УДК 539.3

© 2006 г. С. А. Назаров

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВНУТРИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

При помощи построения формальной трехчленной асимптотики упругих полей выведено одномерное интегральное уравнение, решение которого позволяет проследить (малое и гладкое) изменение формы межфазной границы в зависимости от времениподобного параметра нагружения. Оператор и другие данные уравнения выражаются через операторы Стеклова – Пуанкаре для разделенных в начальный момент фаз и решения задачи с фиксированной межфазной границей. Исследование уравнения устанавливает устойчивость развития, возможность бифуркаций или необходимость учета динамических эффектов. Как частный случай получены известное термодинамическое условие на межфазной границе и новое условие ее классической устойчивости.

1. Постановка квазистатической задачи. Рассмотрим плоское упругое тело Ω, внутренняя часть Ω_t^+ которого претерпела фазовый переход. Предположим, что граница Γ_t раздела двух фаз – простой гладкий замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей $\partial\Omega$ самого тела. При этом Ω_t^+ – область, ограниченная контуром Γ_t, и $\Omega_t^- = \Omega\backslash(\Omega_t^+ \cup \Gamma_t)$. Для упрощения формулировок считаем, что тело жестко защемлено вдоль непустой открытой дуги $\Upsilon \subset \partial\Omega$. К остальной части Σ границы $\partial\Omega$ приложены внешние усилия

$$g^t(x) = g^0(x) + tg^1(x) + t^2g^2(x) + \ldots \tag{1.1}$$

Здесь t – безразмерный времениподобный параметр нагружения, неотрицательный и строго монотонный по отношению к реальному времени. Скорость изменения параметра t предполагается малой в сравнении со скоростями распространения упругих волн, отнесенными к характерному размеру составного тела. Последнее обстоятельство позволяет обоснованно пренебречь инерционными членами и обеспечивает *квазистатическую формулировку задачи об эволюции межфазной поверхности*, в которой для известного начального контура Γ_0 требуется найти его положение Γ_t при $t > 0$.

При каждом $t \geq 0$ вектор смещений u^t и тензоры деформаций ε^t и напряжений σ^t, связанные линейными соотношениями

$$\varepsilon_{jk}^{t\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_k^{t\pm} + \frac{\partial}{\partial x_k}u_j^{t\pm}\right), \quad \sigma^{t\pm} = A^{\pm}\varepsilon^{t\pm} \text{ в } \Omega_t^{\pm} \tag{1.2}$$

удовлетворяют однородным (массовых сил нет) уравнениям равновесия, а также краевым условиям на внешней границе и условиям сопряжения (идеальный контакт) на межфазной границе

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{kj}^{t\pm} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{в} \quad \Omega_t^{\pm} \tag{1.3}$$

$$n_j\sigma^t_{kj} = g^t_k, \quad k = 1, 2, \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad u^{t-} = 0 \quad \text{на} \quad \Upsilon \tag{1.4}$$

$$[u] = 0, \quad \nu^t_j\sigma^{t+}_{kj} = \nu^t_j\sigma^{t-}_{kj} \quad \text{на} \quad \Gamma_t \tag{1.5}$$

Кроме того, $A(x) = A^{\pm}$ – тензоры Гука для фаз $\Omega^{\pm}_t$; по повторяющимся индексам $j = 1, 2$ производится суммирование; $[\upsilon] = \upsilon^+ - \upsilon^-$ – скачок функции υ на Γ_t; $\nu^t = (\nu^t_1, \nu^t_2)$ и $n = (n_1, n_2)$ – единичные векторы внешних (относительно областей, охватываемых контурами) нормалей на Γ_t и $\partial\Omega \cup \Gamma_0$; в частности, $\nu^0 = n$ на Γ_0. Ввиду наличия в (1.4) условий Дирихле задача (1.3)–(1.5) однозначно разрешима при всех $t \geq 0$ и $g^t \in L_2(\Sigma)^2$ вне зависимости от положения межфазной границы (условие, налагаемое на вектор-функцию g^t, можно ослабить). Решение $u^t \in H^1(\Omega)^2$ оказывается бесконечно дифференцируемым внутри областей $\Omega^{\pm}_t$, а при гладкой правой части первого условия (1.4) и на открытой дуге Σ, но не в ее концевых точках. На гладком контуре Γ_t существуют односторонние производные смещений u^t любого порядка.

Положение и форма контура Γ_t определяется из следующего требования (ср. с [1–3] и др.): *в любой момент $t \geq 0$ функционал*

$$\mathcal{U}_t = U_t + \sum_{\pm}\gamma^{\pm}_t \operatorname{mes}_2\Omega^{\pm}_t \tag{1.6}$$

вычисленный на решении задачи (1.3)–(1.5), *принимает наименьшее значение в сравнении с другими возможными положениями межфазной границы*. В равенстве (1.6) U_t – потенциальная энергия деформации, запасенная составным телом $\Omega_t := \Omega^+_t \cup \Omega^-_t$,

$$U_t = E_t - R_t, \quad E_t = \frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_{\Omega^{\pm}_t}\sigma^{t\pm} : \varepsilon^{t\pm}dx, \quad R_t = \int_{\Sigma} u^{t-} \cdot g^t ds \tag{1.7}$$

$$\gamma^{\pm}_t = \gamma^{\pm}_0 + t\gamma^{\pm}_1 + t^2\gamma^{\pm}_2 + \ldots \tag{1.8}$$

Кроме того, $\operatorname{mes}_2\Omega^{\pm}_t$ – площадь фигуры $\Omega^{\pm}_t$, E_t – упругая энергия, R_t – работа внешних сил, $\gamma^{\pm}_t$ – плотности энергий недеформированных состояний (обычно $\gamma^{\pm}_1 = \gamma^{\pm}_2 = 0$). В формуле (1.7) точкой обозначено скалярное произведение векторов, а двоеточием – свертка тензоров.

В данной статье сложная математическая задача совместного нахождения межфазной границы и упругих полей (существование и единственность решения, гладкость границы и полей) не затрагивается – по этому поводу см., например, [3]. Считается, что решение в начальный момент $t = 0$ известно и обладает нужными свойствами. В результате формального асимптотического анализа функционал (1.6) и дифференциальная задача (1.3)–(1.5) заменяются асимптотическим приближением к $\mathcal{U}_t$ и соответствующим уравнением Эйлера, порождающим интегральный оператор на контуре Γ_0. Последние и составляют предмет исследования. То же касается и упомянутой в разд. 7 задачи с поверхностной энергией, где в функционал (1.6) вводится дополнительный интеграл по дуге Γ_t. Основные допущения, при которых указанные подмены вообще имеют смысл, – гладкость, замкнутость и простота контура, разделяющего фазы. Отметим, что в случае гладких пробных функций первая и вторая вариации самого функционала (1.6) совпадают с аналогичными вариациями его асимптотического эрзаца.

В разд. 3 и 4 конструируются три члена асимптотики решения задачи (3)–(5) относительно параметра t и неизвестной заранее функции h, задающей возмущение контура Γ_0 (см. далее формулы (2.1) и (2.5)). Как и в задаче о распространении плоской трещины в хрупком упругом теле в рамках энергетического критерия Гриффитса (см. [4–6]), квазистатическая модель возникает в результате замены функционала (6) его квадратичной аппроксимацией

$$\mathcal{U}^{(0)} + t\mathcal{U}^{(1)}(h) + t^2\mathcal{U}^{(2)}(h) \tag{1.9}$$

найденной на основе упомянутой асимптотики. Второе слагаемое $\mathcal{U}^{(1)}(h)$ линейно зависит от h, и поэтому функционал (1.9) может достигать минимума при малой вариации контура Γ_0 лишь в случае связи (3.8) между полями $\sigma^{0\pm} = \sigma^{t\pm}|_{t=0}$ и $\varepsilon^{0\pm} = \varepsilon^{t\pm}|_{t=0}$ на Γ_0. Эта связь, известная как термодинамическое условие на межфазной границе (см. [1–3] и др.), является необходимым условием минимума функционала (1.6) в точке $t = 0$ при разделительной линии Γ_0 и интерпретируется в разд. 7 как равенство скачков плотностей *поверхностной энтальпии* и *остаточной внутренней энергии*.

Последнее слагаемое в трехчлене (1.9) – квадратичный функционал от h и условие его экстремума порождает для функции h *ростовое уравнение* (4.10) на Γ_0, названное так по аналогии с уравнением, описывающим подрастание свободной поверхности развивающейся квазистатически трещины в упругом хрупком трехмерном теле (см. [4–6]). Подчеркнем, что данные упомянутого уравнения находятся по решениям u^0 и $\hat{u}^1$ задачи (1.3)–(1.5) для составного тела Ω_0 при нагрузках g^0 и g^1, а фигурирующий в нем псевдодифференциальный оператор B выражается через операторы Стеклова – Пуанкаре для разъединенных тел $\Omega_0^{\pm}$ и дифференциальные операции на дуге Γ_0 (см. разд. 5 и 2). Как и следовало ожидать, члены t^2g^2 и $t^2\gamma_2^{\pm}$ представлений (1.1) и (1.8) не участвуют в формировании ростового уравнения.

По решению $h = t\hat{h}$ уравнения приближенно определяется форма контура Γ_t, точнее, начальные скорости $\hat{h}(s)$ продвижения точек $s \in \Gamma_0$ вдоль нормальных направлений. Погрешность составляет $O(t^3)$, и при желании проследить развитие межфазной границы на большом промежутке изменения времениподобного параметра следует применять предлагаемые асимптотические конструкции в пошаговом режиме (аналогично методу ломаных Пеано) : интервал $(0, T)$ разбивается на малые промежутки (t_{N-1}, t_N) и по решению h_{N-1} определяется положение межфазной границы Γ_N в момент $t = t_N$, на которой восстанавливаются новые данные ростового уравнения для функции h_N.

В разд. 6 обсуждается устойчивость квазистатического развития границы Γ_t в рамках предложенной асимптотической модели. Заключения, сделанные на основе асимптотических формул из разд. 3 и 4, отличаются от полученных другими авторами ([7, 8] и др.) на основании анализа устойчивости уравнения эволюции межфазной границы, связанного с привходящими физическими процессами. Если убрать параметр t и считать, что в формулах (1.1) и (1.8)

$$g^t = g^0, \quad \gamma_{\pm}^t = \gamma_{\pm}^0 \tag{1.10}$$

проведенные вычисления сохраняют смысл, предоставляя первую и вторую вариации функционала (1.6) при возмущении межфазной границы. Формула для первой вариации ничем не отличается от известных (см. [1–3] и др.), однако выражение для второй вариации проще и нагляднее в сравнении с найденным ранее [9, 10] с привлечением материальных производных функционалов – классического аппарата теории оптимизации формы (см. [11, 12] и др.).

2. Локальные координаты. В окрестности $\mathcal{V}$ линии Γ_0 введем систему естественных криволинейных координат (n, s), где n – расстояние до Γ_0 и $\mp n > 0$ в $\Omega_0^{\pm} \cap \mathcal{V}$, а s – длина дуги на Γ_0. При малом $t \geq 0$ контур Γ_t определен следующим равенством, в котором $h(t; \cdot)$ – гладкая функция на контуре Γ_0:

$$n = h(t; s) \tag{2.1}$$

Поскольку в координатах (n, s) дифференциальный оператор градиента имеет вид $(\partial_n, D(n, s)^{-1}\partial_s)$, нормальный ν и касательный τ векторы на Γ_t вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} d(n, s)\nu(t; s) = (1, -D(h(t; s), s)^{-1}h'(t; s)), \quad d(n, s)\tau(t; s) = (D(h(t; s), s)^{-1}h'(t; s), 1) \\ \partial_n = \partial/\partial n, \quad \partial_s = \partial/\partial s, \quad h' = \partial_s h \end{gathered} \tag{2.2}$$

При этом $D(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ – якобиан, $d = (1 + h'^2D^2)^{1/2}$ – нормирующий множитель, $\kappa(s)$ – кривизна дуги Γ_0 в точке s. В правых частях равенств (2.2) первой написана проекция вектора на направление n, а второй – на s. Укажем еще компоненты тензора деформаций и уравнения равновесия в криволинейных координатах

$$\varepsilon_{nn} = \partial_n u_n, \quad \varepsilon_{ss} = D^{-1}(\partial_s u_s + \kappa u_n), \quad \varepsilon_{ns} = \varepsilon_{sn} = (\partial_n u_s + D^{-1}(\partial_s u_n - \kappa u_s))/2 \tag{2.3}$$

$$\partial_n\sigma_{nn} + D^{-1}(\partial_s\sigma_{ns} - \kappa(\sigma_{ss} - \sigma_{nn})) = 0, \quad \partial_n\sigma_{sn} + D^{-1}(\partial_s\sigma_{ss} + 2\kappa\sigma_{sn})) = 0 \tag{2.4}$$

Присвоим функции h и ее производным по s порядок t, т.е. примем соотношение

$$h(t; s) = t\hat{h}(s) + \ldots \tag{2.5}$$

Игнорирование величины $O(t^2)$ в соотношении (2.5) согласуется с упомянутым в разд. 1 отсутствием влияния слагаемых t^2g^2 и $t^2\gamma_2^{\pm}$ из разложений (1.1) и (1.8) на представляющее интерес ростовое уравнение. Будем искать решение задачи (1.3)–(1.5) в составном теле Ω_t с регулярно возмущенной линией раздела в виде асимптотического ряда

$$u^t(x) = u^0(x) + u^1(t; x) + u^2(t; x) + \ldots \tag{2.6}$$

Члену $u^p(t; x)$ придадим порядок t^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. Для сокращения записи далее аргумент t у функций (2.1) и (2.6) не указываем.

Снесем на базовый контур Γ_0 условия отсутствия скачков смещений на возмущенном контуре Γ_t. С этой целью продолжим гладко поля $u^{p\pm}$ с областей $\Omega_0^{\pm}$ на $\Omega_0^{\mp} \cap \mathcal{V}$ и разложим их в ряды Тейлора по переменной n, которую, в согласии с формулой (2.1), возьмем равной $h(t; s)$. В результате находим, что на дуге Γ_0 с точностью $O(t^3)$ выполняется соотношение

$$[u^t] = [u^0] + \{[u^1] + h[\partial_n u^0]\} + \left\{[u^2] + h[\partial_n u^1] + \frac{1}{2}h^2[\partial_n^2 u^0]\right\} + \ldots \tag{2.7}$$

Для аналогичной обработки скачков напряжений заметим, что согласно выражениям (2.2) на контуре Γ_t верны равенства

$$d^2\sigma_{\nu\nu} = \sigma_{nn} - 2h'D^{-1}\sigma_{ns} + h'^2D^{-2}\sigma_{ss}, \quad d^2\sigma_{\nu\tau} = \sigma_{ns} + h'D^{-1}(\sigma_{nn} - \sigma_{ss}) + h'^2D^{-2}\sigma_{ns}$$

Таким образом,

$$d^2[\sigma^t_{\nu\nu}] = [\sigma^0_{nn}] + \{[\sigma^1_{nn}] + h[\partial_n\sigma^0_{nn}] - 2h'[\sigma^0_{ns}]\} +$$

$$+\left\{[\sigma^2_{nn}] + h[\partial_n\sigma^1_{nn}] - 2h'[\sigma^1_{ns}] + \frac{1}{2}h^2[\partial^2_n\sigma^0_{nn}] - 2h'h([\partial_n\sigma^0_{ns}] - \kappa[\sigma^0_{ns}]) + h'^2[\sigma^0_{ss}]\right\} + \ldots \tag{2.8}$$

$$d^2[\sigma^t_{\nu\tau}] = [\sigma^0_{ns}] + \{[\sigma^1_{ns}] + h[\partial_n\sigma^0_{ns}] + h'([\sigma^0_{nn}] - [\sigma^0_{ss}])\} +$$

$$+\left\{[\sigma^2_{ns}] + h[\partial_n\sigma^1_{ns}] + h'([\sigma^1_{nn}] - [\sigma^1_{ss}]) + \frac{1}{2}h^2[\partial^2_n\sigma^0_{ns}] + \right.$$

$$\left. + h'h([\partial_n\sigma^0_{nn}] - [\partial_n\sigma^0_{ss}]) - h'h\kappa([\sigma^0_{nn}] - [\sigma^0_{ss}]) + h'^2[\sigma^0_{ns}]\right\} + \ldots \tag{2.9}$$

Здесь $\sigma^p_{\alpha\beta}$ – напряжения, вычисленные на смещениях u^p. Подчеркнем, что благодаря соотношению (2.5) в правых частях равенств (2.7)–(2.9) первые фигурные скобки заключают величины $O(t)$, а вторые – $O(t^2)$. Наконец, анзацам (2.6) и (1.1), (1.8) отвечают такие разложения функционалов из определения (1.6):

$$U_t = -\frac{1}{2}R_t = -\frac{1}{2}\int\limits_\Sigma g^0\cdot u^0 ds - \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma (g^0\cdot u^1 + tg^1\cdot u^0)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Sigma (g^0\cdot u^2 + tg^1\cdot u^1 + t^2g^2\cdot u^0)ds + \ldots \tag{2.10}$$

$$\sum_\pm \gamma^\pm_t \mathrm{mes}_2\Omega^\pm_t = \sum_\pm \gamma^\pm_t \mathrm{mes}_2\Omega^\pm_0 + [\gamma_t]\int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_0^{h(t;\,s)} D(n,s)dnds =$$

$$= \sum_\pm \gamma^\pm_0 \mathrm{mes}_2\Omega^\pm_t + \left\{t\sum_\pm \gamma^\pm_1 \mathrm{mes}_2\Omega^\pm_0 + [\gamma_0]\int\limits_{\Gamma_0} h(t;\,s)ds\right\} +$$

$$+\left\{t^2\sum_\pm \gamma^\pm_2 \mathrm{mes}_2\Omega^\pm_0 + \int\limits_{\Gamma_0}\left(t[\gamma_1]h(t;\,s) + \frac{1}{2}[\gamma_0]\kappa(s)h(t;\,s)^2\right)ds\right\} + \ldots \tag{2.11}$$

В выкладке (2.10) применено равенство $2E_t = R_t$, вытекающее из определения (1.7) и формулы Грина для решения задачи (1.3)–(1.5), а в соотношении (2.11) приращения объемов фаз $\mathrm{mes}_2(\Omega^\pm_t\backslash\Omega^\pm_0) - \mathrm{mes}_2(\Omega^\pm_0\backslash\Omega^\pm_t)$ записаны как повторный интеграл. Кроме того, введены обозначения $[\gamma_t] = \gamma^+_t - \gamma^-_t$ и т.п. Отметим, что сумма вторых слагаемых из правых частей равенств (2.10) и (2.11) совпадает с составляющей $t\mathcal{U}^{(1)}(h)$ трехчлена (1.9), а сумма третьих – с составляющей $t^2\mathcal{U}^{(1)}(h)$.

3. Основной и второй члены асимптотики. Ясно, что в качестве основного члена u^0 анзаца (2.6) следует взять решение задачи (1.3)–(1.5) с межфазной границей Γ_0 и нагрузкой g^0. Так как данные асимптотически точно перенесены с возмущенного контура Γ_t на базовый Γ_0, второй член u^1 также является решением задачи для составного тела Ω_0. Для u^1 выполняются уравнения равновесия (1.3) в $\Omega_0^{\pm}$, краевые условия (1.4) с правой частью g^1 и неоднородные условия сопряжения

$$[u_k^p] = \varphi_k^p, \quad [n_j\sigma_{kj}] = \psi_k^p, \quad k = 1,2, \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \tag{3.1}$$

в которых $p = 1$.

Подчеркнем, что здесь и далее все скачки вычисляются именно на дуге Γ_0. Данные φ^1 и ψ^1 в условиях (3.1) находятся из требования обращения в нуль выражений (2.7)–(2.9). Сумма из первых фигурных скобок в соотношении (2.7) исчезает в случае, если $\varphi^1 = -[\partial_n u^0] = 0$, т.е. согласно формулам (2.3) и равенству $[u^0] = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_n^1 &= -h[\partial_n u_n^0] = -h[\varepsilon_{nn}^0]\\ \varphi_s^1 &= -h[\partial_s u_s^0] = -2h[\varepsilon_{sn}^0] + hD^{-1}(\partial_s[u_n^0] - \kappa[u_s^0]) = -2h[\varepsilon_{sn}^0]\end{aligned} \tag{3.2}$$

Анализируя разложения (2.8) и (2.9), получаем

$$\psi_n^1 = -h[\partial_n\sigma_{nn}^0] + 2h'[\sigma_{ns}^0], \quad \psi_s^1 = -h[\partial_n\sigma_{ns}^0] - h'([\sigma_{nn}^0] - [\sigma_{ss}^0])$$

Преобразуем эти функции, воспользовавшись равенствами $D = 1$ и $[\sigma_{nn}^0] = [\sigma_{ns}^0] = 0$ на контуре Γ_0 и уравнениями равновесия (2.4) в $\Omega_0^{\pm} \cup \Gamma_0$ для напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^0$:

$$\begin{aligned}\psi_n^1 &= h[\partial_s\sigma_{ns}^0] - h\kappa[\sigma_{ss}^0] + h\kappa[\sigma_{nn}^0] = -h\kappa[\sigma_{ss}^0]\\ \psi_s^1 &= h[\partial_s\sigma_{ss}^0] + 2h\kappa[\sigma_{ns}^0] + h'[\sigma_{ss}^0] = \partial_s(h[\sigma_{ss}^0])\end{aligned} \tag{3.3}$$

Существует единственное решение задачи (1.3), (1.4), (3.1) с нагрузкой g^1 и со скачками (3.2), (3.3) на межфазной границе Γ_0. Это решение представимо в виде суммы

$$u^p = u^{p0} + u^{p1} \tag{3.4}$$

При этом $p = 1$, u^{10} – решение при нулевых скачках на Γ_0, а u^{11} – при отсутствии нагрузки g^1 на Σ.

Для второго интеграла из соотношения (2.10) выводим равенство

$$\int_\Sigma (g^0 \cdot u^1 + tg^1 \cdot u^0)ds = \int_\Sigma (g^0 \cdot u^{10} + tg^1 \cdot u^0)ds + \int_\Sigma g^0 \cdot u^{11} ds \tag{3.5}$$

Первое слагаемое справа не зависит от функции h, описывающей возмущение контура. Интегрируя по частям, преобразуем последний интеграл в правой части равенства (3.5) при помощи соотношений (3.2), (3.3) и (2.3)

$$\int_\Sigma g^0 \cdot u^{11} ds = \int_\Sigma \nu_j(\sigma_{kj}^0 u_k^{11} - \sigma_{kj}^{11} u_k^0)ds = -\int_{\Gamma_0} n_j(\sigma_{kj}^0[u_k^{11}] - [\sigma_{kj}^{11}]u_k^0)ds =$$

$$= \int_{\Gamma_0} (\sigma_{nn}^0\varphi_n^1 + \sigma_{ns}^0\varphi_s^1 - \psi_n^1 u_n^0 - \psi_s^1 u_s^0)ds =$$

$$= \int_{\Gamma_0} (h\sigma_{nn}^0[\varepsilon_{nn}^0] + 2h\sigma_{ns}^0[\varepsilon_{ns}^0] - h\kappa[\sigma_{ss}^0]u^0 + \partial_s(h[\sigma_{ss}^0])u_s^0)ds =$$

$$= \int_{\Gamma_0} h(\sigma_{nn}^0[\varepsilon_{nn}^0] + 2\sigma_{ns}^0[\varepsilon_{ns}^0] - [\sigma_{ss}^0]\varepsilon_{ss}^0)ds =: \int_{\Gamma_0} h(s)f_0(s)ds \tag{3.6}$$

Здесь и далее функции, непрерывные на Γ_0 вследствие условий сопряжения, пишутся без индексов $\pm$.

Согласно выкладкам (2.11) и (3.5), (3.6) сумма

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} hf_0 ds + [\gamma^0]\int_{\Gamma_0} hds \tag{3.7}$$

является первой вариацией функционала (1.6) при $t = 0$, т.е. при условиях (1.10) и при $u^{10} = 0$. Поскольку предполагается, что в момент $t = 0$ межфазная граница занимает положение Γ_0, вариация (3.7) обязана обратиться в нуль, а значит, ввиду произвольности пробной функции h выполняется равенство

$$\frac{1}{2}(\sigma^0_{nn}[\varepsilon^0_{nn}] + 2\sigma^0_{ns}[\varepsilon^0_{ns}] - [\sigma^0_{ss}]\varepsilon^0_{ss}) = [\gamma_0] \ \text{ на } \ \Gamma_0 \tag{3.8}$$

Отметим, что при нарушении равенства (3.8) функционал (1.9) заведомо не имеет минимума при малых t, поскольку выражению (3.7) можно придать любое наперед заданное значение $O(t)$ путем подбора функции h.

Простые алгебраические преобразования показывают, что соотношение (3.8) эквивалентно обычному термодинамическому условию на межфазной границе (см. [1–3] и др.). Подчеркнем, что в силу однородных условий (1.5) на Γ_0 напряжения σ^0_{nn}, σ^0_{ns} и деформация ε^0_{ss} непрерывны на контуре Γ_0, а требование (3.8) можно сформулировать так:

$$\overline{\sigma^0} : [\varepsilon^0] - [\sigma^0] : \overline{\varepsilon^0} = 2[\gamma_0] \ \text{ на } \ \Gamma_0$$

Здесь $[v]$ и $\overline{v} = (v^+ + v^-)/2$ – скачок и среднее значение функции v на контуре Γ_0.

4. Третий член асимптотики. Слагаемое u^2 анзаца (2.6) удовлетворяет условиям сопряжения (3.1), где $p = 2$, а правые части согласно разложению (2.7) имеют вид

$$\begin{aligned}
\varphi^2_n &= -h[\partial_n u^1_n] - \frac{1}{2}h^2[\partial^2_n u^0_n] = -h[\varepsilon^{11}_{nn}] - h^2\varphi^{21}_n - h\varphi^{20}_n \\
\varphi^2_s &= -h[\partial_n u^1_s] - \frac{1}{2}h^2[\partial^2_n u^0_s] = -2h[\varepsilon^{11}_{ns}] - h^2\varphi^{21}_s - h\varphi^{20}_s - hh'\Phi^{21}_s
\end{aligned} \tag{4.1}$$

При этом благодаря формулам (2.3), (3.2), (3.4) и условиям (3.1) для $[u^1]$ верны равенства

$$\begin{aligned}
\varphi^{21}_n &= \frac{1}{2}[\partial^2_n u^0_n], \quad \varphi^{21}_s = \frac{1}{2}[\partial^2_n u^0_s] + \partial_s[\varepsilon^0_{nn}] - 2\kappa[\varepsilon^0_{sn}] \\
\varphi^{20}_n &= t[\partial_n \hat{u}^1_n], \quad \varphi^{20}_s = t[\partial_n \hat{u}^1_s], \quad \Phi^{21}_s = [\varepsilon^0_{nn}]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Подчеркнем, что функции (4.2) не зависят от h и определяются по решениям u^0 и u^{10} задачи для составного тела Ω_0 с нулевыми скачками на Γ_0, а $\hat{u}^1$ – решение задачи (1.3)–(1.5) для тела Ω_0 под нагрузкой $\hat{g} = g^1$. При помощи формул (2.4), (3.3), (3.4) и условий (3.1) для скачков $[\sigma^1_{nn}]$, $[\sigma^1_{ns}]$ проделаем аналогичные (4.1) преобразования правых частей равенств $[\sigma^2_{nn}] = \ldots$ и $[\sigma^2_{ns}] = \ldots$, извлеченных из правых частей равенств (2.8) и (2.9), и придем к соотношениям

$$\psi_n^2 = -\kappa h[\sigma_{ss}^{11}] + h^2\psi_n^{21} + h\psi_n^{20} + h'h\Psi_n^{21} + (h''h + h'^2)[\sigma_{ss}^0]$$
$$\psi_s^2 = -\partial_s(h[\sigma_{ss}^{11}]) + h^2\psi_s^{21} + \partial_s(h\psi_s^{20}) + hh'\Psi_s^{21} \tag{4.3}$$

Здесь согласно представлениям $u^{10} = t\hat{u}^1$ и $\sigma^{10} = t\hat{\sigma}^1$ фигурируют величины

$$\psi_n^{21} = \partial_s^2[\sigma_{ss}^0] - \kappa^2[\sigma_{ss}^0] - \frac{1}{2}[\partial_n^2\sigma_{nn}^0], \quad \psi_s^{21} = 2\kappa\partial_s[\sigma_{ss}^0] - \frac{1}{2}[\partial_n^2\sigma_{ns}^0]$$
$$\psi_n^{20} = -t\kappa[\hat{\sigma}_{ss}^1], \quad \psi_s^{20} = t[\hat{\sigma}_{ss}^1], \quad \Psi_n^{21} = 2\partial_s[\sigma_{ss}^0], \quad \Psi_s^{21} = \kappa[\sigma_{ss}^0] + [\partial_n\sigma_{ss}^0] \tag{4.4}$$

Помимо условий сопряжения (3.1) с правыми частями (4.1), (4.3) для полей u^2 и σ^2 выполнены уравнения равновесия (1.3) и краевые условия (1.4) с правой частью g^2 из формулы (1.1). Существует единственное решение указанной задачи; оно гладкое в $\Omega^\pm$ вплоть до контура Γ_0 и представимо в виде суммы (3.4) при $p = 2$, причем $u^{20} = t^2\hat{u}^2$ и u^{21} – решения задачи в Ω_0 соответственно с нулевыми скачками на Γ_0 и нулевой внешней нагрузкой на Σ.

Игнорируя в разложениях (2.10) и (2.11) асимптотические члены, не зависящие от h, видим, что анализу подлежит сумма

$$-\frac{1}{2}\int_\Sigma (g^0 \cdot u^{21} + tg^1 \cdot u^{11})ds + \int_{\Gamma_0}\left(t[\gamma_1]h + \frac{1}{2}[\gamma_0]\kappa h^2\right)ds \tag{4.5}$$

являющаяся величиной $O(t^2)$ и составляющая функционал $t^2(\mathcal{U}^{(2)}(h) - \mathcal{U}^{(2)}(0))$.

Повторив с очевидными изменениями выкладку (3.6), обнаруживаем, что

$$\int_\Sigma g^1 \cdot u^{11} ds = -\int_{\Gamma_0} (\sigma_{nn}^{10}\varphi_n^1 + \sigma_{ns}^{10}\varphi_s^1 - \psi_n^1 u_n^{10} - \psi_s^1 u_s^{10})ds =$$

$$= t\int_{\Gamma_0} h(\hat{\sigma}_{nn}^1[\varepsilon_{nn}^0] + 2\hat{\sigma}_{ns}^1[\varepsilon_{ns}^0] - [\sigma_{ss}^0]\hat{\varepsilon}_{ss}^1)ds =: t\int_{\Gamma_0} h(s)f_1(s)ds \tag{4.6}$$

Продолжим вычисления и получим

$$\int_\Sigma g^0 \cdot u^{21} ds = -\int_{\Gamma_0} (\sigma_{nn}^0\varphi_n^2 + \sigma_{ns}^0\varphi_s^2 - \psi_n^2 u_n^0 - \psi_s^2 u_s^0)ds =$$

$$= \int_{\Gamma_0} h(s)(B(h; s) + b(s)h(s) + tf_2(s))ds \tag{4.7}$$

Здесь

$$b = \varphi_n^{21}\sigma_{nn}^0 + \varphi_s^{21}\sigma_{ns}^0 + \psi_n^{21}u_n^0 + \psi_s^{21}u_s^0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(\Phi_s^{21}\sigma_{ns}^0 + \Psi_n^{21}u_n^0 + \Psi_s^{21}u_s^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}([\sigma_{ss}^0]u_s^0)$$
$$f_2 = \sigma_{nn}^0[\hat{\varepsilon}_{nn}^1] + 2\sigma_{ns}^0[\hat{\varepsilon}_{ns}^1] - \varepsilon_{ss}^0[\hat{\sigma}_{nn}^1] \tag{4.8}$$

B – оператор, определенный по формуле

$$\int_{\Gamma_0} H(s)B(h; s)ds = \int_{\Gamma_0} H(\sigma_{nn}^0[\varepsilon_{nn}^{11}] + 2\sigma_{ns}^0[\varepsilon_{ns}^{11}] - \varepsilon_{ss}^0[\sigma_{nn}^{11}])ds \tag{4.9}$$

в которой H – пробная функция из $C^\infty(\Gamma_0)$, скачки $[\sigma^{11}_{...}]$ и $[\varepsilon^{11}_{...}]$ в соответствии с определениями (3.2) и (3.3) являются значениями на h линейных операторов. Следовательно, верна оценка

$$\sum_{\pm}(\|\varepsilon^{11\pm}; H^{l-1/2}(\Gamma_0)\| + \|\sigma^{11\pm}; H^{l-1/2}(\Gamma_0)\|) \le$$

$$\le c\sum_{\pm}\|u^{11\pm}; H^{l+1}(\Omega_0^\pm \cap \mathcal{V})\| \le c\|h; H^{l+1/2}(\Gamma_0)\|$$

Постоянная c зависит от полей $\sigma^{0\pm}|_{\Gamma_0}$ и $\varepsilon^{0\pm}|_{\Gamma_0}$, тензоров Гука $A^\pm$ и геометрии границ $\partial\Omega$ и Γ_0.

Итак, оператор B осуществляет непрерывное отображение: $H^{l+1/2}(\Gamma_0) \to H^{l-1/2}(\Gamma_0)$; под $H^m(\Gamma_0)$ подразумеваем пространство Соболева – Слободецкого.

Теперь, вычисляя и приравнивая нулю вариацию функционала (4.5), приходим к уравнению на контуре Γ_0

$$-\frac{1}{2}(B(h; s) + B^*(h; s)) + ([\gamma_0]\kappa(s) - b(s))h(s) = \frac{1}{2}t(f_1(s) + f_2(s) - 2[\gamma_1]), \quad s \in \Gamma_0 \quad (4.10)$$

Его решение следует искать в форме (2.5) без многоточия. Уравнение (4.10) называем *ростовым*, поскольку его решение в соответствии с формулой (2.1) дает информацию о квазистатическом развитии межфазной границы.

5. Оператор B. Для того чтобы построить оператор (4.9) и сопряженный оператор B^*, фигурирующие в уравнении (4.10), потребуются обозначения, странные на первый взгляд (пояснения см. в разд. 7). Определим столбцы

$$\zeta = (\sigma_{nn}, 2^{1/2}\sigma_{ns}, -\varepsilon_{ss})^\top, \quad \eta = (\varepsilon_{nn}, 2^{1/2}\varepsilon_{ns}, \sigma_{ss})^\top \quad (5.1)$$

где $2^{1/2}$ – нормирующий множитель, $\top$ – знак транспонирования. Заметим, что столбец ζ^0, рассчитанный по решению u^0 задачи (1.3)–(1.5) при фиксированной межфазной границе, непрерывен на контуре Γ_0, а термодинамическое условие (3.8) теперь можно сформулировать так:

$$\frac{1}{2}[\eta^0]^\top\zeta^0 = [\gamma_0] \text{ на } \Gamma_0 \quad (5.2)$$

Используя закон Гука (1.2) для тензоров напряжений и деформаций в криволинейных координатах, находим связь между столбцами (5.1) на Γ_0 со стороны фазы $\Omega_0^\pm$

$$\eta^\pm = Q^\pm\zeta^\pm \quad (5.3)$$

Матрицы-функции $Q^\pm$, гладкие на контуре Γ_0, являются симметрическими и обратимыми, но не знакоопределенными из-за перемены позиций σ_{ss} и ε_{ss} в формулах (5.1) (ср. со сказанным в разд. 7).

Далее понадобятся операторы Стеклова – Пуанкаре $S^\pm$ для упругих тел $\Omega^\pm$. Заданным на Γ_0 столбцам смещений $\tilde{v}^\pm = (v_n^\pm, 2^{-1/2}v_s^\pm)^\top$ они ставят в соответствие столбцы нормальных напряжений $\tilde{\zeta}^\pm = (\sigma_{nn}^\pm, 2^{1/2}\sigma_{ns}^\pm)^\top$, снесенных на Γ_0 и найденных по решениям w^+ и w^- однородных уравнений равновесия в $\Omega^\pm$ с такими наборами краевых условий:

$$w_n^+ = \upsilon_n^+, \quad w_s^+ = \upsilon_s^+ \quad \text{на} \quad \Gamma_0$$

$$w_n^- = \upsilon_n^-, \quad w_s^+ = \upsilon_s^+ \text{ на } \Gamma_0, \quad w^- = 0 \text{ на } \Upsilon, \quad n_j\sigma_{kj}^-(w^\pm) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{на } \Sigma$$

Известно (см., например, [13, 14]), что отображение

$$H^{l+1/2}(\Gamma_0)^2 \ni \tilde{\upsilon}^\pm \mapsto S^\pm\tilde{\upsilon}^\pm = \tilde{\zeta}^\pm \in H^{l-1/2}(\Gamma_0)^2 \tag{5.4}$$

оказывается изоморфизмом при любом $l \geq 0$ и является эллиптическим классическим псевдодифференциальным оператором первого порядка. Как неограниченные в $L_2(\Gamma_0)^2$ (ср. отображения (5.4) при $l = 1/2$) операторы $\pm S^\pm$ замкнутые, самосопряженные и положительные. Последние два свойства вытекают, например, из формул Грина

$$\int\limits_{\Gamma_0} \tilde{\zeta}^\pm(w^\pm)^\top \tilde{\upsilon}^\pm ds = \int\limits_{\Gamma_0} (\sigma_{nn}^\pm(w^\pm)\upsilon_n^\pm + \sigma_{ns}^\pm(w^\pm)\upsilon_s^\pm)ds = \pm\int\limits_{\Omega^\pm} \sigma^\pm(w^\pm) : \varepsilon^\pm(\upsilon^\pm)dx$$

Под $\varepsilon^\pm(\upsilon^\pm)$, $\sigma^\pm(w^\pm)$ и т.п. понимаются поля деформаций и напряжений, найденных по векторам смещений $\upsilon^\pm$, $w^\pm$ в $\Omega_0^\pm$.

В силу соотношений (3.2) и (3.3) условия сопряжения (3.1) для полей $u^{11\pm}$ и $\sigma^{11\pm}$ в новых обозначениях выглядят так:

$$[\tilde{u}^{11}] = -h[\tilde{\eta}^0], \quad [\tilde{\zeta}^{11}] = -\delta^* h[\eta_{ss}^0] \text{ на } \Gamma_0 \tag{5.5}$$

Здесь $\tilde{\eta} = (\varepsilon_{nn}, 2^{1/2}\varepsilon_{ns})^\top$, а δ и δ^* – формально сопряженные дифференциальные операторы, действующие согласно равенствам

$$\delta\tilde{u} = \kappa u_n + \partial_s u_s = \varepsilon_{ss}, \quad \delta^*\xi = (\kappa\xi, -2^{1/2}\partial_s\xi)^\top \tag{5.6}$$

Принимая во внимание формулы (5.5) и (5.4), последовательно получаем

$$\tilde{u}^{11+} + \frac{1}{2}h[\tilde{\eta}^0] = \tilde{u}^{11-} - \frac{1}{2}h[\tilde{\eta}^0] =: \tilde{w}, \quad \tilde{\zeta}^{11+} = S^\pm\left(\tilde{w} \mp \frac{1}{2}h[\tilde{\eta}^0]\right)$$

$$-\delta^* h[\tilde{\eta}_{ss}^0] = [\tilde{\zeta}^{11}] = (S^+ - S^-)\tilde{w} - \frac{1}{2}(S^+ + S^-)h[\tilde{\eta}^0]$$

Положим

$$S_\bullet = S^+ - S^-, \quad S_\# = \frac{1}{2}(S^+ + S^-)$$

Оба оператора симметрические и, к тому же, $S_\bullet$ положительный и обратимый (см. комментарии к формуле (5.4)). Поскольку

$$S_\bullet^{-1}S_\# \mp \frac{1}{2} = S_\bullet^{-1}S^\mp$$

при учете определений (5.6) находим, что

$$\tilde{u}^{11+} = S_\bullet^{-1}S^\mp h[\tilde{\eta}^0] - S_\bullet^{-1}\delta^* h[\eta_{ss}], \quad \tilde{\zeta}^{11\pm} = S^\pm S_\bullet^{-1}S^\mp h[\tilde{\eta}^0] - S^\pm S_\bullet^{-1}\delta^* h[\eta_{ss}]$$

$$\zeta_{ss}^{11\pm} = -\varepsilon_{ss}^{11\pm} = -\delta S_\bullet^{-1}S^\mp h[\tilde{\eta}^0] + \delta S_\bullet^{-1}\delta^* h[\eta_{ss}]$$

Последние два равенства запишем в матричной форме

$$\left\| \begin{matrix} \tilde\zeta^{11\pm} \\ \zeta_{ss}^{11\pm} \end{matrix} \right\| = N^{\pm} \left\| \begin{matrix} h[\tilde\eta^{0}] \\ h[\eta_{ss}] \end{matrix} \right\|, \quad N^{\pm} = \left\| \begin{matrix} S^{\pm}S_{\bullet}^{-1}S^{\mp} & -S^{\pm}S_{\bullet}^{-1}\delta^* \\ -\delta S_{\bullet}^{-1}S^{\mp} & \delta S_{\bullet}^{-1}\delta^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} S^{\pm} \\ -\delta \end{matrix} \right\| S_{\bullet}^{-1}(S^{\mp}, -\delta^*) \tag{5.7}$$

и заметим, что операторы $N^{\pm}$ взаимно сопряжены. В силу связи (5.3) имеем

$$[\eta^0] = (Q^+ - Q^-)\zeta^0, \quad [\eta^{11}] = (Q^+N^+ - Q^-N^-)(Q^+ - Q^-)\zeta^0 h \tag{5.8}$$

Подставив соотношения (5.8) в интегральное тождество (4.9), обнаруживаем, что

$$B = (\zeta^0)^{\top}(Q^+N^+ - Q^-N^-)(Q^+ - Q^-)\zeta^0 \tag{5.9}$$

Следовательно,

$$B + B^* = (\eta^{0+})^{\top}(N^+ + N^-)\eta^{0+} + (\eta^{0-})^{\top}(N^+ + N^-)\eta^{0-} - (\eta^{0-})^{\top}N^+\eta^{0-} - (\eta^{0-})^{\top}N^-\eta^{0+} \tag{5.10}$$

Обращаем внимание на то, что операторы (5.9) и (5.10) действуют на функцию h следующим образом : сначала выражения $\eta^{0\pm} = Q^{\pm}\zeta^0$ умножаются на h и лишь затем применяются операторы $N^{\pm}$.

Несмотря на симметричное строение, оператор $B + B^*$, вообще говоря, не является знакоопределенным. Дело в том, что после введения столбца $Y = (Y^{-+}, Y^{++}, Y^{--}, Y^{+-})^{\top}$ со скалярными компонентами

$$Y^{\alpha\beta} = (S_{\bullet}^{-1/2}S^{\alpha}, -S_{\bullet}^{-1/2}\delta^*)\eta^{0\beta}, \quad \alpha, \beta = +, - \tag{5.11}$$

в соответствии с равенствами (5.7) сумма (5.10) принимает вид

$$B + B^* = (Y)^{\top}TY \tag{5.12}$$

При этом $S_{\bullet}^{-1/2}$ – положительный корень из оператора $S_{\bullet}^{-1}$, T – числовая матрица размером 4×4 с такими собственными столбцами X^j и собственными числами Λ_j:

$$T = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad X^j = \left\| \begin{matrix} \Lambda_j(\Lambda_j^2 - 2) \\ 1 - \Lambda_j^2 \\ \Lambda_j \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad j = 1, \dots, 4$$

$$\Lambda_1 = -\Lambda_3 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \Lambda_2 = -\Lambda_4 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Наличие пар положительных Λ_1, Λ_2 и отрицательных Λ_3, Λ_4 собственных чисел означает, что оператор (5.12) становится положительным или отрицательным лишь при определенных соотношениях между компонентами (5.11). Вместе с тем формула (5.12) полезна для выяснения эллиптичности оператора $B + B^*$. В самом деле, обозначив $\mathbf{S}^{\pm}(s; \xi)$ и т.п. главные символы операторов $S^{\pm}$ и т.п. в точке $s \in \Gamma_0$, получаем, что

$$\mathbf{B}(s; \xi) + \mathbf{B}^*(s; \xi) = \sum_{j=1}^{2}(1 + \Lambda_j^2)(|\mathbf{C}_j(s; \xi)|^2 - |\mathbf{C}_{j+2}(s; \xi)|^2) \tag{5.13}$$

причем $\mathbf{C}_j(s; \xi)$ – коэффициенты разложения

$$\mathbf{Y}(s; \xi) = \sum_{j=1}^{4} X^j\mathbf{C}_j(s; \xi), \tag{5.14}$$

а главный символ (5.14) оператора (5.11) равен (i – мнимая единица)

$$(\mathbf{S}_\bullet(s;\xi)^{-1/2}\mathbf{S}^{\alpha}(s;\xi), \mathbf{S}_\bullet(s;\xi)^{-1/2}(0, 2^{1/2}i\xi)^{\top})\eta^{0\pm}(s)$$

Таким образом, оператор первого порядка (5.9) эллиптический на Γ_0 в том и только в том случае, если при всех $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $s \in \Gamma_0$ выражение (5.13) не обращается в нуль.

К сожалению, автору не удалось привлечь термодинамическое условие (5.2) или (3.8) для исследования свойств операторов B или $B + B^*$. Единственный полезный, но тривиальный вывод состоит в том, что столбцы ζ^0 и Y в формулах (5.2) и (5.12) не могут быть нулевыми.

6. Об устойчивости квазистатического процесса. При решении уравнения (4.10) может возникнуть несколько различных ситуаций.

1°. Ростовое уравнение имеет единственное гладкое решение, доставляющее глобальный минимум функционалу $\mathcal{U}^{(2)}(h)$.

2°. Имеется семейство гладких решений, каждое из которых доставляет локальный минимум функционалу $\mathcal{U}^{(2)}(h)$.

3°. Гладкие решения существуют, но в соответствующих стационарных точках функционал $\mathcal{U}^{(2)}(h)$ не достигает минимальных значений.

4°. Ростовое уравнение не имеет гладких решений.

Случай 1°, в котором происходит устойчивая квазистатическая эволюция межфазной границы Γ_t, возникает при эллиптическом операторе (4.10) и положительно определенной на пространстве $H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_0)$ квадратичной форме

$$\mathbf{q}(h, H) := -\frac{1}{4}\int_{\Gamma_0}\{H(s)B(h; s) + h(s)B(H; s) + 2(b(s) - [\gamma_0]\kappa(s))H(s)h(s)\}ds \qquad (6.1)$$

Интеграл понимается как двойственность между пространствами $H^{1/2}(\Gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0) = H^{1/2}(\Gamma_0)^*$.

Пусть теперь символ (5.13) отрицательный, но однородное ростовое уравнение имеет нетривиальные решения; в частности, форма (6.1) не является положительной. Согласно альтернативе Фредгольма, решение h уравнения (4.10) существует лишь в случае, если справедливы условия ортогональности

$$\int_{\Gamma_0} h^{(j)}(s)(f_1(s) + f_2(s) - [\gamma_1])ds = 0, \quad j = 1, \ldots, J \qquad (6.2)$$

где $h^{(1)}, \ldots, h^{(J)}$ – базис в линеале $\mathcal{L}$ решений однородного уравнения. Если требование (6.2) нарушено, то реализуется ситуация 4°, квазистатический процесс становится динамическим, а игнорирование инерционных членов неправомерно; при этом привлечение младших членов асимптотических разложений не исправляет положение дел, поскольку уточненное ростовое уравнение становится сингулярно возмущенным (содержит малый параметр t при старших производных), а норма решения $\hat{h}$ – бесконечно большой при $t \to +0$ (анзац (2.5) разрушается). Если же условия ортогональности (6.2) выполнены, то в рамках ситуации 2° следует говорить о возможных бифуркациях межфазной границы (решение h определено с точностью до слагаемого из линеала $\mathcal{L}$), однако исследование бифуркаций и выявление среди них устойчивых не ограничивается изучением формы (6.1) и требует дополнительных рассмотрений.

Оператор $B + B^*$ может быть эллиптическим, а форма (6.1) – отрицательно определенной. Иными словами, по-прежнему существует единственное решение уравнения (4.10), однако оно доставляет максимум функционалу $\mathcal{U}^{(2)}(h)$, т.е. имеет место случай 3°, в котором все положения межфазной границы Γ_t находятся в неустойчивом равновесии, а при переходе от Γ_0 к Γ_t, $t > 0$, квазистатический процесс может самопроизвольно сорваться в динамический.

Уравнение (4.10) может остаться однозначно разрешимым даже в случае, когда символ (5.13) обращается в нуль в нескольких точках контура Γ_0. Однако при этом решение потеряет гладкость (ср. с ситуацией 4°), а проведенный асимптотический анализ станет разве лишь формальным (ср. разд. 7(1)). Как обычно, разрушение асимптотических структур из-за невозможности установить малость остатков связано с попытками дать сугубо динамическому процессу квазистатическое описание.

Отвлечемся от рассмотрения квазистатической эволюции межфазной границы, примем ограничения (1.10) и получим по формуле (1.6) при $t = 0$ функционал $\mathcal{U}$. Как уже упоминалось в разд. 3, первая вариация этого функционала вследствие малого возмущения (2.1) контура Γ_0 имеет вид (3.7). Нетрудно проверить, что вторая вариация совпадает с интегралом

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} h(s)(B(h;\,s) + b(s)h(s) - [\gamma_0]\kappa(s)h(s))ds \tag{6.3}$$

Таким образом, для классической устойчивости положения Γ_0 межфазной границы требуется положительная определенность квадратичной формы (6.1).

7. Обсуждение. 1. *О требованиях к гладкости межфазной границы.* Метод переноса данных с регулярно возмущенной границы на базовую, широко применяемый в механике искривленных трещин (см. [15–17] и др.), нашел свое оправдание в книге [18]. Он требует бóльшую гладкость границы, чем аппарат материальных производных (см. [11, 2, 12] и др.), однако приводит к явным и достаточно простым формулам, поскольку использует не "почти тождественные" диффеоморфизмы, всегда определяемые со значительным произволом, но канонические объекты : операторы Стеклова – Пуанкаре, касательные градиенты, кривизны и пр.

Для обеспечения включения $h \in H^{l+1/2}(\Gamma_0)$ необходимо, чтобы $u^{0\pm} \in H^{l+3}(\Omega_0^{\pm})^2$ и $\sigma^{\pm 0} \in H^{l+2}(\Omega_0^{\pm})^{2\times 2}$. При этом контур Γ_0 должен быть класса C^{l+2}. Если $l \geq 2$, то при помощи общих результатов [18] можно установить, что $H^{l-1}(\Omega_t)^2$-норма остатка в представлении (2.6) оценивается величиной ct^4.

Подчеркнем, что при помощи уравнения равновесия (2.4) из окончательных формул удается исключить многие нормальные производные упругих полей, что бывает полезно для вычислительных схем, например в методе граничных интегральных уравнений. Это делалось в преобразованиях (3.3), однако в выражениях (4.2), (4.4) и далее вторые нормальные производные смещений u_n и u_s оставлены без обработки потому, что при произвольной анизотропии получаются весьма громоздкие выражения. Производные $\partial_n\sigma_{ss}^{0\pm}$ из окончательных выражений неустранимы.

2. *Поверхностная энтальпия.* Скалярные произведения столбцов (5.1) появлялись во многих формулах – см., например, (3.8), (4.6) (4.9) и (4.8). Определение (5.1) имеет физическую подоплеку. На межфазной границе среди компонент тензоров напряжений и деформаций стесненными оказываются напряжения σ_{nn}, $\sigma_{ns} = \sigma_{sn}$ и деформация ε_{ss} – их нельзя считать произвольными из-за условий сопряжения (1.5), поэтому вместо плотности W упругой энергии естественно взять функцию состояния Π, для которой

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{nn}} = \sigma_{nn}, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ns}} = \sigma_{ns}, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{sn}} = \sigma_{sn}, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma_{ss}} = -\varepsilon_{ss}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\eta} = \zeta \tag{7.1}$$

Компоненты столбца η являются свободными на межфазной границе. Найти нужную функцию при сохранении линейного закона Гука несложно:

$$\Pi = W - \sigma_{ss}\varepsilon_{ss} = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon - \sigma_{ss}\varepsilon_{ss} = \frac{1}{2}(Q\eta)^{\top}\eta \tag{7.2}$$

Поскольку переход от W к Π осуществлен по такому же правилу, как от энергии к энтальпии, можно несколько вольно назвать форму (7.2) *поверхностной энтальпией.*

При образовании столбцов ζ и η учтен знак минус, возникший в соотношениях (5.3) и обеспечивший симметричность матрицы Q в законе (5.3), и равенства $\sigma_{ns} = \sigma_{sn}$, $\varepsilon_{ns} = \varepsilon_{sn}$. Нетрудно убедиться, что левая часть термодинамического условия (5.2) оказывается скачком $[\Pi] = \Pi^+ - \Pi^-$.

3. *Поверхностная энергия*. Допустим, что положение межфазной границы Γ_t определяется в результате минимизации функционала $\mathcal{U}_t + \mathcal{H}_t$, причем слагаемое $\mathcal{U}_t$ уже было указано в соотношениях (1.6)–(1.8), а слагаемое $\mathcal{H}_t$ – поверхностная энергия, распределенная вдоль Γ_t с постоянной плотностью $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_t &= \beta \operatorname{mes}_1\Gamma_t = \beta\int_{\Gamma_0}(1 + |\partial_s h(t;s)|^2)^{1/2}(1 + h(t;s)\kappa(s))ds = \\ &= \beta\operatorname{mes}_1\Gamma_0 + \beta\int_{\Gamma_0}h\kappa ds + \frac{\beta}{2}\int_{\Gamma_0}|\partial_s h|^2 ds + \ldots\end{aligned} \tag{7.3}$$

Через $\operatorname{mes}_1\Gamma_t$ обозначена длина дуги Γ_t. Прибавление к интегралам (3.7) и (4.7) слагаемых из правой части равенства (7.3) приводит к следующим изменениям в математическом описании квазистатического развития межфазной границы: термодинамическое условие (3.8) принимает вид

$$\frac{1}{2}(\sigma^0_{nn}[\varepsilon^0_{nn}] + 2\sigma^0_{ns}[\varepsilon^0_{ns}] - [\sigma^0_{ss}]\varepsilon^0_{ss}) = [\gamma_0] + \beta\kappa \quad \text{на} \quad \Gamma_0$$

а ростовое уравнение (4.10) превращается в такое:

$$-\beta\partial_s^2\hat{h} - B(\hat{h}) - B^*(\hat{h}) + 2[\gamma_0]\kappa\hat{h} - 2b\hat{h} = f_1 + f_2 - 2[\gamma_1] \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \tag{7.4}$$

Был сокращен общий множитель $t/2$ и принято во внимание представление (2.5). Появление второй производной в интегро-дифференциальном уравнении (7.4) способствует устойчивости, обсуждавшейся в разд. 6. В частности, любое решение $h \in L_2(\Gamma_0)$ уравнения (7.4) оказывается гладким всюду на Γ_0, и поэтому ситуация 4°, требующая динамической постановки задачи, возможна лишь при наличии нетривиальных решений уравнения (7.4) и нарушении соответствующих условий ортогональности (6.2).

4. *О нелокальности условия устойчивости*. Представление (5.9) оператора B, фигурирующего в выражении (6.3) для второй вариации функционала (1.6) при $t = 0$, содержит операторы Стеклова – Пуанкаре (5.4), интегро-дифференциальные и нелокальные по своей природе. В частности, только главный символ (5.12) может быть вычислен при известных тензорах Гука $A^{\pm}$, межфазной границе Γ_0 и решения u^0 – компактные составляющие оператора $B + B^*$ зависят от глобальных характеристик: формы тела Ω и положения дуги Υ, по которой оно защемлено. Проделаем мысленный эксперимент : отрежем от тела Ω часть Ω', не пересекающуюся с подообластью Ω_0^+, а к вновь образованной границе приложим те же нормальные усилия $n_j\sigma_{kj}^{0\pm}$, которые возникали в теле $\Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$ под нагрузкой g^0. В оставшейся части $\Omega_0^+ \cup (\Omega_0^- \backslash \Omega')$ упругие поля не изменятся, т.е. термодинамическое условие (3.8) (или (5.2)) сохранится. В то же время изменение оператора B и второй вариации (6.3) вследствие возмущения внешней границы тела может коренным образом повлиять на устойчивость межфазной границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03–01–00835).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990.
2. *Фрейдин А.Б.* Приближение малых деформаций в теории фазовых превращений при деформировании упругих тел // Исследования по упругости и пластичности. СПб: Изд-во СПб. ун-та, 1999. Вып. 18. С. 266–290.
3. *Осмоловский В.Г.* Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2000.
4. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
5. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 2. С. 101–113.
6. *Колтон Л.Г., Назаров С.А.* Вариация формы ребра плоской локально неравновесной трещины нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1997. № 3. С. 125–133.
7. *Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л.* О центрально-симметричных двухфазных полях деформаций // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2002. С. 111–122.
8. *Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л.* О неединственности и устойчивости в задачах равновесия упругих двухфазных тел // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 2. С. 189–193.
9. *Кучер В.А., Осмоловский В.Г.* Вычисление второй вариации для функционала энергии двухфазной среды // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Научная книга, 21. Вып. 22. С. 41–73.
10. *Осмоловский В.Г.* Необходимые условия экстремума в вариационной задаче о фазовых переходах с неоднородными граничными условиями // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Научная книга, 2001. Вып. 22 С. 160–177.
11. *Sokolowski J., Zolesio J.-P.* Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis. Berlin: Springer, 1992. 250 p.
12. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization. Philadelphia: SIAM series on Advances in Design and Control, 2001. 482 p.
13. *Costabel M., Wendland W.* Strong ellipticity of boundary integral operators // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. 1986. V. 372. № 1. S. 34–63.
14. *Натрошвили Д.Г., Чкадуа О.О., Шаргородский Е.М.* Смешанные задачи для однородных анизотропных упругих сред // Тр. Ин-та прикл. математики Тбил. гос. ун-та, 1990. Т. 39. С. 133–181.
15. *Баничук Н.В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
16. *Cotterel B., Rice J.R.* Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fracture. 1980. V. 16, № 2. P. 155–169.
17. *Movchan A.B., Nazarov S.A., Polyakova O.R.* The quasistatic growth of a semi-infinite crack in a plane containing small defects // C. r. Acad. Sci. Paris. Sér. II. 19. T. 313. № 11. P. 1223–1228.
18. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. V. 1. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 432 S. (Английский перевод : *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains. V. 1. Basel: Birkhäuser, 2000. 435 p.)

Санкт-Петербург
e-mail: serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
26.VIII.2004