

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров

ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОДНОМЕРНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ОТ ЕЕ ДЛИНЫ

Исследована зависимость собственных частот и форм колебаний распределенной упругой системы с переменными по координате сечения характеристиками жесткости и плотности для произвольных граничных условий. Доказано, что наличие внешней упругой среды, описываемой моделью Винклера, может приводить к увеличению собственных частот низших мод колебаний при увеличении длины одномерной упругой системы. Установлены также тонкие свойства изменения собственных частот в зависимости от длины системы и номера моды колебаний. Проведено численно-аналитическое исследование примеров, иллюстрирующих характерное anomальное поведение низших собственных частот.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения собственных частот ω и форм $u(x)$ колебаний распределенной упругой системы, описываемых краевой задачей для дифференциального уравнения вида [1–6]

$$(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0, \quad 0 < x < l, \quad \lambda = \omega^2 \quad (1.1)$$

при стандартных условиях знакоопределенности и гладкости функций p, r, q [2–4]. Они имеют определенный физический смысл для распределенных упругих систем: p – жесткость, r – линейная плотность, q – коэффициент упругости внешней среды (модель Винклера). На левом $x = 0$ и правом $x = l$ концах интервала задаются краевые условия упругого закрепления системы

$$\begin{aligned} \alpha_0 p(0)u'(0) - \beta_0 u(0) &= 0, & \alpha_l p(l)u'(l) + \beta_l u(l) &= 0 \\ \alpha_{0,l}, \beta_{0,l} &\geq 0, & \alpha_{0,l} + \beta_{0,l} &> 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Коэффициенты $\alpha_{0,l}, \beta_{0,l}$ характеризуют относительное влияние распределенной и сосредоточенной упругости. В частности, при $\alpha_0 = \alpha_l = 0$ имеем граничные условия жесткого закрепления: $u(0) = u(l) = 0$; при $\beta_0 = \beta_l = 0$ концы системы свободные: $u'(0) = u'(l) = 0$. На одном или обоих концах интервала могут выполняться условия указанных видов; длина интервала считается ограниченной: $l < \infty$.

Задача определения и анализа собственных частот и форм (1.1), (1.2), т.е. задача Штурма–Лиувилля на собственные значения и функции и ее обобщения подвергались всестороннему исследованию в связи с приложениями к теории упругости, гидродинамике, акустике. Был разработан ряд аналитических и численных методов оценивания и приближенного решения задачи. Установлены фундаментальные свойства задачи: существование счетного дискретного множества собственных частот $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ и форм $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), осцилляционные свойства, асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ и др.

Однако влияние длины интервала, на котором происходит изменение аргумента x , т.е. величины параметра $l > 0$, в известных публикациях не изучено. В теоретических и

прикладных постановках задач обычно полагают $l = l_0 = \text{const}$ и посредством нормировки приводят к фиксированному значению $l_0 = 1$. Анализ решения на основе теорем сравнения Штурма [2–4] и численно-аналитического метода ускоренной сходимости [1, 5] свидетельствует о существенном влиянии параметра l на собственные частоты системы. Этим фундаментальным свойством целесообразно воспользоваться в приближенных процедурах вычислений собственных частот $\omega_n(l)$ и ортонормированных с весом $r(x)$ собственных форм $u_n^*(x, l) = u_n \|u_n\|_r^{-1}$, где квадрат нормы $\|u_n\|_r^2 = (u_n, u_n)_r$ – взвешенное скалярное произведение.

В первую очередь теоретический и прикладной интерес представляет локальное исследование зависимости $\lambda_n(l)$ в окрестности фиксированного значения $l = l_0$, т.е. в предположении $l = l_0 + \delta l$, где вариация длины $|\delta l| \ll l_0$. После нормировки аргумента x на l_0 можно рассматривать интервал $0 \leq x \leq 1 + a$, где $a = \delta l/l_0$, $|a| \ll 1$, см. разд. 3, 4. Затем с помощью численно-аналитической процедуры продолжения по параметру a и метода ускоренной сходимости могут быть изучены зависимости $\lambda_n(l)$ для вариаций $\delta l \sim l_0$, т.е. $a \sim 1$. Ради определенности величина l_0 выбирается как минимальное значение l и исследование проводится при $a > 0$. В общей ситуации такое допущение можно не делать.

Найдем выражения для "коэффициентов чувствительности", которые определяются первыми и вторыми производными $\lambda_n'(l_0)$, $\lambda_n''(l_0)$ по l для $l = l_0$. Они характеризуют локальную зависимость $\lambda_n(l)$ в окрестности значения $l = l_0$. Это соответствует в нормированном варианте выражениям: $\lambda_n'(1) = \lambda_n'$, $\lambda_n''(1) = \lambda_n''$, т.е. производными по параметру a при $a = 0$. Аналогично определяются выражения для последующих коэффициентов, определяемых производными более высокого порядка.

2. Определение локальной зависимости собственных частот колебаний от параметра длины системы. Искомые локальные характеристики собственных частот колебаний строятся с помощью известного решения самосопряженной краевой задачи на собственные значения и функции (1.1), (1.2) при $l = l_0$ ($l = 1$, т.е. $a = 0$, в случае нормированного на l_0 аргумента x). Естественно определить приближенные собственные частоты ω_n и значения λ_n в виде

$$\begin{aligned}\omega_n(l) &= \omega_n(l_0) + \omega_n'(l_0)\delta l + \frac{1}{2}\omega_n''(l_0)\delta l^2 + O(\delta l^3) \\ \lambda_n(l) &= \lambda_n(l_0) + \lambda_n'(l_0)\delta l + \frac{1}{2}\lambda_n''(l_0)\delta l^2 + O(\delta l^3)\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n}, \quad \omega_n' = \frac{1}{2} \frac{\lambda_n'}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \omega_n'' = \frac{\lambda_n''}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{4} \frac{\lambda_n'^2}{\lambda_n^{3/2}}$$

при $|\delta l|$ достаточно малом. Аналогичные (2.1) представления могут быть выписаны для собственных форм колебаний u_n .

$$\begin{aligned}u_n(x, l) &= u_n(x, l_0) + v_n(x)\delta l + \frac{1}{2}w_n(x)\delta l^2 + O(\delta l^3) \\ v_n &= \frac{\partial u_n(x, l_0)}{\partial l}, \quad w_n = \frac{\partial^2 u_n(x, l_0)}{\partial l^2}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Итак, считается известным решение $\lambda_n, u_n(x, l)$ задачи (1.1), (1.2) при частном значении $l = l_0$. Производные λ_n' , λ_n'' и функции чувствительности v_n , w_n определяются по

средством процедуры дифференцирования по l . В частности, для нахождения $\lambda'_n(l_0)$, $v_n(x)$ используются соотношения

$$\begin{aligned} (pv') + (\lambda r - q)v &= -\lambda'ru, \quad \alpha_0pv' - \beta_0v = 0, \quad x = 0 \\ \alpha_l((\lambda r - q)u + pv') + \beta_l(u' + v) &= 0, \quad x = l_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аргументы и индексы в соотношениях (2.3) не выписываются (частично) для сокращения записи.

Умножим уравнения для u (1.1) на v , а уравнение для v (2.3) на u и вычтем из первого результата второй. Интегрируя разность по x на отрезке $0 \leq x \leq l_0$ с учетом граничных условий (1.2), (2.3), получим искомое выражение для λ'_n

$$\lambda'_n(l_0) = -[pu_n'^2 + (\lambda_n(l_0)r - q)u_n^2] \|u_n\|_r^{-2}, \quad x = l_0 \quad (2.4)$$

Эти представления не зависят от вида функций $v_n(x)$. Из выражений (2.4) можно определить частные выражения в случае краевых условий, соответствующих жесткому закреплению ($\alpha_l = 0$) и свободному ($\beta_l = 0$) правому концу $x = l_0$; согласно условиям (1.2) получим соответственно

$$\lambda'_n(l_0) = -p(l_0)u_n'^2(l_0, l_0) \|u_n\|_r^{-2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad u(l_0, l_0) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_l = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_n(l_0) &= -[\lambda_n(l_0)r(l_0) - q(l_0)]u_n'^2(l_0, l_0) \|u_n\|_r^{-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ u'(l_0, l_0) &= 0 \quad \text{при} \quad \beta_l = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величины $\omega'_n(l_0)$ вычисляются по формулам (2.1).

Для краевого условия жесткого закрепления согласно соотношениям (2.5) величины λ'_n отрицательны для всех $n = 1, 2, \dots$, т.е. все собственные значения λ_n и частоты ω_n с удлинением интервала посредством удаления правого конца убывают. Это свойство отвечает физическим представлениям и известно в литературе [1–4]. При $q(l_0) = 0$ или достаточно малом $q > 0$ значения ω'_n , λ'_n отрицательны для общих условий упругого закрепления (2.4) и свободного (2.6) правого конца системы, что также соответствует эффекту убывания всех значений ω_n , λ_n ($n = 0, 1, \dots$) при достаточно малом $|\delta l| > 0$.

Если воздействие внешней упругой среды, характеризуемой коэффициентом $q(x)$, локально в окрестности точки $x = l_0$ "достаточно велико", а интегрально на отрезке $0 \leq x \leq l_0$ "относительно мало", то характер знакоопределенности величин $\omega'_n(l_0)$, $\lambda'_n(l_0)$ (2.6) несколько усложняется. Справедливо следующее утверждение относительно локального поведения собственных значений $\lambda_n(l)$ в окрестности $l = l_0$.

Теорема. Для частот колебаний при $l = l_0$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \omega'_0 > 0, \quad \omega'_1 > 0, \quad \dots, \quad \omega'_{k-1} > 0, \quad \omega'_k \geq 0 \\ \lambda'_0 > 0, \quad \lambda'_1 > 0, \quad \dots, \quad \lambda'_{k-1} > 0, \quad \lambda'_k \geq 0 \\ \omega'_n < 0, \quad \lambda'_n < 0, \quad n \geq k + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Это отвечает локальному возрастанию с ростом $l \leq l_0$ собственных частот и значений низших мод $n = 0, 1, \dots, k - 1$ и неубыванию (в линейном приближении) k -й моды; последующие собственные частоты и значения убывают с ростом l .

Конструктивные достаточные условия могут быть установлены с помощью принципа Релея и метода Релея–Ритца [1–3], которые позволяют найти эффективные оценки $\omega_n^*(l_0)$ и $\lambda_n^*(l_0)$ сверху искомым частот $\omega_n(l_0)$ и значений $\lambda_n(l_0)$. В частности, для случая (2.6) при $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_0^*(l_0) &= \sqrt{\lambda_0^*(l_0)} \\ \lambda_0^*(l_0) &= \int_0^{l_0} [p(x)\psi_0^2(x) + q(x)\psi_0^2(x)] dx \left[\int_0^{l_0} r(x)\psi_0^2(x) dx \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\psi_0(x)$ – пробная функция, $\psi_0'(l_0) = 0$. Для вычисления следующих λ_n^* требуется построение системы пробных функций $\{\psi_n(x)\}$. Таким образом, если неравенства (2.7) имеют место при подстановке в выражения (2.6) значений λ_n^* , то они заведомо справедливы для точных величин $\lambda_n \leq \lambda_n^*$, $n \leq k$. Множество функций $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$, удовлетворяющих условиям (2.7), пусто, см. разд. 3, 4.

Установленное в теореме более тонкое свойство собственных частот $\omega_n(l)$ и значений $\lambda_n(l)$ ранее не отмечалось. Более того, имеются сомнительные утверждения (см. [4], с. 512 оригинала, с. 420 русского перевода), противоречащие утверждениям теоремы и расчетам конкретных примеров (см. далее разд. 3, 4): так, утверждается, что расширение интервала влечет убывание всех собственных значений для задачи Штурма – Лиувилля с крайними условиями второго рода.

Отметим, что грубое свойство (без учета функции $q(x)$) убывания по l собственных частот $\omega_n(l) \sim l_n^{-1}$, значений $\lambda_n(l) \sim l^{-2}$ при $n \gg 1$ с очевидностью следует из асимптотических оценок и подробно изучено в классических [2, 3] и последующих [1, 6] работах.

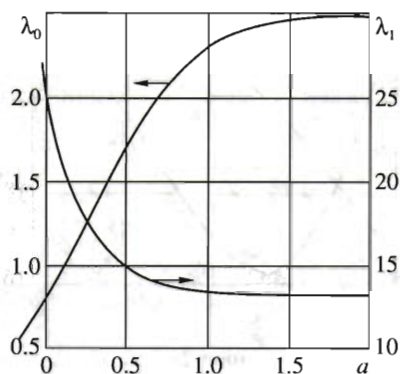
В критическом случае $\lambda_n'(l_0) = 0$ эффект возрастания или убывания значений $\lambda_n(l)$ в окрестности $l = l_0$ определяется величиной и знаком второй производной $\lambda_n''(l_0)$ согласно формуле (2.1). Выражения для λ_n'' получаются с помощью соотношений (2.3) и аналогичных им для неизвестной w

$$\begin{aligned} (pw)' + (\lambda r - q)w &= -\lambda''ru - 2\lambda'r'v; \quad \alpha_0pw' - \beta_0w = 0, \quad x = 0 \\ \alpha_l((\lambda r - q)u)' - 2p'v' + 2pv'' + pw'' + \beta_l(u'' + 2v' + w) &= 0, \quad x = l_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

(аргументы и индексы здесь не указаны ради сокращения записи). Сходная, как и при вычислении λ_n (см. выше), процедура умножения уравнения (2.1) для u_n на w_n и уравнения (2.9) для w_n на u_n , вычитание и интегрирование разности приводят к весьма громоздким формулам

$$\begin{aligned} \lambda_n''(l_0) &= -2\lambda_n'(l_0)(v_n, u_n)_r \|u_n\|_r^{-2} + [(\lambda_n r' - q' + 2\lambda_n' r)u_n^2 - \\ &- p'u_n^2 + 2(\lambda_n r - q)u_n v_n + pu_n'v_n']_{x=l_0} \|u_n\|_r^{-2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Правая часть равенства (2.10) не зависит от w_n . В формулах (2.10) предполагается дифференцируемость функций p , r , q в точке $x = l_0$. При $\lambda_n' = 0$ соответствующее выражение для λ_n'' существенно упрощается. Реальные расчеты искомым величин λ_n , λ_n' , λ_n'' могут быть выполнены численно-аналитическими методами. Согласно равенству (2.10)



Фиг. 1

требуется определить функции $v_n(x)$, $v'_n(x)$ для всех $0 \leq x \leq l_0$ на основе решения неоднородных краевых задач (2.3). В силу однородности выражений (1.1), (1.2), (2.3), (2.9) по u , v можно ограничиться для нахождения v_n , v'_n решением задачи Коши с условиями

$$v_n(0) = \frac{\alpha_0 p(0)}{\alpha_0 p(0) + \beta_0}, \quad v'_n(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0 p(0) + \beta_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В практических расчетах предпочтительнее использование процедуры продолжения по параметру l на основе метода ускоренной сходимости [1, 5]. Изложенные результаты свидетельствуют о наличии неизвестных до сих пор качественных особенностей поведения собственных частот колебаний распределенных упругих систем.

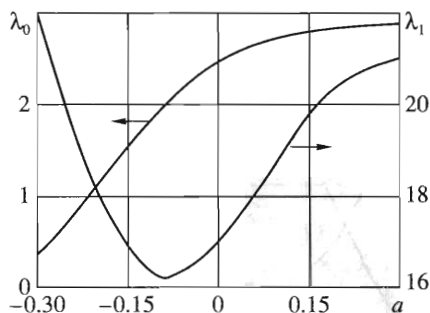
3. Тестовые примеры. Приведем расчеты модельных примеров, иллюстрирующих эффект возрастания низших собственных значений и частот при увеличении параметра l длины системы. Для удобства полагаем $l = 1 + a$ и $\lambda = \lambda(a)$, $u = u(x, a)$; коэффициенты уравнения (1.1) и краевые условия (1.2) берутся в виде

$$p(x) \equiv 1, \quad r(x) = (2 + x)^{-1}, \quad q = x^2, \quad u'(0) = u'(1 + a) = 0 \quad (3.1)$$

Минимальное (нулевое) собственное значение $\lambda_0(0)$ для $a = 0$, т.е. при $l = l_0 = 1$, равно $\lambda_0(0) = 0.796$; следующее собственное значение $\lambda_1(0) = 25.505$. Они находятся с помощью метода ускоренной сходимости [1, 5]. Вычислим для λ'_0 согласно соотношению (2.6) коэффициент в квадратных скобках; он равен $\lambda_0 r(1) - q(1) = -0.73474 < 0$. Его отрицательность свидетельствует о возрастании (или убывании) значения $\lambda_0(a)$, т.е. $\lambda_0(a) \geq \lambda_0(0)$, при увеличении (или уменьшении) параметра $a \geq 0$, см. фиг. 1. Собственные значения λ_n , $n \geq 1$, убывают при росте значения a и возрастают при его уменьшении. В частности, для λ_1 имеем $\lambda_1 r(1) - q(1) = 7.501 > 0$, см. фиг. 1. В случае $q = 9x^2$ имеем $\lambda_0(0) = 5.625$; соответствующая кривая $\lambda_0(a)$ аналогична кривой $\lambda_0(a)$ на фиг. 1, однако теперь $\lambda''_0(1) < 0$, т.е. кривая выпукла вверх, а не вниз, как на фиг. 1.

Рассмотрим другой пример, позволяющий установить указанное в теореме свойство возрастания величин последующих низших собственных значений λ_n , $n \geq 1$. Возьмем класс функций $q(x)$, определяющих коэффициент упругости внешней упругой среды, которые более резко, чем в (3.1), возрастают при $x \approx 1$. Пусть коэффициенты p , r , q уравнения (1.1) имеют вид

$$p(x) = r(x) \equiv 1, \quad q(x) = (q_0 + x)^m, \quad q_0 > 0, \quad m \geq 1 \quad (3.2)$$



Фиг. 2

Выбором параметров q_0 , m можно добиться резкого возрастания коэффициента упругости $q(x)$ вблизи правого конца $x = 1$ при умеренном росте $\lambda_n(a)$. При $q_0 = 0.5$, $m = 8$ получим $\lambda_0(a) = 2.4346$, $\lambda_1(0) = 16.897$; значения коэффициента в квадратных скобках (2.6) отрицательны, так как $q(1) = 25.6 > \lambda_{0,1}(0)$. Соответствующие кривые $\lambda_0(a)$, $\lambda_1(a)$ при $-0.3 \leq a \leq 0.3$ представлены на фиг. 2. Они, как и кривая $\lambda_0(a)$ на фиг. 1, иллюстрируют установленное в теореме свойство возрастания собственных частот $\omega_{0,1}(a)$ и значений $\lambda_{0,1}(l)$ для низших мод $n = 0, 1$ при увеличении параметра a в окрестности $a = 0$.

Интересно, однако, отметить немонотонность функции $\lambda_1(a)$ при уменьшении a ($a < 0$). В окрестности значения $l \approx 0.9$ ($a \approx -0.1$) наблюдается явно выраженный минимум.

При $a \rightarrow -1$, что отвечает $l \rightarrow 0$, имеем асимптотику $\lambda_1 \sim (\pi/l)^2 \rightarrow \infty$, которая соответствует физическим представлениям. Собственное значение $\lambda_0(a)$ монотонно уменьшается при $a \rightarrow -1$, т.е. $l \rightarrow 0$, и стремится к величине $\lambda_0(-1) = q_0^m = 1/256$.

С помощью указанного подхода могут быть изучены случаи других значений параметров q_0 , m , а также более сложных выражений для коэффициентов p , r , q . Существо эффекта наиболее убедительно можно проиллюстрировать на примерах систем с кусочно-постоянными характеристиками. Они допускают полное интегрирование и сведение к конечным трансцендентным уравнениям для определения и анализа собственных частот. Такие системы могут представлять определенный интерес при решении и анализе прикладных задач.

4. Системы с кусочно-постоянными характеристиками. Задача (1.1), (1.2) для упругой системы с кусочно-гладкими коэффициентами $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ требует разработки специальных алгоритмов расчета. Он может быть реализован на основе вариационного подхода и метода Релея–Ритца. В приложениях часто упругие системы могут быть описаны уравнением вида (1.1) с кусочно-постоянными характеристиками. Это позволяет проинтегрировать уравнения на участках постоянства коэффициентов и привести решение задачи к алгебраическому трансцендентному уравнению, содержащему степенные, тригонометрические и экспоненциальные функции для определения собственных значений и частот системы. Вместо разрывной функции u' удобнее использовать непрерывную физическую переменную $\theta = pu'$, которая в точках разрыва коэффициента p имеет излом. Переменная u имеет излом в точках разрыва коэффициента жесткости p .

1°. Рассмотрим относительно простую ситуацию, когда упругая система (струна, упругий вал или брус) имеет постоянные характеристики p , $r = \text{const} > 0$, а внешняя упругая среда содержит два участка постоянства коэффициента жесткости $q(x)$. Посредством нормировки получается задача вида

$$u'' + [\lambda - q(x)]u = 0; \quad q \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad q \equiv q_0, \quad 1 < x \leq l \tag{4.1}$$

$$\alpha_{0,l}u' \mp \beta_{0,l}u = 0, \quad x = 0, l = 1 + a$$

Общее решение уравнения (4.1) при $\lambda \geq q_0$ представимо в виде ($a_{1,2}, b_{1,2} = \text{const}$)

$$u = a_1 \sin vx + b_1 \cos vx, \quad v(a) \equiv \sqrt{\lambda(a)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.2}$$

$$u = a_2 \sin \omega(l-x) + b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad 1 < x \leq l \tag{4.3}$$

Значения $u(x), u'(x)$ должны совпадать при $x = 1 \pm 0$.

При $q_0 \geq \lambda$ для $0 \leq x \leq 1$ остается справедливым выражение (4.2). Для $1 < x \leq l$ тригонометрические функции в (4.3) следует заменить гиперболическими, что эквивалентно заменам $\omega \rightarrow i\omega, ia_2 \rightarrow a_2$.

Характеристическое уравнение для определения собственных значений λ получается из условия равенства нулю определителя четвертого порядка.

В случае $\lambda \geq q_0$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & (-\alpha_0 \alpha_l v^2 + \beta_0 \beta_l) \omega \sin v \cos \omega a - (\alpha_0 \beta_l v^2 - \beta_0 \alpha_l \omega^2) \sin v \sin \omega a + \\ & + (\alpha_0 \beta_l + \beta_0 \alpha_l) v \omega \cos v \cos \omega a + (-\alpha_0 \alpha_l \omega^2 + \beta_0 \beta_l) v \cos v \sin \omega a = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

($\Delta(\lambda)$ – нечетная функция относительно переменных v и ω). В случае $q_0 \geq \lambda$ имеем представление вида (4.4), в котором следует совершить замены

$$\Delta \rightarrow i\Delta, \quad \omega \rightarrow i\omega, \quad \sin \omega a \rightarrow i \operatorname{sh} \omega a, \quad \cos \omega a \rightarrow \operatorname{ch} \omega a$$

с соответствующим выражением для ω ($\omega = \sqrt{q_0 - \lambda}$). При $a = 0$ уравнение (4.4) имеет стандартную тригонометрическую форму (после сокращения на $\omega \neq 0$)

$$(\alpha_l \beta_0 + \alpha_0 \beta_l) v \cos v - (\alpha_0 \alpha_l v^2 - \beta_0 \beta_l) \sin v = 0, \quad v_n(0) = \sqrt{\lambda_n(0)} \tag{4.5}$$

Корни $v_n(0)$ уравнения (4.5) могут быть найдены численно для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и заданных $\alpha_{0,l}, \beta_{0,l}$. Соответствующие величины $v_n(a)$ при $a \neq 0$ вычисляются с помощью весьма громоздкой процедуры продолжения по параметру. Поэтому представляет интерес на начальном этапе провести исследование предельных ситуаций, когда имеют место краевые условия, отвечающие закрепленным или свободным концам.

2°. Пусть оба конца свободные, т.е. в задаче (4.1) имеем $\beta_{0,l} = 0, \alpha_{0,l} = 1$. Согласно соотношениям (4.2), (4.3) получим при $q_0 \geq \lambda$ соответственно представления для собственных функций и характеристических уравнений

$$u = b_1 \cos vx, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u = b_2 \operatorname{ch} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}, \quad v \sin v \operatorname{ch} \omega a - \omega \cos v \operatorname{sh} \omega a = 0 \tag{4.6}$$

$$u = b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad v \sin v \cos \omega a + \omega \cos v \sin \omega a = 0$$

$$1 < x \leq 1 + a, \quad v_n(0) = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из соотношений (4.6) следует, что низшие собственные значения частоты $\omega_n(a) = \sqrt{\lambda_n(a)}$, такие, что $\lambda_n(0) < q_0$, возрастают при $a \rightarrow \infty$ и стремятся к корням соответствующего уравнения $v \sin v = \omega \cos v$. Аналогично стандартным методом анализа устанавливается, что более высокие собственные частоты $\omega_n(a) = \sqrt{\lambda_n(a)}$, такие, что $\lambda_n(0) > q_0$,

убывают. В предельном случае, если для некоторого $n = n^*$ величина $\lambda_{n^*}(1) = q_0 = (n^*\pi)^2$, то $\lambda_{n^*}(l) \equiv (n^*\pi)^2$ независимо от величины $a \geq 0$, т.е. $\omega_{n^*}(a) \equiv n^*\pi$. При $n < n^*$ значения $\lambda_n(a)$ с увеличением параметра длины a возрастают, для $n > n^*$ значения $\lambda_n(a)$ убывают; аналогично поведение собственных частот $\omega_n(a)$.

Рассмотрим кратко случай, когда левый конец ($x = 0$) закреплен $-u(0) = 0$, а правый ($x = l$) свободен $-u'(l) = 0$. Соотношения типа (4.6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin vx, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u &= b_2 \operatorname{ch} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}, \quad v \cos v \operatorname{ch} \omega a + \omega \sin v \operatorname{sh} \omega a = 0 \\ u &= b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad v \cos v \cos \omega a - \omega \sin v \sin \omega a = 0 \\ 1 < x \leq l, \quad v_n(0) &= (n - 1/2)\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Как и выше, низшие собственные значения $\lambda_n(a)$ такие, что $\lambda_n(0) < q_0$, возрастают, а высшие $\lambda_n(0) > q_0$ — убывают; при $q_0 = ((n^* - 1/2)\pi)^2$ значение $\lambda_{n^*}(a) \equiv ((n^* - 1/2)\pi)^2$, т.е. $\omega_{n^*}(a) \equiv (n^* - 1/2)\pi$.

3°. Исследуем случай закрепленного правого конца: $u(l) = 0$. Пусть левый конец также закреплен $-u(0) = 0$; тогда аналогично соотношениям (4.6), (4.7) имеют место представления для собственных функций и характеристических уравнений

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin vx, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u &= a_2 \operatorname{sh} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}, \quad \omega \sin v \operatorname{ch} \omega a + v \cos v \operatorname{sh} \omega a = 0 \\ u &= a_2 \sin \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad \omega \sin v \cos \omega a + v \cos v \sin \omega a = 0 \\ 1 < x \leq 1 + a, \quad v_n(0) &= n\pi, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Согласно представлениям (4.8) все собственные значения $\lambda_n(a)$ убывают с ростом параметра a независимо от величин $\lambda_n(0) \geq q_0$. Если же $q_0 = (n^*\pi)^2$, то $\lambda_{n^*}(a) \equiv q_0$ при $a \geq 0$; аналогично поведение $\omega_n(a)$ и $\omega_{n^*}(a)$, но $u_{n^*} \equiv 0$.

Пусть левый конец свободный: $u'(0) = 0$; тогда получаются представления для собственных функций и характеристических уравнений

$$\begin{aligned} u &= b_1 \cos vx, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u &= a_2 \operatorname{sh} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}, \quad \omega \cos v \operatorname{ch} \omega a - v \sin v \operatorname{sh} \omega a = 0 \\ u &= a_2 \sin \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad \omega \cos v \cos \omega a - v \sin v \sin \omega a = 0 \\ 1 < x \leq l, \quad v_n(0) &= (n - 1/2)\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Согласно соотношению (4.9) собственные частоты $\omega_n(a) = \sqrt{\lambda_n(a)}$ убывают при увеличении параметра $a \geq 0$, как и в случае закрепленных обоих концов (4.8). Справедливы приведенные выше качественные выводы для случая $q_0 = (n^*\pi)^2$. Таким образом, результаты аналитического исследования задачи (4.1) убедительно иллюстрируют выводы теоремы (см. разд. 2). Они характеризуют аномальное поведение собственных частот при увеличении длины упругих систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00043, 05-01-00563) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ 1627.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
2. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. N.Y.: Wiley, 1989. = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
4. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. N. Y.: Dover, 2000 = Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
5. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
6. Акуленко Л.Д. Высокочастотные собственные колебания механических систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 817–832.

Москва
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
14.VI.2005