 с.
13. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты. М.: Изд-во АСВ, 1994. 524 с.
14. Ширко В.И., Кондратьев Д.В., Стеценко П.В. Деформационная теория в механике гранулированных сред // Механика композ. матер. и конструкций. 2002. Т. 8. № 4. С. 555–573.
15. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950 = Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат., 1956. 407 с.
16. Соколовский В.В. Об уравнениях теории пластичности // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 41–54.
17. Rankine W.J.M. On the stability of loose earth // Proc. Roy. Soc. London, 1857. V. 8. P. 185–187.
18. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. V. 2. N.Y., etc., McGraw-Hill, 1963 = Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
19. Кондратьев Д.В., Стеценко П.В., Ширко В.И. Упругопластическое деформирование и предельное равновесие сыпучих сред // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 116–134.