

УДК 539.374:534.1

© 2006 г. Г. Т. Тарабрин

**ВОЛНА РАЗГРУЗКИ В СРЕДЕ
С ПЕРЕМЕННЫМИ СКОРОСТЯМИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ**

Предлагается метод получения уравнения волны разгрузки в виде алгебраического многочлена в задачах динамики упругопластического стержня, у которого волны деформаций распространяются с переменными скоростями как при росте напряжения, так и при его падении.

Явление взаимодействия волн деформаций, вызванных разгрузкой стержня, с волнами деформаций, возникшими при его нагружении, открытое Х.А. Рахматулиным и названное им волной разгрузки [1], не относится ни к одной из классических краевых задач уравнений математической физики. В развитие ранее разработанных методов [2–5] ниже предлагается алгоритм решения задачи о волне разгрузки для материалов с нелинейными физическими соотношениями.

1. Постановка задачи. Полубесконечный стержень постоянного поперечного сечения подвергается на торце кратковременному воздействию динамической нагрузки в виде нормального напряжения, вызывающего в стержне нестационарный процесс распространения волн упругопластических деформаций. Напряженное состояние стержня принимается одномерным. Энергия поперечной деформации не учитывается. Деформации в стержне предполагаются достаточно малыми, допускающими использовать в качестве меры деформации соотношение Коши.

Физические соотношения. Диаграмма Прандтля определяет зависимость напряжения σ от деформации ϵ с использованием трех постоянных: модуля нормальной упругости E , коэффициента упрочнения α ($0 < \alpha < 1$) и предела упругости ϵ_0 и представляет собой график кусочно-линейной функции:

$$\sigma = \epsilon E \text{ при увеличении и при уменьшении значений } \epsilon \in [0, \epsilon_0];$$

$$\sigma = [\epsilon_0 + (\epsilon - \epsilon_0)\alpha]E \text{ при увеличении значений } \epsilon > \epsilon_0;$$

$$\sigma = [\epsilon - (e - \epsilon_0)(1 - \alpha)]E \text{ при уменьшении значений } \epsilon \text{ от достигнутой в процессе нагружения деформации } e > \epsilon_0.$$

В решаемых далее задачах, сохраняя на отрезке деформаций $[0, \epsilon_0]$ закон Гука $\sigma = \epsilon E$, при $e > \epsilon_0$ вместо α , E принимаем $\alpha a(\epsilon)$, $E b(\epsilon)$:

при увеличении значений $\epsilon > \epsilon_0$

$$\sigma = [\epsilon_0 + (\epsilon - \epsilon_0)\alpha a(\epsilon)]E b(\epsilon) \tag{1.1}$$

при уменьшении значений ϵ от достигнутой в процессе нагружения деформации $e > \epsilon_0$

$$\sigma = \{\epsilon - (e - \epsilon_0)[1 - \alpha a(e)]\}E b(e) \tag{1.2}$$

Было показано [6], что функции $a(\epsilon)$, $b(\epsilon)$ могут быть интерпретированы как величины, характеризующие процессы нарастания степени разрушенности материала. Для оп-

ределенности, чтобы получить возможность решать прямую задачу о волне разгрузки (ВР), примем

$$a(\varepsilon) = \frac{\beta}{\beta - 1 + \varepsilon/\varepsilon_0}, \quad b(\varepsilon) = 1 - \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\beta} \right)^2 \quad (1.3)$$

где $\beta = (e_* - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, e_* – предел деформируемости материала. Диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ при этом имеют вид, характерный для некоторых материалов.

Новое в предлагаемой модели среды то, что угол наклона прямой разгрузки диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ за пределом упругости ε_0 уменьшается с увеличением максимальной деформации, достигнутой при нагружении. Этот достаточно давно экспериментально наблюдаемый эффект (см., например, [7]) ранее не учитывался в задаче о ВР.

Разрешающая система уравнений. Совместим ось стержня с положительной полуосью пространственной переменной x . Разрешающая система уравнений рассматриваемой задачи, если в качестве неизвестных принять нормальное напряжение $\sigma = \sigma(x, t)$ в поперечном сечении стержня и скорость смещения $v = v(x, t)$ поперечного сечения по направлению оси x , имеет вид

$$\partial\sigma/\partial x - \rho\partial v/\partial t = 0, \quad \partial\sigma/\partial t - \rho z^2\partial v/\partial x = 0; \quad z = \sqrt{\sigma(\varepsilon)/\rho} \quad (1.4)$$

Величина z имеет смысл скорости распространения волн деформаций. Если обозначить

$$g(\varepsilon) = \beta^{-1}\sqrt{\alpha\beta(\beta+2)+2-2(\alpha\beta+1)\varepsilon/\varepsilon_0}, \quad s(e) = \sqrt{b(e)} \quad (1.5)$$

то $z = \sqrt{E/\rho} = c$ – скорость звука в материале стержня при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $z = cg(\varepsilon)$ в процессе нагружения при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, e_*)$, $z = cs(e)$ при уменьшении ε от достигнутой при нагружении деформации $e \in (\varepsilon_0, e^*)$. Отсюда следует, что при увеличении ε в области пластических деформаций скорость волн $z = cg(\varepsilon)$ – функция, убывающая от $z = kc$ (здесь $k = \sqrt{\alpha}$) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ до $z = cg(\varepsilon_m)$ (ε_m – максимальная деформация, достигнутая при нагружении); при уменьшении ε от достигнутой в процессе нагружения деформации e скорость волн $z = cs(e)$ не зависит от текущего значения ε и является функцией, убывающей от $z = c$ при $e = \varepsilon_0$ до $z = cs(\varepsilon_m)$ при $e = \varepsilon_m$.

Уравнение $g(\varepsilon_*) = 0$ определяет критическую деформацию ε_* . При $\varepsilon = \varepsilon_*$ функция $\sigma(\varepsilon)$ достигает локального максимума, а скорость волн деформаций $z = cg(\varepsilon_*)$ равна нулю. Задачи волновых процессов в рассматриваемом стержне могут быть решены в области деформаций, меньших критической ε_* . В случае функций $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ вида (1.3) критическая деформация определяется формулой

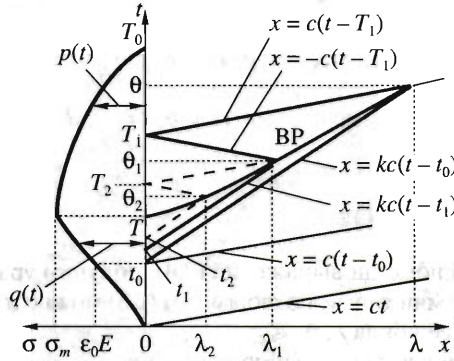
$$\varepsilon_* = (\varepsilon_0/2)[\alpha\beta(\beta+2)+2]/(\alpha\beta+1)$$

Дифференциальные уравнения характеристик системы уравнений (1.4) и дифференциальные соотношения на них имеют вид

$$dx = \pm zdt, \quad d\sigma \mp \rho z dv = 0 \quad (1.6)$$

Нагрузка на торец стержня, равная нулю в начальный момент времени $t = 0$, монотонно возрастает по закону $\sigma(0, t) = q(t)$ и достигает максимального значения при $t = T$. Начиная с этого момента времени, она монотонно убывает по закону $\sigma(0, t) = p(t)$, причем $p(T) = q(T)$, и становится равной нулю при $t = T_0$. В последующем нагрузка на стержень отсутствует. Обозначим через t_0 – момент времени, когда напряжение на торце стержня в процессе роста нагрузки $q(t)$ достигает предела упругости $\sigma_0 = \varepsilon_0 E$.

Обозначим через $x = \lambda$, $t = \theta$ – координаты точки конца ВР.



Фиг. 1

2. Решение со схемой Прандтля.¹ В момент времени $t = t_0$ на торце стержня возникают две волны, одна из которых распространяется со скоростью c , а другая – со скоростью kc . При $t = T$, когда рост нагрузки на стержень $q(t)$ сменяется ее падением $p(t)$, возникает ВР. Ее конечная точка лежит на волне, распространяющейся со скоростью kc . На фиг. 1 показана схема волн, иллюстрирующая решение.

Дифференциальные уравнения характеристик и условия на них за ВР (на фиг. 1 – выше ВР) имеют вид

$$dx = \pm c dt, \quad d\sigma \mp \rho c dv = 0 \tag{2.1}$$

В области между характеристикой $x = kc(t - t_0)$ и ВР

$$dx = kc dt, \quad \sigma = q(t - x/(kc)), \quad \sigma = -k\rho c v + (1 - k)\epsilon_0 E \tag{2.2}$$

Решим задачу отыскания ВР, представляя ВР отрезком прямой

$$x = w(t - T), \quad w = \lambda J(\theta - T) \tag{2.3}$$

Берутся следующие характеристики (фиг. 1):

$$x = c(t - T_1), \quad x = kc(t - t_0), \quad x = -c(t - T_1), \quad x = kc(t - t_1)$$

Их пересечения с ВР (2.3) в точках (λ_1, θ_1) , (λ, θ) дают уравнения

$$w(\theta - T) = c(\theta - T_1) = kc(\theta - t_0), \quad w(\theta_1 - T) = -c(\theta_1 - T_1) = kc(\theta_1 - t_1)$$

преобразуя которые, получаем

$$T_1 = \frac{w[(1 - k)T + kt_0] - kct_0}{w - kc}, \quad t_1 = \frac{w(2T - t_0) + ct_0}{w + c} \tag{2.4}$$

Интегрируя дифференциальные соотношения (2.1) на характеристиках $x = c(t - T_1)$ и $x = -c(t - T_1)$, получаем два уравнения

$$\sigma(\lambda, \theta) - \sigma(0, T_1) - \rho c [v(\lambda, \theta) - v(0, T_1)] = 0$$

$$\sigma(\lambda_1, \theta_1) - \sigma(0, T_1) + \rho c [v(\lambda_1, \theta_1) - v(0, T_1)] = 0$$

¹ Тарабрин Г.Т. Полиномиальная аппроксимация волны разгрузки. М., 1993. 13 с. – Деп. в ВИНТИ 17.06.93. №1993-В92.

Складывая их и учитывая, что

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda, \theta) &= \varepsilon_0 E, \quad \sigma(\lambda_1, \theta_1) = q(t_1), \quad \sigma(0, T_1) = p(T_1) \\ krcv(\lambda_1, \theta_1) &= -[q(t_1) - (1-k)\varepsilon_0 E], \quad rcv(\lambda, \theta) = -\varepsilon_0 E\end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$(1-k)q(t_1) + 2kp(T_1) = (1+k)\varepsilon_0 E \quad (2.5)$$

Исключив в нем t_1, T_1 при помощи выражений (2.4), получим уравнение с одной неизвестной w – скоростью ВР. Вычислив w , по формулам (2.3) можно и записать уравнение ВР, и вычислить координаты ее конца λ, θ .

При нагрузке, изменяющейся по линейному закону

$$q(t) = \varepsilon_0 Et/t_0, \quad p(t) = \varepsilon_0 ET(T_0 - t)/[t_0(T_0 - T)] \quad (2.6)$$

система уравнений (2.3), (2.5) позволяет получить готовые формулы

$$w = kc \sqrt{\frac{T_0}{T_0 - (1-\alpha)T}}, \quad \lambda = \frac{kcw(T-t_0)}{w-kc}, \quad \theta = T + \frac{\lambda}{w} \quad (2.7)$$

Аналогично может быть решена задача о ВР при аппроксимации ее алгебраическим многочленом любого конечного порядка. Например, если уравнение ВР принять в виде

$$x = w(t-T) + w_1(t-T)^2/2$$

где w, w_1 – неизвестные постоянные, то, повторяя описанный алгоритм решения, следует использовать волновую схему с характеристиками, показанными штрихами на фиг. 1.

Сравнение результатов конкретных числовых расчетов позволяет заключить, что в большинстве случаев квадратичная аппроксимация ВР оказывается достаточной для практических целей.

3. Решение с переменными скоростями волн деформаций. Зависимость $\sigma(\varepsilon)$ при увеличении ε за пределом упругости ε_0 определяется формулой (1.1), а при уменьшении ε – формулой (1.2).

Область нагружения. В области, ограниченной ВР и характеристикой $x = kc(t - t_0)$ (фиг. 2), имеет место функциональное уравнение

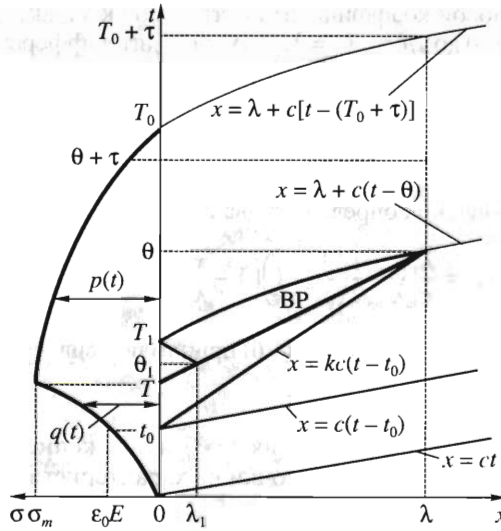
$$\sigma = q(t - x/(cg(\varepsilon))) \quad (3.1)$$

Оно вместе с уравнением (1.1) и формулой (1.5) образует систему уравнений, решение которой определяет σ, v в этой области.

Скорость выражается через деформацию формулой

$$v = -c \left[\varepsilon_0 + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \right] = -c\varepsilon_0 \left[1 + \frac{\beta^2}{3(\alpha\beta + 1)} (k^3 - g^3(\varepsilon)) \right] \quad (3.2)$$

Согласно определению ВР, напряжение и деформация в данной ее точке (x, t) , $x \in [0, \lambda]$, $t \in [T, \theta]$ – наибольшие в течение всего времени действия напряжения. Наибольшую в данном сечении деформацию ранее условилось обозначать e , поэтому $e = e(x)$ – деформация на ВР. При монотонно возрастающей нагрузке $q(t)$ функция $e(x)$ – монотонно убывающая. Ее значения уменьшаются от максимального ω_m на торце в начале ВР – до предела упругости ε_0 на конце ВР при $x = \lambda$. Конечная точка ВР (λ, θ) лежит на характеристике $x = kc(t - t_0)$.



Фиг. 2

Область разгрузки. При наличии ВР $e(x)$, $s(x) = s(e(x))$ – известные функции и известная функция $z = cs(x)$ – скорость волн в области разгрузки. Из неравенств

$$e'(x) < 0, \quad s'(e) < 0 \Rightarrow s'(x) = s'(e)e'(x) > 0$$

следует, что $z = cs(z)$ – монотонно возрастающая функция. Это означает, что в области над ВР характеристики положительного (отрицательного) направления – выпуклые (вогнутые) кривые.

При $x \geq \lambda$ скорость волн деформаций равна c и характеристики будут прямыми с угловыми коэффициентами $\pm 1/c$. Следовательно, характеристические кривые в области над ВР на прямой $x = \lambda$ гладко сопрягаются с прямыми характеристиками в области при $x > \lambda$.

Время прохождения волной, движущейся с переменной скоростью $cs(x)$, отрезка $[0, \lambda]$ назовем периодом разгрузки и обозначим τ .

Предположим, что ВР построена. На прямой $x = 0$ дано $\sigma(0, t) = p(t)$, а функция $u(0, t)$ неизвестна. Интеграл от соотношения (1.6) на характеристике отрицательного направления, соединяющей точку $(0, t_2)$, где $t_2 \in (T, \theta + \tau)$, с точкой на ВР, представляет собой конечное уравнение с одной неизвестной $u(0, t_2)$ и позволяет ее вычислить при любом значении $t_2 \in (T, \theta + \tau]$. В точках (x, t) , $x \neq 0$ между ВР и характеристикой, соединяющей точки $(0, \theta + \tau)$, (λ, θ) , неизвестные $\sigma(x, t)$, $u(x, t)$ вычисляются из решения системы двух конечных уравнений с двумя неизвестными. Они являются интегралами от соотношений (1.6) на характеристиках, исходящих из точки (x, t) и соединяющих эту точку с осью t и ВР.

Над характеристикой между точками $(0, \theta + \tau)$, (λ, θ) вдоль характеристик положительного направления σ и u остаются равными их значениям в точках названной характеристики и прямой $x = 0$ при $t > \theta + \tau$.

Построение волны разгрузки. Коэффициент $s(x)$ – монотонно возрастающая функция, принимающая значения от $s_0 = s(0)$ при максимальной деформации ϵ_m до $1 = s(\lambda)$ при деформации, равной пределу упругости ϵ_0 .

Задача решается с упрощениями, позволяющими получить в явном виде уравнения характеристик и закон изменения напряжения на них в области разгрузки стержня (на фиг. 2 это область, расположенная выше ВР).

Принимается, что угловой коэффициент касательной к характеристикам изменяется линейно по $1/(cs_0)$ при $x = 0$ до $1/c$ при $x = \lambda$. Это приводит дифференциальные уравнения характеристик (1.6) к виду

$$\frac{dt}{dx} = \pm\omega(x), \quad \omega(x) = \frac{1}{c} \left[1 + \left(\frac{1}{s_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Общее решение этих уравнений определяет два семейства парабол

$$t = \pm W(x) + C, \quad W(x) = \frac{\lambda}{c} \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right)^2 \right], \quad C = \text{const} \quad (3.3)$$

Дифференциальные соотношения на них (1.6) принимают вид

$$\omega(x) d\sigma \mp \rho dv = 0 \quad (3.4)$$

Принимается, что вдоль характеристик (3.3) напряжение изменяется линейно. Согласно этому, если $M(0, T_1)$, $N(\xi, \eta)$ – точки на характеристике $t = t(x)$, т.е. $t(0) = T_1$, $t(\xi) = \eta$, то

$$\sigma(x, t(x)) = \sigma(0, T_1) - [\sigma(0, T_1) - \sigma(\xi, \eta)] x / \xi$$

Соответственно имеем

$$\int_{MN} \omega(x) d\sigma = -[\sigma(0, T_1) - \sigma(\xi, \eta)] \Delta(\xi); \quad \Delta(x) = [W(x) - W(0)]/x \quad (3.5)$$

Решим задачу построения ВР, представляя ее отрезком прямой (2.3).

Схема волн (фиг. 2) повторяет решение с диаграммой Прандтля. Отличие заключается в том, что характеристики выше ВР – параболы (3.3), а ниже ВР берется только одна характеристика: $x = kc(t - t_0)$. Записав уравнения характеристик и получив уравнения, определяющие координаты точек их пересечения с ВР (2.3), имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= kc(\theta - t_0), \quad \theta = T_1 + \lambda \Delta(\lambda) \\ \lambda_1 / \lambda &= (\theta_1 - T) / (\theta - T), \quad \theta_1 = T_1 - \lambda_1 \Delta(\lambda_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Интегрируя дифференциальные соотношения (3.4) на отрезках характеристик с общим началом в точке $(0, T_1)$ и концами в точках (λ_1, θ_1) , (λ, θ) , складывая результаты интегрирования, учитывая формулу (3.5) и учитывая, что

$$\sigma(\lambda, \theta) = \varepsilon_0 E, \quad v(\lambda, \theta) = -c\varepsilon_0, \quad \sigma(0, T_1) = p(T_1)$$

получаем

$$p(T_1)[\Delta(\lambda) + \Delta(\lambda_1)] - \sigma(\lambda_1, \theta_1)\Delta(\lambda_1) - \varepsilon_0 E \Delta(\lambda) + \rho[c\varepsilon_0 + v(\lambda_1, \theta_1)] = 0 \quad (3.7)$$

Соотношения (1.1), (1.5), (3.1), (3.2), (3.6), (3.7) представляют собой систему девяти нелинейных уравнений с девятью неизвестными:

$$\lambda, \theta, \lambda_1, \theta_1, T_1, \sigma(\lambda_1, \theta_1), v(\lambda_1, \theta_1), \varepsilon(\lambda_1, \theta_1), g(\lambda_1, \theta_1)$$

из которых существенны только две: λ и θ .

Рассмотренный метод построения ВР в виде прямой (2.3) может быть распространен на случай аппроксимации ВР алгебраическим многочленом любой целой положительной степени.

β		5	7	9	5	7	9	5	7	9
А	α	0.25			0.49			0.81		
	λ , см	1.65	2.91	4.11	8.65	14.2	19.8	58.1	89.3	122
	$\theta \cdot 10^6$, с	16	21	25	32	47	61	127	190	257
Б	α	0.17	0.16	0.16	0.32	0.31	0.31	0.53	0.53	0.53
	λ , см	3.14	5.07	7.11	13.8	21.0	28.3	48.3	70.2	92.3
	$\theta \cdot 10^6$, с	24	33	48	54	78	103	131	188	246

В таблице приведены результаты вычисления λ и θ для прямолинейной ВР для одних и тех же материалов, законы деформирования которых описаны разными зависимостями $\sigma(\epsilon)$: А) соотношениями (1.1), (1.2), Б) диаграммой Прандтля, представляющей собой линеаризацию соотношений (1.1), (1.2). Расчеты выполнены при следующих значениях постоянных:

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad c = 5.5 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \quad \epsilon_0 = (4/3) \cdot 10^{-3}, \quad t_0 = 10^{-5} \text{ с},$$

$$\beta = 5, 7, 9$$

причем в расчетах серии А $\alpha = 0.25, 0.49, 0.81$, а расчеты серии Б проводились по формулам (2.7), в которых коэффициент α , как обычно делают при замене реальной диаграммы $\sigma(\epsilon)$ схемой Прандтля, вычислялся по формуле

$$\alpha = [(\sigma_m - \sigma_0)/(\epsilon_m - \epsilon_0)]/E$$

Нагрузка на стержень принималась изменяющейся по линейному закону (2.6), когда общая ее продолжительность $T_0 = 4T$, где T – продолжительность роста нагрузки до максимальной $q(T) = \sigma_m$, соответствующей деформации $\epsilon_m = 0.8\epsilon_*$.

В расчетах серии А решение системы уравнений было получено методом пошагового приближения к неизвестной T_1 с применением внутри каждого приближения метода простых итераций. Все результаты получены с относительной погрешностью по норме $l = \sqrt{\lambda^2 + [kc(\theta - T)]^2}$ порядка 10^{-3} . В зависимости от входных данных невязка (абсолютное значение отношения разности значений T_1 на конечном и предыдущем шагах к значению T_1 на предыдущем шаге) лежала в пределах от 0.11 до 0.19, причем, начиная с некоторого значения шага T_1 , уменьшение шага переставало влиять на значение невязки и погрешность. Это может быть как следствием несовершенства метода решения системы уравнений, так и указанием на то, что решаемая система уравнений несовместна в результате представления ВР отрезком прямой и применения других упрощений.

Результаты расчетов серий А и Б, полученные при разных способах описания зависимости $\sigma(\epsilon)$ для одного и того же материала, существенно различаются, что указывает на необходимость применять функции $\sigma(\epsilon)$, наиболее адекватно описывающие деформационные свойства реальных материалов, и следовательно, на актуальность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х.А.* О распространении волн разгрузки // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 1. С. 91–100.
2. *Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
3. *Шапиро Г.С.* Продольные колебания стержней // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 5/6. С. 597–616.
4. *Лазуткин Д.Ф.* Распространение упругопластических волн вдоль цилиндрического стержня // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 94–100.
5. *Бидерман В.Л.* Расчеты на ударную нагрузку // Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1959. Т. 3. С. 479–580.
6. *Тарабрин Г.Т.* Редуктивная модель процесса растяжения хрупкого материала и вопросы расчета с полной диаграммой нагружения // Бетон и железобетон. 1994. № 4. С. 22–26; № 5. С. 26–28.
7. *Бычков Н.Г., Петухов А.Н., Пучков И.В.* Некоторые особенности кинетики деформирования конструкционных материалов при циклическом упругопластическом деформировании // Проблемы прочности. 1986. № 11. С. 7–11.

Волгоград
e-mail: tageti@mail.ru

Поступила в редакцию
25.I.2005