

УДК 539. 374

© 2006 г. Р. И. Непершин

ВНЕДРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ШТАМПА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ НАЛИЧИИ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

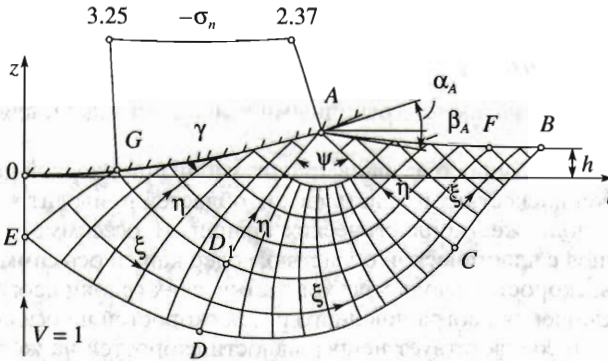
Приводятся расчеты процесса вдавливания сферического штампа в идеально пластическое полупространство при условии полной пластичности с учетом контактного трения, моделируемого по Прандтлю и Кулону. Трение приводит к образованию жесткой зоны в центре штампа при скольжении материала на остальной части границы контакта. Получены предельные значения коэффициентов трения, при которых жесткая зона распространяется по всей границе контакта. Зависимость усилия вдавливания от радиуса пластического отпечатка хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Было приведено [1–3] решение осесимметричной задачи идеальной пластичности о распределении напряжений в пластической области при давлении гладкого плоского и сферического штампов на пластическое полупространство с прямолинейной границей. Построены поля скоростей пластического течения, удовлетворяющего условию неотрицательности диссипации энергии, и указано статически допустимое продолжение поля напряжений в жесткую область в задаче о давлении гладкого сферического штампа на полупространство с прямолинейной границей [3, 4]. Представлены результаты моделирования нестационарного процесса вдавливания гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство и дан расчет формы свободной границы пластической области около штампа [5]. Для гладкого штампа при больших радиусах отпечатка расчетная зависимость силы внедрения от радиуса пластического отпечатка оказывается ниже экспериментальной зависимости [6] вследствие влияния контактного трения.

Ниже приводятся расчеты нестационарного процесса пластического течения при вдавливании сферического штампа в идеально пластическое полупространство при наличии контактного трения. В отличие от рассмотренных ранее задач [1–6] представленная модель показывает образование жесткой зоны материала перед штампом, зависящей от трения. Учет контактного трения приводит к лучшей корреляции расчетной зависимости силы вдавливания сферического штампа от радиуса пластического отпечатка с экспериментальными данными [6] по сравнению с расчетами вдавливания гладкого сферического штампа [1–5].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим вдавливание сферического штампа в идеально пластическое полупространство в цилиндрических координатах $\{r, z, \theta\}$, связанных с движущимся штампом, началом координат в нижней точке штампа. В этих координатах штамп неподвижен, а полупространство перемещается вдоль оси z со скоростью вдавливания штампа, которую принимаем за характерную скорость задачи и полагаем равной единице ($V = 1$).

На фиг. 1 показана форма пластической области справа от оси симметрии при вдавливании штампа радиуса R на глубину h относительно недеформированной горизонтальной границы полупространства. Текущую стадию вдавливания задаем углом α_A дуги контакта штампа с пластической областью. Так как при вдавливании штампа пластическая область имеет размеры порядка длины дуги контакта, то при расчетах пластического течения на текущей стадии вдавливания за характерный размер принимаем длину дуги контакта $R\alpha_A = 1$. При моделировании процесса вдавливания от начала контакта штампа с полупространством до конечной глубины вдавливания с радиусом



Фиг. 1

пластического отпечатка $R \sin \alpha_A$ за характерный размер принимаем радиус штампа $R = 1$. Напряжения также считаем безразмерными, отнесенными к пределу текучести материала σ_Y при одноосном сжатии.

При условии пластичности Треска трехмерная пластическая деформация изотропно-идеально пластического материала происходит сдвигом по двум плоскостям скольжения. При этом напряженное состояние соответствует условию полной пластичности, которое для рассматриваемой задачи в пространстве главных напряжений имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 - 1 \tag{1.1}$$

Направления главных напряжений σ_1 и σ_3 находятся в плоскости $\{r, z\}$, и σ_2 совпадает с окружным напряжением σ_θ . При условии (1.1) осесимметричная задача идеальной пластичности является статически определимой и гиперболической [3]. Характеристики для напряжений и скоростей перемещений совпадают с линиями скольжения ξ и η на плоскости $\{r, z\}$

$$dz/dr = \operatorname{tg} \varphi \text{ для } \xi \text{ и } dz/dr = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ для } \eta \tag{1.2}$$

где φ – угол между касательной к линии скольжения ξ и осью r . Вдоль линий скольжения выполняются дифференциальные соотношения для $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и φ

$$d\sigma - d\varphi = \frac{dr + dz}{2r} \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = \frac{dr - dz}{2r} \text{ вдоль } \eta \tag{1.3}$$

и для проекций V_ξ, V_η вектора скорости перемещения на линии скольжения ξ и η

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{V_\xi dr - V_\eta dz}{2r} \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{V_\xi dz + V_\eta dr}{2r} \text{ вдоль } \eta \tag{1.4}$$

Скорости перемещений в цилиндрических координатах связаны с V_ξ и V_η соотношениями

$$\begin{aligned} V_\xi &= V_r \cos \varphi + V_z \sin \varphi, & V_\eta &= V_z \cos \varphi - V_r \sin \varphi \\ V_r &= V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, & V_z &= V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi \end{aligned} \tag{1.5}$$

Дифференциальные соотношения (1.4) допускают разрывы скоростей перемещений $[V_\xi], [V_\eta]$ вдоль линий скольжения ξ и η , которые в отличие от постоянных разрывов скоростей при плоской деформации являются переменными вследствие неоднородности соотношений (1.4) и определяются выражениями [7–9]

$$[V_\xi] = \frac{C_1}{\sqrt{r}}, \quad [V_\eta] = \frac{C_2}{\sqrt{r}} \quad (1.6)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются граничными условиями задачи для скоростей перемещений.

В задачах Прандтля и Хилла о вдавливании штампов при плоской деформации кинематическое сопряжение жестких и пластических областей приводит к постоянным разрывам скоростей вдоль жесткопластических границ. В осесимметричных задачах о вдавливании штампов с пластической областью, содержащей ось симметрии, при $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$ разрывы скоростей вдоль жесткопластических границ неограниченно растут при $r \rightarrow 0$. Для исключения неограниченного роста скоростей на оси симметрии принимают $C_1 = C_2 = 0$, что соответствует непрерывности скоростей на жесткопластических границах. Кинематическое сопряжение жестких зон, имеющих различные скорости и ограниченных линиями скольжения с общей точкой на оси симметрии, выполняется с помощью автомодельного сингулярного решения в малой окрестности точки пересечения жесткопластических границ с осью симметрии [7–9].

В пластической области должно выполняться условие неотрицательности скорости диссипации энергии пластического течения

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0 \quad (1.7)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные скорости деформаций. При условии полной пластичности (1.1) из условия (1.7) и условия несжимаемости $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ следует неравенство $\varepsilon_3 \leq 0$, которое показывает, что диссипативная функция неотрицательна, если скорость удлинения линейного элемента вдоль траектории напряжения σ_3 отрицательна. В криволинейных координатах, связанных с направлениями главных напряжений σ_3 и σ_1 , это неравенство имеет вид

$$dV_3 - V_1 d\varphi \leq 0 \quad (1.8)$$

где $d\varphi$ – угол поворота касательной к элементу дуги траектории напряжения σ_3 ; V_3 и V_1 – проекции вектора скорости на направления σ_3 и σ_1 , связанные с V_ξ и V_η соотношениями

$$V_3 = (V_\xi - V_\eta)/\sqrt{2}, \quad V_1 = (V_\xi + V_\eta)/\sqrt{2} \quad (1.9)$$

Неравенство (1.8) удобно проверять при численном моделировании процесса вдавливания штампа с выводом на экран монитора линий скольжения на физической плоскости $\{r, z\}$ и поля скоростей перемещений на плоскости годографа $\{V_r, V_z\}$.

В случае гладкого штампа граница контакта с пластической областью распространяется по всей дуге $R\alpha_A$, и линии скольжения пересекают эту границу под углом $\pi/4$. Трение на границе контакта приводит к образованию жесткой области в центральной части штампа, ограниченной линией скольжения η , которая пересекает ось симметрии в точке E под углом $\pi/4$ и границу штампа в точке G под углом, зависящим от касательного напряжения контактного трения. Эта область представляет собой "нарост" материала перед штампом, который наблюдается на практике и используется для экспериментальной оценки коэффициента трения [10].

На остальной части дуги контакта происходит скольжение пластического материала по границе штампа с касательными напряжениями, зависящими от закона трения. В настоящей работе использовали модели контактного трения по Прандтлю и Кулону. По модели Прандтля касательное напряжение контактного трения принимается постоянной величиной μ и трактуется как сопротивление сдвигу контактного слоя, зависящее от смазки, состояния поверхности и других факторов. Значение μ ограничено пределом

текучести пластического материала при сдвиге и может изменяться в интервале $0 < \mu < 1/2$. Трение по Прандтлю обычно применяется в технологических задачах теории пластичности при больших контактных давлениях [10, 11]. При моделировании контактного трения по Кулону касательные напряжения рассчитываются вместе с неизвестными нормальными напряжениями. Ниже найден интервал значений коэффициента трения f по Кулону, в котором среднее контактное касательное напряжение при заданном значении f близко к значению μ , и поля напряжений и скоростей пластического течения для моделей Прандтля и Кулона близки между собой.

Процесс вдавливания штампа в полупространство моделируем последовательностью шагов нагружения, изменяя угол дуги контакта α_A от нуля до предельного значения, при котором сохраняется структура поля линий скольжения, показанная на фиг. 1. При каждом шаге нагружения вычисляем свободную границу AB , форму и размеры пластической области для приводимых ниже граничных условий для напряжений и скоростей перемещений.

2. Граничные условия. Уравнение границы штампа OA (фиг. 1) запишем в параметрической форме

$$r = \sin \alpha / \alpha_A, \quad z = (1 - \cos \alpha) / \alpha_A, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A \quad (2.1)$$

где α_A – угол наклона касательной в точке A к дуге контакта OA , принятой за характерный размер $R\alpha_A = 1$. При наличии трения линии скольжения η пересекают границу контакта под углом γ , который может изменяться от нуля для абсолютно шероховатого штампа до $\pi/4$ для идеально гладкого штампа. Касательное напряжение τ и нормальное давление p на границе скольжения AG определяются соотношениями

$$\tau = \frac{1}{2} \cos 2\gamma, \quad p = \frac{1}{2} \sin 2\gamma - \sigma \quad (2.2)$$

где σ – среднее напряжение, фигурирующее в выражениях (1.3), и углы γ , ϕ и α связаны соотношением

$$\gamma = \phi - \alpha + \pi/2 \quad (2.3)$$

При моделировании контактного трения по Прандтлю задаем $\tau = \mu$, ($0 < \mu < 1/2$); из первого соотношения (2.2) находим угол γ и из (2.3) находим угол ϕ в точках границы скольжения AG , заданных углом α в соотношениях (2.1). При моделировании контактного трения по Кулону задаем коэффициент трения f и из выражений (2.2) и (2.3) получаем нелинейную зависимость между σ и ϕ

$$f(2\sigma + \sin 2(\phi - \alpha)) - \cos 2(\phi - \alpha) = 0 \quad (2.4)$$

При условии полной пластичности (1.1) свободная от внешних напряжений граница AB пластической области находится в состоянии одноосного сжатия и совпадает с направлением главного напряжения σ_3

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -1 \quad (2.5)$$

Расчеты полей скоростей начального осесимметричного пластического течения при вдавливании штампов в полупространство [3, 4, 8, 9] показывают увеличение скоростей точек на свободной горизонтальной границе AB от точки B к точке A , которое приводит к наклонному поднятию и искривлению свободной границы пластической области около сферического штампа, наблюдаемого в экспериментах [6].

В настоящей работе при моделировании нестационарного процесса вдавливания сферического штампа границу AB принимаем гладкой кривой с непрерывным изменением угла наклона касательной от максимального значения β_A в точке A до нуля в точке B вследствие непрерывности изменения скоростей перемещений вдоль жесткопластичес-

кой границы $BCDE$. Из соотношений (2.5) следуют граничные условия на AB для дифференциальных соотношений (1.2), (1.3)

$$\sigma = -1/2, \quad \varphi = \pi/4 - \beta, \quad \beta = -\arctg(dz/dr) \text{ на } AB \quad (2.6)$$

Так как граница AB текущей стадии вдавливания образуется материальными точками, перемещающимися с границы $A'B'$ предыдущей стадии вдавливания, то на этой границе должно выполняться дифференциальное соотношение для перемещений

$$ds/V = dh \text{ на } AB \quad (2.7)$$

где ds – средний модуль вектора перемещения точки на текущую границу AB с предыдущей границы $A'B'$ за "время" dh , V – средний модуль вектора скорости рассматриваемой точки за "время" dh и dh – приращение глубины вдавливания $h = z_B$. Вследствие несжимаемости пластического материала объем, вытесненный сферическим сегментом штампа высотой h , равен объему пластической области над границей $z = z_B$. Из этого условия следует зависимость между h и свободной границей AB пластической области

$$h = \frac{1}{r_B^2} \left[z_A \left(r_A^2 - \frac{1}{3} z_A^2 \right) + 2 \int_A^B z r dr \right]; \quad r_A = \frac{\sin \alpha_A}{\alpha_A}, \quad z_A = \frac{1 - \cos \alpha_A}{\alpha_A} \quad (2.8)$$

где r_A, z_A – координаты точки A .

Точка A является вырожденной ξ -линией скольжения с полярной особенностью изменения напряжений и скоростей перемещений в пределах угла ψ центрированного веера

$$\psi = \frac{3}{4}\pi - (\alpha_A + \beta_A + \gamma) \quad (2.9)$$

Неравенство $\psi > 0$ определяет предельное значение угла контакта α_A и глубины вдавливания штампа h , для которого поле линий скольжения в пластической области имеет вид, показанный на фиг. 1. Из первого соотношения (1.3) в особой точке A и граничного условия (2.6) находим σ и φ в этой точке

$$\sigma = -(1/2 + \zeta), \quad \varphi = \pi/4 - (\beta_A + \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq \psi \quad (2.10)$$

При моделировании контактного трения по Прандтлю угол γ , определяющий центрированный веер по соотношению (2.9) при заданных α_A и β_A , находим из первого соотношения (2.2) при $\tau = \mu$. При моделировании контактного трения по Кулону из соотношений (2.2), (2.9) и (2.10) при $\zeta = \psi$ получаем нелинейное уравнение для угла γ в точке A на границе контакта штампа с пластической областью

$$\cos 2\gamma + f \left(2 \left(\gamma + \alpha_A + \beta_A - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\pi \right) - \sin 2\gamma \right) = 0 \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) решаем итерационным методом Ньютона.

Для гладкого штампа граница скольжения GA совпадает со всей границей контакта OA , и центральная жесткая область стягивается к точке O . С другой стороны, существуют предельные значения коэффициентов трения μ^* и f^* , при которых граница скольжения GA стягивается к точке A , и точка D совпадает с точкой E на оси симметрии (фиг. 1).

Предельные коэффициенты трения определяем из условий попадания точки D на ось симметрии, которую линии скольжения пересекают под углом $\pi/4$. При известной свободной границе AB пластической области координаты точки D и угол φ в этой точке находим из решения задачи Коши в области ABC для дифференциальных соотношений (1.2), (1.3) и граничных условий (2.6) и задачи Гурса в области ACD от линии скольжения AC и от особой точки A с углом центрированного веера ψ . При этом жесткопластичес-

кая граница BCD определяется координатами точки B и углом ψ . В результате получаем два функциональных уравнения, определяемые граничными условиями в точке D

$$r_D(\psi, \mathbf{r}_B) = 0, \quad \varphi_D(\psi, \mathbf{r}_B) + \pi/4 = 0 \quad (2.12)$$

где \mathbf{r}_B – радиус-вектор точки B . Из этих уравнений находим угол ψ , и из соотношения (2.9) – предельный угол γ^* в точке A . Затем из первого соотношения (2.2) находим μ^* при трении по Прандтлю и из уравнения (2.11) находим f^* при трении по Кулону.

Если коэффициенты трения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu < \mu^* \quad \text{или} \quad 0 < f < f^* \quad (2.13)$$

то определяем границу EG центральной жесткой области. В этом случае находим угол $\gamma > \gamma^*$ в точке A из первого соотношения (2.2) при трении по Прандтлю или из уравнения (2.11) при трении по Кулону, а из соотношения (2.9) находим угол ψ . Пластическую область с жесткопластическими границами EG и $BCDE$ находим из решения последовательности краевых задач для дифференциальных соотношений (1.2), (1.3): задачи Коши в области ABC , задачи Гурса в области ACD , задачи смешанного типа в области AD_1G с граничными условиями на границе скольжения AG и задачи Гурса в области DD_1GE . Условия попадания точки E на ось симметрии приводят к двум функциональным уравнениям для координат точек F и B на свободной границе AB

$$r_E(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_F) = 0, \quad \varphi_E(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_F) + \pi/4 = 0 \quad (2.14)$$

где \mathbf{r}_B и \mathbf{r}_F – радиус-векторы точек B и F .

Следствие соотношения (2.7) свободная граница AB связана с кинематикой пластического течения, определяемой дифференциальными соотношениями (1.4) и приводимыми ниже граничными условиями для скоростей перемещений.

На жесткопластических границах скорости перемещения непрерывны, так как эти границы пересекают ось симметрии. На границе EG с неподвижной центральной жесткой областью имеем условия

$$V_\xi = V_\eta = 0 \quad \text{на} \quad EG \quad (2.15)$$

На границе $BCDE$ с жесткой областью полупространства заданы скорости перемещений $V_r = 0, V_z = 1$. Из первых двух соотношений (1.5) находим

$$V_\xi = \sin \varphi, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на} \quad BCDE \quad (2.16)$$

На границе скольжения AG непрерывна нормальная к границе компонента вектора скорости. Отсюда следует граничное условие

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на} \quad AG \quad (2.17)$$

где γ – угол наклона линии скольжения η к границе штампа, связанный с углами φ и α соотношением (2.3).

3. Численное решение. При моделировании процесса вдавливания сферического штампа основной проблемой алгоритма численного решения является методика вычисления неизвестной свободной границы AB полупространства около штампа, которая вследствие гиперболичности и статической определенности дифференциальных уравнений осесимметричного пластического течения определяет поле напряжений и скоростей перемещений в пластической области по граничным условиям, приведенным в разд. 2.

Вычисление границы AB из дифференциального соотношения (2.7) по численным результатам расчетов линий скольжения и скоростей перемещений на границе $A'B'$, полу-

ченной на предыдущей стадии внедрения штампа на заданный шаг dh , приводит к следующим затруднениям.

Для корректного вычисления новой границы AB по известной предыдущей границе $A'B'$ необходимо учитывать быстрое изменение границ пластической области и поля скоростей перемещений при шаге внедрения штампа dh , особенно на первой стадии внедрения, начиная от точечного контакта штампа с полупространством. Вследствие сингулярности линий скольжения и поля скоростей перемещений в особой точке A' вычисление новой точки контакта A штампа со свободной границей пластической области представляет трудную проблему. Вследствие погрешностей численного расчета узловых точек линий скольжения и скоростей перемещений, накапливаемых в процессе решения последовательности краевых задач, вычисляемая граница AB оказывается неточной и кусочно-линейной. Продолжение расчетов линий скольжения и скоростей перемещений от такой границы при дальнейшем внедрении штампа возможно только после сглаживания ее непрерывной кривой.

В настоящей работе моделирование нестационарного процесса вдавливания сферического штампа с учетом контактного трения выполнено с использованием полуобратного метода расчета свободной границы пластической области, примененного ранее [5]. Принимаем, что свободная граница AB – гладкая кривая с монотонным снижением угла наклона касательной β от максимального значения β_A в точке A на границе штампа до нуля в точке B на границе полупространства. Это допущение согласуется с распределением скоростей на свободной границе полупространства в задачах о начальном пластическом течении и с экспериментальными данными, обсуждавшимися выше.

Процесс вдавливания моделируем возрастающей последовательностью значений угла контакта α_A от нуля до конечного значения, удовлетворяющего неравенству $\psi > 0$ для центрированного веера линий скольжения в точке A . При этом сингулярная точка A определяется соотношениями (2.1) и соответствует заданию радиуса пластического отпечатка, тогда как соответствующее значение глубины внедрения штампа h находится после вычисления границы AB и численного решения задачи с проверкой погрешности дифференциального соотношения (2.7) в точках свободной границы.

Изменение угла наклона касательной β на свободной границе AB аппроксимируем степенной зависимостью от радиуса

$$\beta = \beta_A(1 - \rho^n), \quad \rho = (r - r_A)/(r_B - r_A) \quad (3.1)$$

где r_A и r_B – радиальные координаты точек A и B . Параметр n в соотношении (3.1) позволяет изменять кривизну границы AB , для того чтобы точнее удовлетворить кинематическому условию (2.7). Из соотношений (3.1) находим зависимость r от β из условия $r = r_A$ при $\beta = \beta_A$

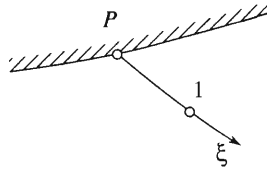
$$r = r_A + (r_B - r_A) \exp\{n^{-1} \ln(1 - \beta/\beta_A)\}, \quad 0 \leq \beta < \beta_A \quad (3.2)$$

Границу AB вычисляем численным интегрированием уравнения

$$dz/dr = -\operatorname{tg} \beta \quad (3.3)$$

с использованием соотношений (3.1) и (3.2) при равномерном шаге по углу β и заданных значениях параметров r_B , β_A , n . Координата z_B точки B равна глубине вдавливания штампа h .

Угол β_A в точке A находим из интегрального условия несжимаемости (2.8) итерационным методом Ньютона, рассматривая выражение (2.8) как неявную функцию от β_A . При начальном приближении $\beta_A^0 = 0.8 \alpha_A$ угол β_A определяется с точностью 10^{-4} практически мгновенно.



Фиг. 2

Поля линий скольжения и скоростей перемещений находим численным решением последовательности краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа, начиная от свободной границы AB , для возрастающей последовательности значений угла контакта α_A от нуля до конечного значения, удовлетворяющего неравенству $\psi > 0$. В регулярных узлах сетки линий скольжения, не принадлежащих границам, координаты узлов и значения функций σ и φ вычисляем итерационным методом [8, 9].

После интегрирования уравнения (3.3) определяется радиус-вектор точки B при заданном значении координаты r_B , и система уравнений (2.12) для определения предельных коэффициентов трения зависит от двух скалярных переменных ψ и r_B . Так как уравнения осесимметричного пластического течения определены при условии $r > 0$, численное решение системы (2.12) стандартными методами получить не удастся, поскольку функциональная матрица этой системы при $r \rightarrow 0$ оказывается плохо определенной. Решение системы (2.12) находили путем вариации значений r_B в исходных данных вычислительной программы и решения второго уравнения (2.12) относительно переменной ψ методом Ньютона с точностью 10^{-4} . Первое уравнение (2.12) выполняется с точностью $\sim 10^{-4}$ для значений r_B , задаваемых с точностью 10^{-4} .

Если коэффициенты трения меньше предельных значений, то на границе скольжения AG вычисляем последовательность узловых точек, удовлетворяющих граничным условиям (2.3) или (2.4) при моделировании контактного трения по Прандтлю или Кулону соответственно. На фиг. 2 на ξ -линии скольжения вблизи границы штампа показана точка 1, в которой σ и φ известны, и точка P пересечения этой линии с границей штампа, в которой σ и φ неизвестны. Заменяя первое уравнение (1.2) и первое соотношение (1.3) конечными разностями между точками 1 и P , получим соотношения

$$z_1 - z = (r_1 - r) \operatorname{tg} \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} = (\varphi + \varphi_1)/2 \tag{3.4}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1 - (r_1 - r + z_1 - z)/(r_1 + r) \tag{3.5}$$

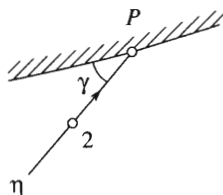
где нижним индексом единица обозначены известные величины в точке 1. Координаты r, z точки P и угол φ в этой точке определяются соотношениями (2.1) и (2.3).

При моделировании трения по Прандтлю угол γ в соотношении (2.3) определяется коэффициентом трения $\mu = \tau$ из первого соотношения (2.2). В этом случае подстановка выражений (2.1) и (2.3) в соотношения (3.4) приводит к трансцендентному уравнению для угла α , определяющего координаты точки P на границе штампа,

$$(r_1 - \sin \alpha / \alpha_A) \operatorname{tg} \hat{\varphi} + (1 - \cos \alpha) / \alpha_A - z_1 = 0 \tag{3.6}$$

$$\hat{\varphi} = (\alpha + \gamma + \varphi_1 - \pi/2)/2$$

Уравнение (3.6) решали методом Ньютона с точностью 10^{-4} . Начальное приближение α^0 , находили из уравнений (2.1) для точки пересечения границы штампа с прямой, проходящей через точку 1 с углом наклона φ_1 . Затем из соотношений (2.1), (2.3) и (3.5) находили координаты точки P и величины φ и σ в этой точке.



Фиг. 3

При моделировании контактного трения по Кулону из соотношений (2.4), (3.4) и (3.5) получаем систему нелинейных уравнений для φ и α в точке P

$$\Delta z - \Delta r \operatorname{tg} \hat{\varphi} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2}(f^{-1} \cos \theta - \sin \theta) - \sigma_1 - \varphi + \varphi_1 + (\Delta r + \Delta z)/(r_1 + r) = 0 \quad (3.8)$$

где

$$\Delta r = r_1 - r, \quad \Delta z = z_1 - z, \quad \hat{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1), \quad \theta = 2(\varphi - \alpha)$$

и координаты r и z в точке P определяются соотношениями (2.1) через угол α . Уравнения (3.7), (3.8) решали методом Бройдена [12] с точностью 10^{-4} , используя в качестве начального приближения значения φ и α в предшествующих узловых точках на границе штампа, начиная от точки A . Затем из соотношения (2.4) находили σ в точке P .

Радиус-векторы точек B и F , определяющие границы пластической области и границу скольжения AG по соотношениям (2.14), находили при интегрировании дифференциального уравнения (3.3) при расчетах свободной границы AB , задавая координаты r_B и r_F этих точек. Уравнения (2.14) решали с точностью $\sim 10^{-4}$ вариациями значений r_B и r_F в исходных данных вычислительной программы.

После вычисления поля линий скольжения определяются жесткопластические границы, на которых заданы граничные условия (2.15)–(2.17) для скоростей перемещений. Численное решение дифференциальных соотношений (1.4) с граничными условиями (2.15) и (2.16) с помощью конечно-разностных соотношений, приведенных ранее [8], дает линейную систему уравнений для скоростей перемещений в регулярных узлах сетки линий скольжения.

При расчетах скоростей перемещений в узлах сетки на границе скольжения AG использовали второе дифференциальное соотношение (1.4) и граничное условие (2.17). На фиг. 3 на η -линии скольжения вблизи границы штампа показана точка 2, в которой скорости перемещений известны, и точка P пересечения этой линии с границей штампа. Аппроксимируя второе дифференциальное соотношение (1.4) конечными разностями между точками 1 и P , получим

$$V_\eta - V_{\eta 2} + \frac{1}{2}(V_\xi + V_{\xi 2})(\varphi - \varphi_2) + \frac{1}{2}[(V_\xi + V_{\xi 2})\Delta z + (V_\eta + V_{\eta 2})\Delta r]/(r + r_2) = 0 \quad (3.9)$$

где

$$\Delta r = r - r_2, \quad \Delta z = z - z_2$$

и нижним индексом два обозначены известные величины в точке 2. Так как после определения линий скольжения в точках на границе штампа известны координаты r , z и угол φ , то соотношение (3.9) вместе с граничным условием (2.17) образуют линейную систему уравнений, из которой находим скорости V_ξ , V_η на границе скольжения AG . После реше-

ния краевых задач для поля скоростей перемещений получаем скорости в узловых точках на свободной границе AB .

При малой глубине вдавливания h левая и правая части кинематического условия (2.7) имеют порядок 10^{-3} , углы α_A и β_A малы и граница AB почти прямолинейна. При значении параметра $n = 1.65$ в соотношении (3.1) в случае максимальных коэффициентов трения по Прандтлю и Кулону при углах контакта $\alpha_A = 0.3$ и $\alpha_A = 0.25$ получена средняя относительная погрешность условия (2.7) $\sim 10^{-2}$ и максимальная относительная погрешность $\sim 10^{-1}$ при приращении глубины вдавливания $\Delta h = 0.0488$. Таким образом, при аппроксимации углов наклона касательной в узловых точках свободной границы AB зависимостью (3.1) получаем погрешность нарушения дифференциального кинематического условия (2.7), соизмеримую с погрешностью численных расчетов полей линий скольжения и полей скоростей. Возможно, что применение других методов аппроксимации свободной границы AB может снизить погрешность, связанную с нарушением условия (2.7).

Силу вдавливания штампа Q находим численным интегрированием распределения напряжений на жесткопластической границе EG и на границе скольжения AG

$$Q = 2\pi \left[\int_E^G r \left[(-\sigma) dr + \frac{1}{2} dz \right] + \int_G^A r \left[\left(\frac{1}{2} \sin 2\gamma - \sigma \right) dr + \frac{1}{2} \cos 2\gamma dz \right] \right] \quad (3.10)$$

Так как рассматриваемая задача представляет практический интерес для испытаний на твердость вдавливанием жесткого шарика в пластичные металлы, то вычисляли также безразмерные числа Мейера q_M (среднее давление на проекцию площади пластического отпечатка на плоскость перпендикулярную оси z) и Бринелля q_B (среднее давление на площадь поверхности пластического отпечатка)

$$q_M = Q/(\pi r_A^2), \quad q_B = Q/[\pi(r_A^2 + z_A^2)] \quad (3.11)$$

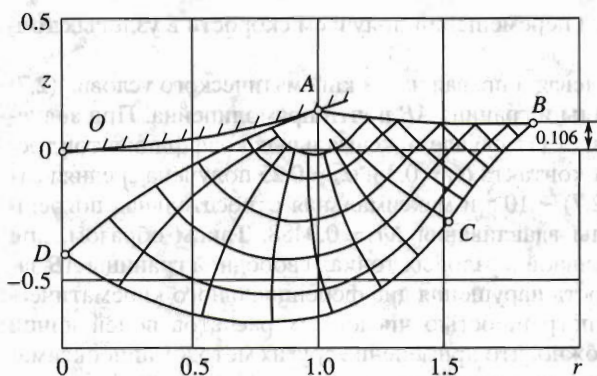
4. Численные результаты. Ниже приведены результаты расчетов предельных коэффициентов трения μ^* и f^* по Прандтлю и Кулону в зависимости от угла контакта α_A и соответствующие значения относительной глубины вдавливания h/R , относительного радиуса пластического отпечатка r_A/R и безразмерных чисел твердости q_M и q_B

α_A	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
$\mu^* \cdot 10^3$	397	425	452	473	488	496	500
$f^* \cdot 10^3$	146	169	180	190	196	200	203
$\frac{h}{R} \cdot 10^4$	0	9	35	79	141	221	317
$\frac{r_A}{R} \cdot 10^3$	0	50	100	149	199	247	295
q_M	3.026	3.014	3.003	2.991	2.979	2.969	2.957
q_B	3.026	3.012	2.995	2.975	2.949	2.957	2.891

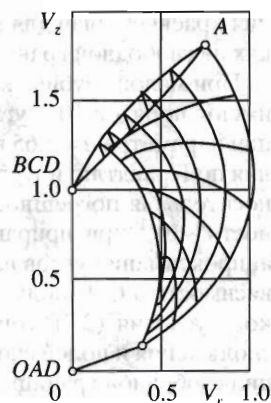
При $\alpha_A \rightarrow 0$ (вдавливание плоского круглого штампа без скольжения материала по границе контакта) результаты расчетов совпадают с полученными ранее [13].

Значение коэффициента μ^* равно касательному напряжению на границе штампа в точке A . Значение коэффициента f^* равно отношению касательного напряжения к нормальному давлению на границе штампа в точке A .

Видно, что при небольшой глубине вдавливания предельные коэффициенты трения μ^* имеют высокие значения, близкие к соответствующим значениям для идеально шерохо-



Фиг. 4



Фиг. 5

ватого штампа. Если коэффициент трения находится в интервале предельных значений, то на начальной стадии вдавливания штампа до соответствующего значения угла контакта α_A или радиуса пластического отпечатка центральная жесткая область (ЦЖО) распространяется на всю границу контакта. При дальнейшем вдавливании штампа ЦЖО будет распространяться только на часть границы контакта со штампом и появится граница скольжения AG .

На фиг. 4 и 5 показаны линии скольжения на плоскости r, z и их отображение на плоскости годографа скоростей перемещений V_r, V_z для угла контакта $\alpha_A = 0.3$, при котором коэффициент трения μ^* принимает предельное значение 0.5. В этом случае граница AD ЦЖО направлена по касательной к границе штампа в точке A . При дальнейшем вдавливании штампа при $\alpha_A > 0.3$ около точки A появляется граница скольжения, которая будет огибающей для линий скольжения семейства η .

Вследствие изменения скорости V_z от единицы до нуля в точке D в окрестности этой точки возникает сингулярное поле скоростей перемещений приведенное ранее [13]. Вследствие этого вдоль линий скольжения, ближайших к жесткопластическим границам AD и BCD , получается быстрое изменение скорости. Пластическая область ABC (фиг. 4) отображается на плоскости годографа скоростей (фиг. 5) узким сегментом с уменьшением скорости V_3 вдоль траектории главного напряжения σ_3 , с которой совпадает граница AB . В пластической области на физической плоскости (фиг. 4) кривизна траекторий главного напряжения σ_3 положительна ($d\varphi > 0$), проекции вектора скорости V_3 и V_1 положительны, скорость V_3 уменьшается вдоль траекторий σ_3 (фиг. 5). Неравенство (1.7) выполняется во всей пластической области, и диссипативная функция D положительна. Статически допустимое продолжение напряжений в жесткую область для поля линий скольжения при вдавливании сферического штампа приведено ранее [3].

На фиг. 1 показан пример расчета поля линий скольжения при вдавливании штампа до угла контакта $\alpha_A = 0.3$ для $\mu = 0.3$ с распределением нормального давления $-\sigma_n$ на границе скольжения AG , которое возрастает от 2.372 в точке A до 3.253 в точке G . В этом примере глубина вдавливания и средние давления на штамп определяются равенствами $h/R = 0.03$, $q_M = 2.878$ и $q_B = 2.814$.

При испытаниях металлов на твердость вдавливанием шарика и в процессах обработки деталей машин пластическим деформированием поверхностного слоя сферическим индентором коэффициенты трения значительно ниже предельных значений, приведенных в начале этого раздела. В этих процессах с самого начала вдавливания штампа образуется ЦЖО и граница скольжения AG в соответствии со схемой, показанной на фиг. 1.

α_A	q_M	q_B	$\frac{h}{R} \cdot 10^4$	$\frac{z_E}{R} \cdot 10^4$	$\frac{r_G}{R} \cdot 10^4$	q_M	q_B	$\frac{h}{R} \cdot 10^4$	$\frac{z_E}{R} \cdot 10^4$	$\frac{r_G}{R} \cdot 10^4$
$\mu = 0.1$						$\mu = 0.2$				
0.1	2.86	2.85	33	54	62	2.93	2.92	34	193	254
0.2	2.78	2.71	131	73	79	2.87	2.84	134	279	361
0.3	2.70	2.64	291	89	106	2.80	2.74	298	328	424
0.4	2.62	2.51	510	99	113	2.73	2.62	521	349	444
0.5	2.54	2.38	782	111	125	2.63	2.50	798	370	468
$f = 0.05$										
0.1	2.88	2.88	34	134	168					
0.2	2.80	2.78	133	198	247					
0.3	2.72	2.66	295	242	300					
0.4	2.64	2.53	514	275	341					
0.5	2.55	2.40	793	280	333					

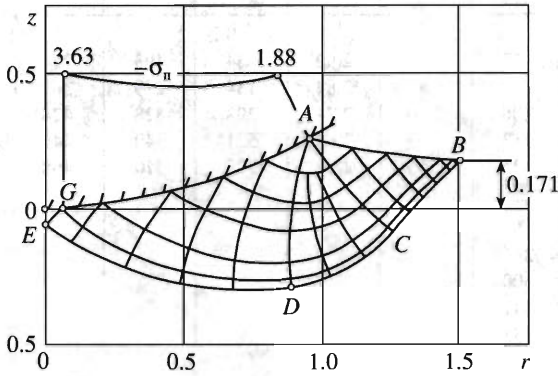
В таблице приведены результаты расчетов относительных значений глубины вдавливания штампа h/R , глубины ЦЖО на оси симметрии $-z_E/R$, радиальной границы ЦЖО на поверхности штампа r_G/R и безразмерных чисел твердости q_M и q_B в зависимости от угла контакта α_A для трех значений коэффициента трения, возможных в указанных выше технологических задачах. Безразмерный радиус пластического отпечатка определяется углом контакта $r_A/R = \sin \alpha_A$.

Расчеты показывают, что средние давления на штамп при моделировании контактного трения по Кулону при $f = 0.05$ и по Прандтлю при $\mu = 0.1$ при равных радиусах пластического отпечатка близки между собой, но размеры ЦЖО под штампом при контактном трении по Кулону заметно выше, чем при контактном трении по Прандтлю.

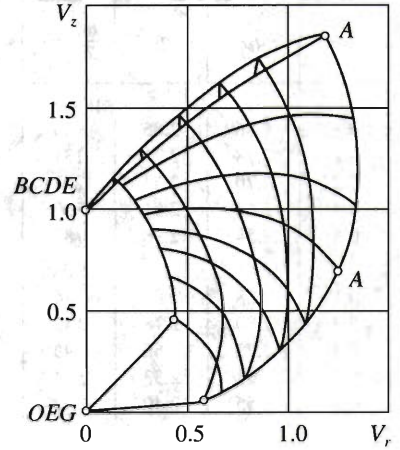
На фиг. 6 и 7 показаны линии скольжения на плоскости r, z и их отображение на плоскости годографа скоростей перемещений V_r, V_z при вдавливании сферического штампа до угла контакта $\alpha_A = 0.5$ с коэффициентом трения по Кулону $f = 0.05$. Поля линий скольжения и годографа скоростей перемещений при контактном трении по Кулону и Прандтлю при $\mu = 0.1$ различаются незначительно. Но зависимость контактного касательного напряжения от давления при трении по Кулону приводит к уменьшению угла наклона линий скольжения η к границе штампа и образованию большей по размерам ЦЖО. Условие неотрицательности диссипативной функции в приведенном примере также выполняется. В верхней части фиг. 6 показано распределение контактного давления σ_n на границе скольжения AG , которое возрастает от 1.876 в точке A до 3.632 в точке G . При этом касательное напряжение контактного трения также возрастает от 0.0936 в точке A до 0.1816 в точке G .

На фиг. 8 показано изменение границ пластической области и ЦЖО в процессе вдавливания штампа до угла контакта $\alpha_A = 0.5$ для коэффициента трения по Прандтлю $\mu = 0.2$. В начале процесса вдавливания штампа при малых углах контакта свободная граница AB несущественно отклоняется от горизонтальной прямой. Поле линий скольжения в этой области, включая плоский штамп при $\alpha_A = 0$, и распределение контактных напряжений в пределах погрешности численных расчетов совпадают с решениями задачи о начальном течении полупространства с горизонтальной границей [1–4].

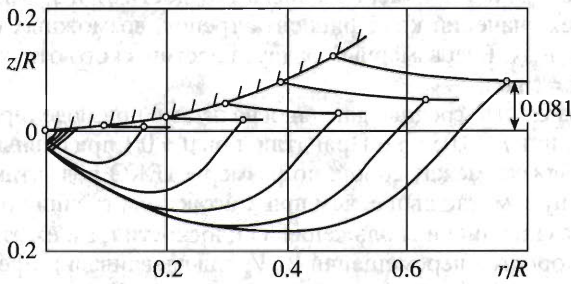
На фиг. 9 показано сравнение расчетных зависимостей безразмерного усилия вдавливания $Q/(\sigma_y R^2)$ от радиуса пластического отпечатка для гладкого штампа [5] при $\mu = 0$ и штампов с коэффициентами трения по Прандтлю $\mu = 0.1$ и Кулону $f = 0.05$ (сплошные линии) с экспериментальными данными по вдавливанию полированного шарика из карбида вольфрама в предварительно упрочненную медь [6] (светлые точки). Предел текучести σ_y находили по экспериментальной зависимости $\sigma_y(\epsilon_p)$ [6] по средним значениям накопленной пластической деформации ϵ_p , приведенным ранее [5]. При $r_A/R < 0.3$ расче-



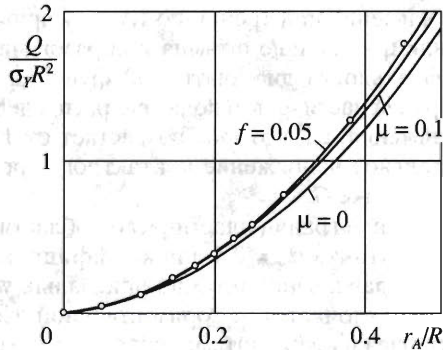
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

ты по настоящей модели практически совпадают с экспериментальными данными и расчетами вдавливания гладкого штампа с прямолинейной границей полупространства [1, 3, 4]. При увеличении радиуса пластического отпечатка экспериментальные данные хорошо совпадают с расчетными зависимостями, полученными с учетом контактного трения при $\mu = 0.1$ и $f = 0.05$. Зависимость, полученная ранее [1, 3, 4], практически совпадает с зависимостью для $\mu = 0.1$ и удивительно близка к экспериментальным данным.

Принятая в [1, 3, 4] горизонтальная граница полупространства так же, как и контактное трение, приводит к повышению давления на штамп по сравнению с расчетами для гладкого штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметрическая задача теории пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
2. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. 359 с.
3. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
4. *Ивлев Д.Д., Непершин Р.И.* Внедрение гладкого сферического штампа в жестко-пластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 159–166.
5. *Непершин Р.И.* О внедрении гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 5. С. 616–620.
6. *Richmond O., Morrison H.L., Devenpeck M.L.* Sphere indentation with application to the Brinell hardness test // Intern. J. Mech. Sci. 1974. V. 16. № 1. P. 75–82.
7. *Shield R.T.* On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. A 233. № 1193. P. 267–287.
8. *Друянов Б.А., Непершин Р.И.* Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
9. *Druyanov B.A., Nepershin R.I.* Problems of Technological Plasticity. Amsterdam : Elsevier, 1994. 426 p.
10. *Томленов А.Д.* Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
11. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
12. *Dennis J.E., Shnabel R.B.* Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983. 378 p.
13. *Eason G., Shield R.T.* The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // ZAMP. 1960. Т. 11. № 1. P. 33–43.

Москва

e-mail: nepershin_r@pop.mtu.ru

Поступила в редакцию

6.1.2005