

УДК 539.374

© 2006 г. А. А. Буренин, Л. В. Ковтаниук, А. Л. Мазелис

**ПРОДАВЛИВАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

В рамках теории больших деформаций получено аналитическое решение задачи о продавливании несжимаемого упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. В зависимости от изменяющегося усилия продавливания рассчитаны скорость движения упругого ядра, изменение размеров зон необратимого деформирования, напряжения и деформации как в упругом ядре, так и в области течения.

Точные решения прямолинейного движения вязкопластической среды [1, 2], ставшие уже классическими, послужили надежной основой для тестирования алгоритмов и программ численных расчетов в нелинейных краевых задачах с подвижными неизвестными границами (границы застойных зон, поверхности жестких ядер). В случаях, когда упругими свойствами материала пренебречь невозможно (расчет остаточных напряжений, прогнозирование геометрии конструкций после изготовления и др.), полученное ниже аналитическое решение для упруговязкопластического материала может послужить целям тестирования соответствующих расчетных методик.

1. Исходные модельные зависимости. Основополагающей гипотезой при конструировании модели больших деформаций является разделение наблюдаемых полных деформаций на экспериментально не измеряемые обратимую и необратимую составляющие. Предполагалось [3, 4], что необратимые деформации могут накапливаться в материале только в условиях соответствия напряженных состояний поверхностям нагружения в пространстве напряжений, а в процессах разгрузки или необратимого деформирования компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так, как если бы тело перемещалось жестко. Данное предположение позволяет конкретизировать дифференциальные уравнения изменения (переноса [5]) тензоров составляющих деформаций: обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} , которые следует считать определениями этих тензоров. В декартовой системе координат данные уравнения записываются в форме [3]

$$\begin{aligned} \frac{de_{ij}}{dt} &= \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}(e_{ik}v_{k,j} + v_{k,i}e_{kj} - r_{ik}e_{kj} + e_{ik}r_{kj} - \epsilon_{ik}^p e_{kj} + e_{ik}\epsilon_{kj}^p) \\ \frac{dp_{ij}}{dt} &= \epsilon_{ij}^p - p_{is}r_{sj} - p_{is}\epsilon_{sj}^p + r_{is}p_{sj} - \epsilon_{is}^p p_{sj} \\ v_i &= \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + F_{ij}(\epsilon_{st}, e_{st})$$

Здесь u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, ϵ_{ij}^p в соответствии с классической теорией пластичности будем называть компонентами тензора скоростей пластических деформаций, r_{ij} – компоненты тензора вращения, которые в своей нелинейной части F_{ij} зависят от обратимых деформаций и скоростей деформирования. Имеется явное выражение для F_{ij} [3]. Согласно уравнениям (1.1) компоненты тензора полных деформаций Альманси d_{ij} представляются через компоненты составляющих тензоров e_{ij}, p_{ij} в форме

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj} \quad (1.2)$$

Используя уравнения (1.1), в качестве следствия первого начала термодинамики можно получить следующие аналоги формулы Мурнагана:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \equiv 0 \\ \sigma_{ij} &= -P_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь принято условие несжимаемости среды, P, P_1 – добавочные гидростатические давления. В дальнейшем будем считать среду изотропной и для упругого потенциала среды W принимаем зависимость

$$W = W(\Lambda_1, \Lambda_2) = -2\mu\Lambda_1 - \mu\Lambda_2 + b\Lambda_1^2 + (b - \mu)\Lambda_1\Lambda_2 - \chi\Lambda_1^3 + \dots \quad (1.4)$$

$$\Lambda_m = \begin{cases} L_m & \text{при } p_{ij} \equiv 0 \\ I_m & \text{при } p_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}; \quad I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}$$

где μ, b, χ – постоянные материала; L_1, L_2 – инварианты тензора Альманси, I_1, I_2 – инварианты тензора обратимых деформаций. Такой выбор инвариантов обеспечивает предельный переход от второй зависимости в (1.3) к первой при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Диссипативный механизм деформирования определим, задавая поверхность нагружения в форме

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\epsilon_k^p| \quad (1.5)$$

Здесь k – предел текучести, η – коэффициент вязкости, σ_i – компоненты главных напряжений, ϵ_k^p – компоненты главных скоростей пластических деформаций.

Как и в классической теории пластичности, принимаются условия принципа максимума Мизеса. Тогда поверхность нагружения (1.5) является пластическим потенциалом, и связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0 \quad (1.6)$$

Условие пластичности (1.5) является обобщением условия пластичности Треска на случай учета вязких свойств материала при пластическом течении, его можно рассмат-

ривать в качестве основного соотношения модели изотропно упругоупрочняющегося пластического тела [6, 7].

2. Начальное упругое равновесие. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого описаны выше, образует пробку в пространстве между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R (r_0 < R)$ высоты l . Выясним условия, при которых созданием давления с одной стороны пробки ее можно продвигать вдоль цилиндрических поверхностей за счет пластического течения материала пробки в окрестностях этих поверхностей. Решение данной краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций в цилиндрической системе координат r, θ, z будем искать в классе функций $u = u_z(r, t), v = v_z(r, t), P = P(r, z, t)$. Таким образом, граничными условиями задачи будут

$$\begin{aligned} u(R, t) = u(r_0, t) = v(R, t) = v(r_0, t) = 0 \\ \sigma_{zz}(r_*, u(r_*, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(r_*, l + u(r_*, t), t) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кинематические ограничения в соотношениях (2.1) являются условиями прилипания материала на жестких стенках, $p(t)$ – давление, создаваемое с одной стороны пробки ($z = 0$). Координата $r = r_*$ связана с максимальным перемещением u граничных точек пробки и будет вычислена в дальнейшем.

Полагаем, что до момента времени $t_0 = 0$ ($p(0) = p_0$) материал деформировался упруго, а с этого момента времени в окрестности внутренней жесткой стенки начинается пластическое течение. Таким образом, упругое равновесное состояние в момент времени t_0 определяет начальное условие для последующего процесса необратимого деформирования. Вычислим параметры данного напряженно-деформированного состояния.

Согласно равенствам (1.2) тензор деформаций имеет две не равные нулю компоненты

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u_{,r}^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u_{,r} \quad (2.2)$$

Из соотношений (1.3), (1.4) и (2.2) для компонент тензора напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по компонентам градиента перемещений получим зависимости

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} - \mu u_{,r}^2 = -(P + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u_{,r}^2 = -s, \quad \sigma_{rz} = \mu u_{,r} \quad (2.3)$$

Воспользовавшись уравнениями равновесия

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (2.4)$$

и граничными условиями (2.1), найдем

$$\begin{aligned} u = \frac{R^2 c}{4\mu}(\tilde{r}^2 - 1 - 2\tilde{r}_*^2 \ln \tilde{r}), \quad s = c(z - l) - \frac{R^2 c^2}{4\mu}(\tilde{r}_*^2(1 - 2\ln \tilde{r}_*) - 1) \\ p_0 = -cl, \quad \tilde{r}_* = \frac{r_*}{R} = \sqrt{\frac{r_0^2 - 1}{2\ln r_0}}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{r_0}{R}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для вычисления постоянной c воспользуемся условием пластичности (1.5), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma_{rz}|_{r=r_0} = k \quad (2.6)$$

Окончательные зависимости для компонент напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= c(l-z) + \frac{R^2 c^2}{4\mu} \left(\tilde{r}^2 - 1 + \frac{\tilde{r}_*^4}{\tilde{r}^2} - \tilde{r}_*^2 (1 + 2 \ln \tilde{r}_*) \right) \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{\theta\theta} = -s, \quad \sigma_{rz} = \frac{Rc}{2} \left(\tilde{r} - \frac{\tilde{r}_*^2}{\tilde{r}} \right), \quad c = \frac{2kR^{-1}}{\tilde{r}_0^2 - \tilde{r}_*^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Как только напряженное состояние материала будет удовлетворять зависимостям (2.7), от границы $r = r_0$ начинает развиваться область пластического течения.

3. Деформирование при одностороннем пластическом течении. При дальнейшем росте нагружающего давления $p(t) > p_0$ область необратимого деформирования оказывается ограниченной поверхностями $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. В области $r_1(t) < r \leq R$ материал остается в упругом состоянии. Такая ситуация будет сохраняться до момента времени t_1 , в который появится и начнет свое развитие от граничной поверхности $r = R$ новая область необратимого деформирования. Укажем параметры напряженно-деформированного состояния материала в этот промежуток времени.

Оставаясь в рамках квазистатического подхода (пренебрегая силами инерции), из уравнений равновесия (2.4) найдем для области обратимого деформирования

$$s(t) = c(t)z + a(t), \quad \sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_1(t)}{r}\quad (3.1)$$

$$u = \frac{R^2 c(t)}{4\mu} (\tilde{r}^2 - 1) + \frac{c_1(t)}{\mu} \ln \tilde{r}, \quad v = \frac{R^2 \dot{c}(t)}{4\mu} (\tilde{r}^2 - 1) + \frac{\dot{c}_1(t)}{\mu} \ln \tilde{r}$$

Здесь $a(t)$, $c(t)$ и $c_1(t)$ – неизвестные функции, точками обозначены их производные по времени. При интегрировании уравнений равновесия учитывалось условие $u(R, t) = 0$.

Следуя формуле Мурнагана (1.3) при $p_{ij} \neq 0$, для напряжений в области пластического течения можно **получить**

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} - 4\mu e_{rz}^2 = -(P_1 + 2\mu) - 2(\mu + b)e_{rz}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}\quad (3.2)$$

причем учитывались имеющие место в рассматриваемом случае кинематические зависимости

$$e_{rr} = -\frac{3}{2}e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2}e_{rz}^2$$

С другой стороны, интегрированием уравнений равновесия в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ можно получить

$$s_1(t) = m(t)z + n(t), \quad \sigma_{rz} = \frac{m(t)r}{2} + \frac{g(t)}{r}, \quad e_{rz} = \frac{m(t)r}{4\mu} + \frac{g(t)}{4\mu r}\quad (3.3)$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$ заставляют считать

$$m(t) = c(t), \quad n(t) = a(t), \quad g(t) = c_1(t), \quad s(t) = s_1(t)$$

Пластический потенциал (1.5) в области необратимого деформирования запишется в форме

$$f(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (k + \eta \varepsilon_{rz}^p)^2 = 0\quad (3.4)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.6), из соотношения (3.4) найдем

$$\sigma_{rz} = k + \eta \varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{k + \eta \varepsilon_{rz}^p} \quad (3.5)$$

Сравнение формул (3.3) и (3.5) дает

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c(t)r}{2} + \frac{c_1(t)}{r} - k \right) \quad (3.6)$$

Подстановка выражений (3.5) и (3.6) в соотношения (1.1) и (1.2) позволяет вычислить скорости точек и их перемещения в области пластического течения

$$v = \frac{1}{\eta} h(t, r, r_0) - \frac{2k}{\eta} (r - r_0) + \frac{1}{2\mu} \dot{h}(t, r, r_0), \quad u = \int v(t) dt \quad (3.7)$$

$$h(t, r, r_0) = \frac{c(t)}{2} (r^2 - r_0^2) + 2c_1(t) \ln \frac{r}{r_0}$$

Условия равенства перемещения и его производных на упругопластической границе $r = r_1(t)$ приводят к соотношениям

$$c_2(t)r_1 + \frac{2c_3(t)}{r_1} - 2kt = 0$$

$$\frac{1}{2\mu} h(t, r_0, R) = \frac{1}{\eta} h_1(t, r_1, r_0) - \frac{2kt}{\eta} (r_1 - r_0), \quad \frac{1}{2\mu} \dot{h}(t, r_0, R) = \frac{1}{\eta} \dot{h}(t, r_1, r_0) - \frac{2k}{\eta} (r_1 - r_0) \quad (3.8)$$

$$c_2(t) = \int c(t) dt, \quad c_3(t) = \int c_1(t) dt; \quad h_1(t, r, r_0) = \frac{c_2(t)}{2} (r^2 - r_0^2) + 2c_3(t) \ln \frac{r}{r_0}$$

Функция $c_2(t)$, как и $c(t)$, задается условиями нагружения (2.1): $c(t) = -t^{-1}p(t)$. Для неизвестных функций $c_1(t)$ и $c_3(t)$ из соотношений (3.8) получаем

$$c_3(t) = ktr_1 - \frac{1}{2}c_2(t)r_1^2$$

$$c_1(t) = \frac{\mu}{\ln r_0} \left(\frac{R^2 c(t)}{4\mu} (1 - r_0^2) + \frac{c_2(t)}{2\eta} \left(r_1^2 - r_0^2 - 2r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0} \right) + \frac{2kt}{\eta} \left(r_0 - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r_0} \right) \right) \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.8) и (3.9) следует дифференциальное уравнение, определяющее положение границы пластической области $r = r_1(t)$

$$\dot{r}_1 = \frac{kr_1 - c_1(t) - c(t)r_1^2/2}{r_1 c_2(t) - kt} \quad (3.10)$$

Напряжения как в упругой, так и в вязкопластической области по найденной кинематике движения определяются обычным способом. Однако получаемое таким образом решение справедливо только до момента времени t_1 , когда в окрестности внешней граничной поверхности $r = R$ выполнится условие пластического течения $\sigma_{rz}(R, t_1) = -k$, которое в используемых обозначениях записывается в форме

$$kR + \frac{1}{2}c(t_1)R^2 = -c_1(t_1) \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) является, по существу, уравнением, определяющим по задаваемому нагружению момент времени t_1 .

4. Расчет процесса продавливания. Начиная с момента времени t_1 , в деформируемом материале присутствуют две области вязкопластического течения, ограниченные поверхностями $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и $r_2(t) \leq r \leq R$. В области $r_1(t) < r < r_2(t)$ продавливаемый материал остается в упругом состоянии. Параметры напряженно-деформированного состояния в этой области вычисляются вполне аналогично предыдущим зависимостям (3.1)

$$s(t) = b(t)z + a_1(t), \quad \sigma_{rz} = s_2(t, r), \quad s_2(t, r) = \frac{b(t)r}{2} + \frac{b_1(t)}{r} \quad (4.1)$$

$$u = \frac{b(t)r^2}{4\mu} + \frac{b_1(t)}{\mu} \ln r + d(t), \quad v = \dot{u}$$

В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ перемещения и скорости точек вычисляются по тем же зависимостям (3.7), в которых функции времени $c(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ следует заменить их последующими значениями $b(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$.

В записи пластического потенциала в области $r_2(t) \leq r \leq R$ следует учитывать, что $\sigma_{rz} < 0$ и $\epsilon_{rz}^p < 0$. Тогда из соотношений (1.5) и (1.6) в рассматриваемом случае следует

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \epsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\epsilon_{rz}^p}{\eta \epsilon_{rz}^p - k} \quad (4.2)$$

Кинематика вязкопластического течения в рассматриваемой области находится тем же способом, каким ранее были получены соотношения (3.7). По форме это будут те же зависимости (3.7) с функциями $b(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, в которых, однако, r_0 следует заменить на R , второе слагаемое в первой зависимости взять со знаком плюс. Наконец, при вычислении перемещения (функции от r и t) как интеграла от скорости по времени в отличие от (3.7) функция от r , появляющаяся при интегрировании, будет теперь отлична от нуля и равна

$$f(r) = -\frac{1}{\eta} h_1(t_1, r, R) - \frac{2kt_1}{\eta} (r - R)$$

Условия непрерывности перемещений, скоростей, производных от перемещений по r на упругопластических границах $r = r_1(t)$ и $r = r_2(t)$ служат для определения неизвестных функций $b_3(t)$, $d(t)$ и $b_1(t)$, а также дают возможность записать уравнения движения границ: дифференциальное для $r = r_2(t)$ и алгебраическое для $r = r_1(t)$

$$b_3(t) = kt r_1 - \frac{b_2(t)r_1^2}{2}$$

$$d(t) = \frac{b_2(t)}{2\eta} \left(r_1^2 - r_0^2 - 2r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{2kt}{\eta} \left(r_1 - r_0 - r_1 \ln \frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{b(t)r_0^2}{4\mu} - \frac{b_1(t)}{\mu} \ln r_0$$

$$b_1(t) = \frac{\mu}{\ln r_0} \left(\frac{b_2(t)}{2\eta} \left(r_1^2 - r_0^2 - r_2^2 + R^2 - 2r_1^2 \ln \frac{r_1 R}{r_2 r_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2kt}{\eta} \left(r_0 - r_1 + R - r_2 + r_1 \ln \frac{r_1 R}{r_2 r_0} \right) + \frac{R^2 b(t)}{4\mu} (1 - \tilde{r}_0^2) - f(r_2) \right) \quad (4.3)$$

$$\dot{r}_2 = \frac{kr_2 + b(t)r_2^2/2 + b_1(t)}{(b_2(t) - c_2(t_1))r_2 + k(t - t_1)}$$

$$r_1 = \frac{kt}{b_2(t)} + \sqrt{\left(\frac{kt}{b_2(t)}\right)^2 - \frac{(c_2(t_1) - b_2(t))r_2^2 + 2k(t_1 - t)r_2 + 2c_3(t_1)}{b_2(t)}}$$

Функции $a_1(t)$, $b(t) = -t^{-1}p(t)$ и $b_2(t) = \int b(t)dt$ определяются условиями нагружения.

Таким образом, окончательное решение поставленной краевой задачи теории упруговязкопластического деформирования определяется зависимостями:

в области упругого ядра $r_1(t) < r < r_2(t)$

$$u = \frac{1}{2\mu}H(t, r, r_0) + \frac{b_2(t)}{2\eta}\left(r_1^2 - r_0^2 - 2r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0}\right) - \frac{2kt}{\eta}\left(r_1 - r_0 - r_1 \ln \frac{r_1}{r_0}\right) \quad (4.4)$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\dot{H}(t, r, R) + \frac{1}{\eta}H(t, r_2, R) - \frac{2k}{\eta}(R - r_2)$$

в областях вязкопластического течения

$$r_0 \leq r \leq r_1(t): u = \frac{1}{\eta} \int H(t, r, r_0) dt + \frac{1}{2\mu}H(t, r, r_0) - \frac{2kt}{\eta}(r - r_0), \quad v = \dot{u} \quad (4.5)$$

$$r_2(t) \leq r \leq R: u = \frac{1}{\eta} \int H(t, r, R) dt + \frac{1}{2\mu}H(t, r, R) + \frac{2kt}{\eta}(r - R) + f(r), \quad v = \dot{u} \quad (4.6)$$

Напряжения во всех трех областях определяются зависимостями

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = H_1(t, z), \quad \sigma_{zz} = H_1(t, z) + \frac{1}{\mu}s_2^2(t, r), \quad \sigma_{rz} = s_2(t, r) \quad (4.7)$$

В соотношениях (4.5)–(4.7)

$$H(t, r, r_0) = \frac{b(t)}{2}(r^2 - r_0^2) + 2b_1(t) \ln \frac{r}{r_0}$$

$$H_1(t, z) = b(t)\left(l - z + \frac{1}{2\mu}H(t, r_*, r_0) + \frac{b_2(t)}{2\eta}\left(r_1^2 - r_0^2 - 2r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_0}\right) - \frac{2kt}{\eta}\left(r_1 - r_0 - r_1 \ln \frac{r_1}{r_0}\right)\right), \quad r_* = \sqrt{\frac{2b_1(t)}{b(t)}}$$

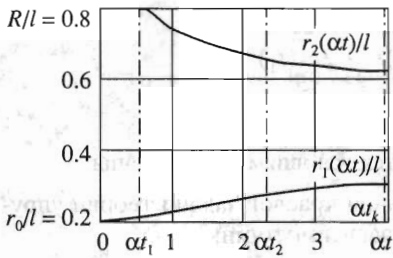
Положение упругопластических границ определяется решением уравнений из (4.3).

Представляет интерес случай, когда начиная с некоторого момента времени t_2 нагружающее давление становится постоянным:

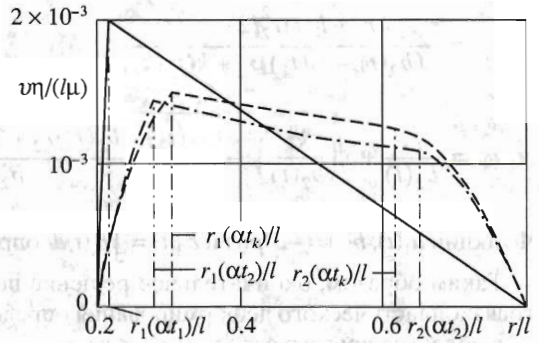
$$p(t)|_{t \geq t_2} = p(t_2) = p_1 = \text{const}$$

Наличие сингулярности у функции $p(t)$ в момент времени $t = t_2$ приводит к следующим изменениям в зависимостях (4.3)–(4.7). В соотношениях (4.3), (4.7) и в первой зависимости (4.4) $b_2(t)$ необходимо заменить функцией

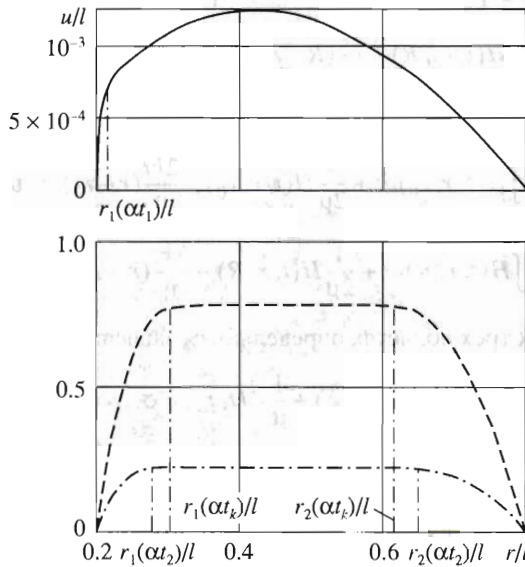
$$b_2(t_2) - b(t_2)(t_2 - t)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ в зависимость для перемещений (4.5) необходимо добавить слагаемое

$$G(r_0) = \frac{1}{2\eta} (b_2(t_2) - b(t_2)t_2)(r^2 - r_0^2)$$

а в аналогичную зависимость (4.6) – слагаемое $G(R)$.

Приведем некоторые характерные результаты расчетов, полученные при следующих значениях постоянных:

$$\frac{k}{\mu} = 0.00621, \quad \frac{p_0}{\mu} = 0.01408, \quad \frac{r_0}{l} = 0.2, \quad \frac{R}{l} = 0.8, \quad \frac{\eta\alpha}{\mu} = 0.004$$

где модуль сдвига $\mu = 8.05 \cdot 10^{10}$ Па.

На фиг. 1 показано развитие зон вязкопластического течения со временем при линейной функции нагружения $p(t) = p_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha > 0$, p_0 соответствует возникновению те-

чения у поверхности $r = r_0$. Заметим, что в отличие от вязкопластической среды течение у жестких поверхностей начинает свое развитие не одновременно. Зависимости безразмерных скорости u/l и перемещения u/l от безразмерного радиуса r/l представлены на фиг. 2 и 3 соответственно в момент времени α_1 , соответствующий возникновению течения на поверхности $r = R$ (сплошные кривые), момент времени α_2 , когда нагружающее давление становится постоянным (штрихпунктирные кривые) и в некоторый текущий момент времени $\alpha_k > \alpha_2$ (штриховые кривые). Переменность скорости в области твердого ядра в отличие от вязкопластического течения с жестким ядром связана с его продолжающимся упругим деформированием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00537-а), Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ 890.2003.1) и Государственной программы поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук и их научных руководителей (МК- 1774.2005.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 54–60.
2. Быковцев Г.И., Чернышов А.Д. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
3. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
4. Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 77–96.
5. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
6. Быковцев Г.И., Семькина Т.Д. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 68–76.
7. Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 12–16.

Владивосток
e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию
19.IV.2005