УДК 539.3

© 2006 г. Н. Г. Рябенков, Р. Ф. Файзуллина

О ЕДИНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛИТ И ПЛАСТИН

Даются четыре подхода к аналитическому решению трехмерной задачи теории упругости для плит и пластин. Все предлагаемые схемы имеют общую основу. Доказывается идентичность асимптотического метода с методом гипотез и последовательных приближений.

Среди многочисленных вариантов построения моделей деформирования плит, пластин и связующих слоев можно выделить четыре аналитических метода: асимптотический метод, метод степенных рядов, метод гипотез и метод последовательных приближений. При решении уравнений теории упругости эти методы обычно реализуются неидентичными алгоритмами, и поэтому построенные модели приводят к результатам, иногда существенно различающимся.

Ниже предлагается алгоритм асимптотического интегрирования, который можно положить в основу построения метода гипотез и метода последовательных приближений. Решение задачи теории упругости представляется в виде суммы двух составляющих и определяется двумя независимыми рекуррентными процессами. В результате компоненты вектора перемещения и тензора напряжений разлагаются в степенные ряды, которые в любом приближении для всех искомых величин имеют одинаковый порядок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения теории упругости в декартовых координатах x, y, z. Систему разрешающих уравнений представим следующим образом:

$$\partial_x\sigma_x + \partial_y\tau_{xy} + \partial_z\tau_{xz} = 0 \ (x, y, z) \tag{1.1}$$

$$\partial_x u = \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z}\sigma_z \ (u, \upsilon, w; x, y, z) \tag{1.2}$$

$$G_{xy}[\partial_x\upsilon + \partial_y u] = \tau_{xy} \ (u, \upsilon, w; x, y, z) \tag{1.3}$$

Соотношения (1.1) представляют собой уравнения равновесия бесконечно малого элемента, (1.2) и (1.3) – закон Гука, в котором посредством соотношений Коши деформации выражены через компоненты перемещения. Здесь σ_x, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (x, y, z) – компоненты тензора напряжений; u, υ, w – компоненты вектора перемещения произвольной точки; $G_{xy} = G_{yx}$ (x, y, z) – модули сдвига материала; $\partial x = \partial/\partial x$ (x, y, z). Модули упругости и коэффициенты Пуассона связаны соотношениями $\nu_{xy}E_x = \nu_{yx}E_y$ (x, y, z).

Пусть начало отсчета системы координат лежит в срединной плоскости плиты, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Полагая, что плита имеет постоянную толщину $2h$, далее при необходимости будем пользоваться безразмерной координатой $\varsigma = z/h$.

2. Алгоритм асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. Под асимптотическим методом решения задачи теории упругости понимаем разложение напряженно-деформированного состояния в ряды по малому параметру. В качестве этого параметра принимаем половину толщины плиты h.

Основная проблема асимптотического метода – выбор формы асимптотических последовательностей. При решении системы уравнений теории упругости эта проблема может быть решена разными способами [1–3]. Здесь предлагается следующий вариант. Полагаем, что напряженно-деформированное состояние (НДС) плиты складывается из двух составляющих, которые далее пометим верхними индексами 1 и 2. Решение уравнений (1.1)–(1.3) представим в виде

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} \ (u, \upsilon, w); \quad \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \ (x, y, z) \tag{2.1}$$

Величины $u^{(1)}$, $\upsilon^{(1)}$, …, $\tau_{yz}^{(1)}$ и $u^{(2)}$, $\upsilon^{(2)}$, …, $\tau_{yz}^{(2)}$ определим двумя независимыми рекуррентными процессами, которые начинаются с разложения параметров НДС плиты в асимптотические ряды. Для компонент вектора перемещения и тензора напряжений первой составляющей полагаем

$$\begin{gathered} u^{(1)} = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{u}_1 \ (u, \upsilon), \quad w^{(1)} = \sum_s h^{s-2} \overset{s}{w}_1 \\ \sigma_x^{(1)} = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{\sigma}_{x1} \ (x, y, z), \quad \tau_{xy}^{(1)} = \sum_s h^{s-3} \overset{s}{\tau}_{xy1}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \sum_s h^{s-2} \overset{s}{\tau}_{xz1} \ (x, y) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Величины $u^{(2)}$, $\upsilon^{(2)}$, …, $\tau_{yz}^{(2)}$, определяющие вторую составляющую напряженного состояния, представим в виде

$$\begin{gathered} u^{(2)} = \sum_s h^{s-2} \overset{s}{u}_2 \ (u, \upsilon), \quad w^{(2)} = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{w}_2 \\ \sigma_x^{(2)} = \sum_s h^{s-2} \overset{s}{\sigma}_{x2} \ (x, y, z), \quad \tau_{xy}^{(2)} = \sum_s h^{s-2} \overset{s}{\tau}_{xy2}, \quad \tau_{xz}^{(2)} = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{\tau}_{xz2} \ (x, y) \end{gathered} \tag{2.3}$$

В рядах (2.2), (2.3) и всюду далее $\sum\limits_s$ означает суммирование по индексу s, принимающему значения 1, 3, …, $2n-1$; n – номер асимптотического приближения.

Согласно выбранной форме асимптотических рядов суммарное решение (2.1) содержит нулевую и все положительные степени параметра h. При $h \to 0$ компоненты вектора перемещения и тензора напряжений будут иметь сингулярность $O(h^{-1})$. Последнее очевидно для всех искомых величин кроме касательного напряжения τ_{xy}, так как в выражении $\tau_{xy}^{(1)}$ присутствует слагаемое $h^{-2}\overset{1}{\tau}_{xy1}$. Далее из алгоритма будет следовать, что $\overset{1}{\tau}_{xy1} = 1$. Поэтому касательные напряжения τ_{xy} имеют такую же сингулярность, как и все другие неизвестные.

Учитывая, что процедура построения рекуррентных процессов для вычисления $\overset{s}{u}_1$, $\overset{s}{u}_2$, …, $\overset{s}{\tau}_{yz1}$, $\overset{s}{\tau}_{yz2}$ подробно изложена ранее [1, 2], здесь запишем только результат. Искомые величины в рядах (2.2) вычисляются по формулам

$$\overset{s}{u}_1 = \overset{s}{p}_x + \int_0^{\varsigma} (G_{xz}^{-1} \overset{s}{\tau}_{xz1} - \partial_x \overset{s}{w}_1) d\varsigma \ (x, y; u, \upsilon)$$

$$\overset{s}{w}_1 = \overset{s}{f}_z + \int_0^{\varsigma} \left(\frac{\overset{s-2}{\sigma}_{z1}}{E_z} - \frac{\nu_{zx}}{E_x} \overset{s-2}{\sigma}_{x1} - \frac{\nu_{zy}}{E_y} \overset{s-2}{\sigma}_{y1} \right) d\varsigma$$

$$\sigma_{x1}^{s} = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\partial_x u_1^s + \nu_{xy}\partial_y \upsilon_1^s + \frac{\nu_{xz}+\nu_{yz}\nu_{xy}}{E_z}\sigma_{z1}^s\right)(x, y;\, u, \upsilon)$$

$$\sigma_{z1}^{s} = p_z^s - \int_0^{\varsigma}(\partial_x\tau_{xz1}^s + \partial_y\tau_{yz1}^s)d\varsigma, \quad \tau_{xy1}^s = G_{xy}\gamma^{s-2} \tag{2.4}$$

$$\tau_{xz1}^{s} = f_x^s - \int_0^{\varsigma}(G_{xy}\partial_y\gamma^{s-2} + \partial_x\sigma_{x1}^{s-2})d\varsigma\ (x, y)$$

$$\gamma^{s-2} = \partial_x\upsilon_1^{s-2} + \partial_y u_1^{s-2}, \quad s = 1, 3, \ldots, 2n-1$$

Возникающие при интегрировании функции f_x^s, f_y^s, f_z^s и p_x^s, p_y^s, p_z^s аргументов x, y произвольны. Величины с отрицательными верхними индексами в формулах (2.4) следует положить равными нулю.

Искомые величины u_2^s, υ_2^s, …, τ_{yz2}^s второй составляющей находим в виде

$$u_2^{s} = g_x^s + \int_0^{\varsigma}(G_{xz}^{-1}\tau_{xz2}^{s-2} - \partial_x w_2^{s-2})d\varsigma\ (x, y;\, u, \upsilon)$$

$$w_2^{s} = q_z^s + \int_0^{\varsigma}\left(\frac{\sigma_{z2}^s}{E_z} - \frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_{x2}^s - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_{y2}^s\right)d\varsigma$$

$$\sigma_{x2}^{s} = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yz}}\left(\partial_x u_2^s + \nu_{xy}\partial_y \upsilon_2^s + \frac{\nu_{xz}+\nu_{yz}\nu_{xy}}{E_z}\sigma_{z2}^s\right)(x, y;\, u, \upsilon)$$

$$\sigma_{z2}^{s} = g_z^s - \int_0^{\varsigma}(\partial_x\tau_{xz2}^{s-2} + \partial_y\tau_{yz2}^{s-2})d\varsigma, \quad \tau_{xy2}^s = G_{xy}(\partial_y u_2^s + \partial_x\upsilon_2^s) \tag{2.5}$$

$$\tau_{xz2}^{s} = q_x^s - \int_0^{\varsigma}(\partial_x\sigma_{x2}^s + \partial_y\tau_{xy2}^s)d\varsigma\ (x, y)$$

$$s = 1, 3, \ldots, 2n-1$$

Возникающие при интегрировании функции g_x^s, g_y^s, g_z^s и q_x^s, q_y^s, q_z^s аргументов x, y произвольны.

При построении модели деформирования как в первом, так и во втором рекуррентных процессах возникающие при интегрировании функции следует определить, выполнив условия на границе плиты. Первое и последующие приближения вносят в суммарное решение (2.1) двенадцать произвольных функций f_x^s, …, q_z^s. Таким образом, в приближении с номером n для удовлетворения граничным условиям будем иметь $12n$ функций координат x, y.

3. Явная запись решения по асимптотическому алгоритму. Построенный алгоритм предполагает последовательное вычисление всех параметров НДС в первом, втором и последующих приближениях. Анализ формул (2.2)–(2.5) позволяет существенно упростить эту процедуру.

С целью сокращения записи формул все выкладки далее приводим только для изотропной плиты с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига $G = E/[2(1+\nu)]$. Нетрудно заметить, что в формулах (2.2) в каждом приближении все величины определяются с помощью τ^s_{xz1}, τ^s_{yz1} и w^s_1. Поэтому несложными преобразованиями представим их следующим образом (интегрирование по z всюду далее проводится в пределах от 0 до z):

$$\tau^s_{xz1} = f^s_x - zT^{s-2}_{x1} + \iint R_{x1}(\tau^{s-2}_{xz1}, \tau^{s-2}_{yz1}, w^{s-2}_1)dz^2 \ (x, y)$$

$$w^s_1 = f^s_z + zT^{s-2}_{z1} + \iint R_{z1}(\tau^{s-2}_{xz1}, \tau^{s-2}_{yz1}, w^{s-2}_1)dz^2 \ (x, y)$$

Здесь обозначено

$$T^{s-2}_{x1} = \frac{1}{h}\left(G\partial^2_y p^{s-2}_x + \frac{E}{1-\nu^2}\partial^2_x p^{s-2}_x + \frac{E}{2(1-\nu)}\partial^2_{xy} p^{s-2}_y + \frac{\nu}{1-\nu}\partial_x p^{s-2}_z\right)(x, y)$$

$$R_{x1}(\tau^{s-2}_{xz1}, \tau^{s-2}_{yz1}, w^{s-2}_1) = h^{-2}\left(\frac{\nu-2}{1-\nu}\partial^2_x\tau^{s-2}_{xz1} - \partial^2_y\tau^{s-2}_{xz1} + \frac{1}{\nu-1}\partial^2_{xy}\tau^{s-2}_{yz1} + \frac{E}{1-\nu^2}\partial_x\nabla^2 w^{s-2}_1\right)(x, y)$$

$$T^{s-2}_{z1} = \frac{1}{h}\left[\frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)}p^{s-2}_z + \frac{\nu}{\nu-1}(\partial_x p^{s-2}_x + \partial_y p^{s-2}_y)\right]$$

$$R_{z1}(\tau^{s-2}_{xz1}, \tau^{s-2}_{yz1}, w^{s-2}_1) = h^{-2}\left[\frac{1+\nu}{E(\nu-1)}(\partial_x\tau^{s-2}_{xz1} + \partial_y\tau^{s-2}_{yz1}) + \frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 w^{s-2}_1\right]$$

Полученные соотношения позволяют записать выражения касательных напряжений и прогиба в явном виде

$$\tau^{(1)}_{xz} = \sum_s h^{s-2}\sum_{k=0}^{s-1} A^{s,k}_x z^k \ (x, y), \quad w^{(1)} = \sum_s h^{s-2}\sum_{k=0}^{s-1} A^{s,k}_z z^k \tag{3.1}$$

Коэффициенты разложений $A^{s,k}_x$, $A^{s,k}_y$, $A^{s,k}_z$ выражаются через произвольные функции следующим образом:

$$A^{s,0}_x = f^s_x, \quad A^{s,1}_x = -T^{s-2}_{x1} \ (x, y), \quad A^{s,0}_z = f^s_z, \quad A^{s,1}_z = T^{s-2}_{z1}$$

$$A^{s,k}_x = \frac{1}{k(k-1)}R_{x1}(A^{s-2,k-2}_x, A^{s-2,k-2}_y, A^{s-2,k-2}_z) \ (x, y)$$

$$A^{s,k}_z = \frac{1}{k(k-1)}R_{z1}(A^{s-2,k-2}_x, A^{s-2,k-2}_y, A^{s-2,k-2}_z)$$

$$k = 2, 3, \ldots, s-1; \quad s = 1, 3, \ldots, 2n-1$$

Величины с отрицательным верхним индексом следует положить равными нулю.

В системе уравнений теории упругости алгоритмом (2.2), (2.4) приближенно выполняются первые два уравнения (1.1) и третье из уравнений (1.2). Остальные шесть уравнений выполняются точно. Поэтому при известных выражениях (3.1) для касательных напряжений и прогиба из этих шести уравнений можем определить остальные неизвестные величины. В результате получим

$$u^{(1)} = P_x(x, y) + \int (G^{-1}\tau_{xz}^{(1)} - \partial_x w^{(1)})dz \ (u, \upsilon; x, y)$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2}(\partial_x u^{(1)} + \nu\partial_y \upsilon^{(1)}) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z^{(1)} \ (u, \upsilon; x, y) \qquad (3.2)$$

$$\sigma_z^{(1)} = P_z(x, y) - \int (\partial_x \tau_{xz}^{(1)} + \partial_y \tau_{yz}^{(1)})dz, \quad \tau_{xy}^{(1)} = G(\partial_y u^{(1)} + \partial_x \upsilon^{(1)})$$

Здесь обозначено

$$P_x = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{p}_x \ (x, y, z) \qquad (3.3)$$

Таким образом, все параметры первой составляющей НДС вычисляются через касательные напряжения и прогиб плиты. Поэтому алгоритм вычисления этой составляющей условно можно назвать задачей сдвига и изгиба плиты.

Аналогичные преобразования можно провести для второй составляющей. В алгоритме (2.5) выражения $\overset{s}{u}_2$, $\overset{s}{\upsilon}_2$, $\overset{s}{\sigma}_{z2}$ представим в виде

$$\overset{s}{u}_2 = \overset{s}{g}_x + z\overset{s-2}{T}_{x2} - \iint R_{x2}(\overset{s-2}{u}_2, \overset{s-2}{\upsilon}_2, \overset{s-2}{\sigma}_{z2})dz^2 \ (u, \upsilon; x, y)$$

$$\overset{s}{\sigma}_{z2} = \overset{s}{g}_z - z\overset{s-2}{T}_{z2} + \iint R_{z2}(\overset{s-2}{u}_2, \overset{s-2}{\upsilon}_2, \overset{s-2}{\sigma}_{z2})dz^2$$

Здесь обозначено

$$\overset{s-2}{T}_{x2} = \frac{1}{h}(G^{-1}\overset{s-2}{q}_x - \partial_x \overset{s-2}{q}_z) \ (x, y), \quad \overset{s-2}{T}_{z2} = \frac{1}{h}(\partial_x \overset{s-2}{q}_x + \partial_y \overset{s-2}{q}_y)$$

$$R_{x2}(\overset{s-2}{u}_2, \overset{s-2}{\upsilon}_2, \overset{s-2}{\sigma}_{z2}) = h^{-2}\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\partial_x^2 \overset{s-2}{u}_2 + \partial_y^2 \overset{s-2}{u}_2 + \frac{1}{1-\nu}\partial_{xy}^2 \overset{s-2}{\upsilon}_2 + \frac{1+\nu}{E(1-\nu)}\partial_x \overset{s-2}{\sigma}_{z2}\right)$$

$$(u, \upsilon; x, y)$$

$$R_{z2}(\overset{s-2}{u}_2, \overset{s-2}{\upsilon}_2, \overset{s-2}{\sigma}_{z2}) = \frac{1}{h^2}\nabla^2\left[\frac{E}{1-\nu^2}(\partial_x \overset{s-2}{u}_2 + \partial_y \overset{s-2}{\upsilon}_2) + \frac{\nu}{1-\nu}\overset{s-2}{\sigma}_{z2}\right]$$

Эти формулы позволяют записать явное выражение тангенциальных перемещений и напряжений обжатия. Имеем

$$u^{(2)} = \sum_s h^{s-2} \sum_{k=0}^{s-1} B_x^{s,k} z^k \ (u, \upsilon; x, y), \quad \sigma_z^{(2)} = \sum_s h^{s-2} \sum_{k=0}^{s-1} B_z^{s,k} z^k \qquad (3.4)$$

Здесь обозначено

$$B_x^{s,0} = \overset{s}{g}_x, \quad B_x^{s,1} = \overset{s-2}{T}_{x2} \ (x, y), \quad B_z^{s,0} = \overset{s}{g}_z, \quad B_z^{s,1} = -\overset{s-2}{T}_{z2}$$

$$B_x^{s,k} = -\frac{1}{k(k-1)}R_{x2}(B_x^{s-2,k-2}, B_y^{s-2,k-2}, B_z^{s-2,k-2}) \ (x, y)$$

$$B_z^{s,k} = \frac{1}{k(k-1)}R_{z2}(B_x^{s-2,k-2}, B_y^{s-2,k-2}, B_z^{s-2,k-2})$$

$$k = 2, 3, \ldots, s-1; \quad s = 1, 3, \ldots, 2n-1$$

Величины с отрицательным верхним индексом следует положить равными нулю.

Алгоритмом (2.3), (2.5) приближенно выполняются второе и третье уравнения (1.3) и третье из уравнений (1.1). Остальные шесть уравнений теории упругости выполняются точно. Поэтому при известных выражениях (3.4) из этих шести уравнений можем определить остальные неизвестные величины. В результате получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(2)} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\partial_x u^{(2)} + \nu\partial_y \upsilon^{(2)}) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z^{(2)} \ (u, \upsilon; x, y) \\
\tau_{xy}^{(2)} &= G(\partial_y u^{(2)} + \partial_x \upsilon^{(2)}), \quad \tau_{xz}^{(2)} = Q_x(x, y) - \int(\partial_x \sigma_x^{(2)} + \partial_y \tau_{xy}^{(2)})dz \ (x, y) \\
w^{(2)} &= Q_z(x, y) + \frac{1}{E}\int[\sigma_z^{(2)} - \nu(\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)})]dz
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь обозначено

$$Q_x = \sum_s h^{s-1} \overset{s}{q}_x \ (x, y, z) \tag{3.6}$$

Во второй составляющей все параметры НДС вычисляются через тангенциальные перемещения и напряжение обжатия. Поэтому процесс определения этой составляющей условно можно назвать задачей растяжения – сжатия в трех направлениях.

4. Асимптотический алгоритм и метод степенных рядов. В методе степенных рядов решение системы уравнений (1.1)–(1.3) раскладывается в степенные ряды по координате z. Предшествующие выкладки показывают близость этого метода к методу асимптотического интегрирования. Однако при выполнении определенных условий эти методы становятся идентичными.

Запишем выражения (2.1) с использованием соотношений (3.1)–(3.6). В результате получим следующее представление параметров НДС:

$$u = \sum_{k=0}^{m} u_k(x, y)z^k, \quad \upsilon = \sum_{k=0}^{m} \upsilon_k(x, y)z^k, \ \ldots, \quad \tau_{yz} = \sum_{k=0}^{m} \tau_{yzk}(x, y)z^k \tag{4.1}$$

Коэффициенты разложений u_k, υ_k, …, τ_{yzk} в этих рядах будут выражены через функции $\overset{s}{f}_x, \overset{s}{f}_y, \ldots, \overset{s}{q}_z$.

Соотношения (4.1) показывают, что асимптотический алгоритм можно рассматривать как способ вычисления коэффициентов разложения в методе степенных рядов. Полученные ряды в общем случае будут содержать нулевую и все положительные степени координаты z. Максимальная степень m в разложениях (4.1) будет одинаковой для всех компонент перемещений и напряжений: в первом приближении $m = 1$, во втором – $m = 3$, для приближения с номером n максимальный показатель степени $m = 2n - 1$.

5. Асимптотический алгоритм и метод гипотез. В основе метода гипотез лежат некоторые предположения о характере НДС, которые с использованием уравнений (1.1)–(1.3) далее приводят к тем или иным моделям теории пластин и оболочек. Уравнения теории упругости позволяют реализовать этот метод в разных вариантах [4, 5].

Анализ преобразований системы уравнений (1.1)–(1.3) при асимптотическом интегрировании позволяет предложить следующий вариант метода гипотез. Решение уравнений теории упругости по-прежнему будем строить согласно формулам (2.1). Для определения первой составляющей в n-м приближении зададим выражения касательных напряжений и прогиба в виде

$$\tau_{xz}^{(1)} = \sum_{k=0}^{2n-2} F_x^k(x, y)z^k \ (x, y), \quad w^{(1)} = \sum_{k=0}^{2n-2} F_z^k(x, y)z^k \tag{5.1}$$

Остальные искомые величины определим по формулам (3.2).

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях координаты z в рядах (3.1) и (5.1). Для идентичности этих рядов необходимо, чтобы произвольные функции метода гипотез выражались через произвольные функции асимптотического метода согласно формулам

$$F_x^k = \begin{cases} \sum\limits_{s = k, k+2, \ldots}^{2n-2} h^{s-1} A_x^{s+1, k}, \quad k = 0, 2, \ldots, 2n-2 \ (x, y, z) \\ \sum\limits_{s = k, k+2, \ldots}^{2n-3} h^{s} A_x^{s+2, k}, \quad k = 1, 3, \ldots, 2n-3 \ (x, y, z) \end{cases} \tag{5.2}$$

При выполнении этих соотношений касательные напряжения $\tau_{xz}^{(1)}$, $\tau_{yz}^{(1)}$ и прогиб $w^{(1)}$, вычисленные по методу гипотез и из асимптотического разложения, будут равны тождественно. Для равенства остальных параметров первой составляющей НДС должны выполняться формулы (3.3).

Определяя вторую составляющую НДС плиты, метод гипотез реализуем следующим алгоритмом. Вначале зададим выражения тангенциальных перемещений и нормальных напряжений обжатия

$$u^{(2)} = \sum_{k=0}^{2n-2} G_x^k(x, y) z^k \ (u, \upsilon; x, y), \quad \sigma_z^{(2)} = \sum_{k=0}^{2n-2} G_z^k(x, y) z^k \tag{5.3}$$

Сравнивая ряды (3.4) и (5.3), заключаем, что тангенциальные перемещения и напряжения обжатия в рассматриваемых методах будут идентичны при выполнении условий, аналогичных условиям (5.2) при замене F, A на G, B.

Оставшиеся неизвестные определим из соотношений (3.5). Для их идентичности в обоих методах должны выполняться формулы (3.6).

Таким образом, в предложенном варианте метода гипотез для построения приближения с номером n, как и в асимптотическом алгоритме, имеем $12n$ произвольных функций F_x^k, G_x^k, P_x, Q_x, …, Q_z. В любом приближении формы степенных рядов полностью совпадают, и при выполнении отмеченных условий оба метода приводят к одинаковым моделям деформирования.

6. Асимптотический алгоритм и метод последовательных приближений. Выведенные алгоритмы можно реализовать в форме метода последовательных приближений. При построения рядов (3.1) для вычисления первой составляющей в нулевом приближении полагаем равными нулю нормальные напряжения $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\sigma_z^{(1)}$ и касательные напряжения $\tau_{xy}^{(1)}$. Тогда из первых двух уравнений (1.1) и третьего уравнения (1.2) в первом приближении находим

$$\tau_{xz}^{(1,1)} = \Phi_x^1(x, y), \quad \tau_{yz}^{(1,1)} = \Phi_y^1(x, y), \quad w^{(1,1)} = \Phi_z^1(x, y)$$

Остальные неизвестные вычисляем по формулам (3.2). Появляющиеся при интегрировании функции координат x, y обозначим Π_x^1, Π_y^1, Π_z^1. Вычисление второго приближения начинается с интегрирования первых двух уравнений (1.1) и третьего уравнения (1.2). Из них находим $\tau_{xz}^{(1,2)}$, $\tau_{yz}^{(1,2)}$, $w^{(1,2)}$. Далее используем формулы (3.2), в результате появляются новые функции Π_x^2, Π_y^2, Π_z^2, и т.д. Таким образом, переход от одного приближения к другому осуществляется посредством трех соотношений

$$\tau_{xz}^{(1,k)} = \Phi_x^k - \int(\partial_x\sigma_x^{(1,k-1)} + \partial_y\tau_{xy}^{(1,k-1)})dz \ (x, y)$$

$$w^{(1,k)} = \Phi_z^k + \frac{1}{E}\int[\sigma_z^{(1,k-1)} - \nu(\sigma_x^{(1,k-1)} + \sigma_y^{(1,k-1)})]dz$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

Вторую составляющую НДС будем определять, полагая, что в нулевом приближении в плите отсутствуют касательные напряжения $\tau_{xz}^{(2)}$, $\tau_{yz}^{(2)}$ и прогиб $w^{(2)}$. Тогда из последних двух уравнений (1.3) и последнего уравнения (1.1) в первом приближении находим выражения для тангенциальных перемещений и напряжений обжатия

$$u^{(2,1)} = \Gamma_x^1(x, y), \quad \upsilon^{(2,1)} = \Gamma_y^1(x, y), \quad \sigma_z^{(2,1)} = \Gamma_z^1(x, y)$$

Соотношения (3.5) позволяют вычислить остальные неизвестные. Появляющиеся при этом произвольные функции координат срединной плоскости обозначим K_x^1, K_y^1, K_z^1. Переход ко второму приближению осуществляем посредством последних двух уравнений (1.3) и последнего уравнения (1.1) Вычислив $u^{(2,2)}$, $\upsilon^{(2,2)}$, $\sigma_z^{(2,2)}$, используем соотношения (3.5) – появятся функции K_x^2, K_y^2, K_z^2, и т.д. Переход к следующему приближению осуществляем формулами

$$u^{(2,k)} = \Gamma_x^k + \int(G^{-1}\tau_{xz}^{(2,k-1)} - \partial_x w^{(2,k-1)})dz \ (u, \upsilon;\ x, y)$$

$$\sigma_z^{(2,k)} = \Gamma_z^k - \int(\partial_x\tau_{xz}^{(2,k-1)} + \partial_y\tau_{yz}^{(2,k-1)})dz$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

Суммируя результаты двух процессов, решение системы уравнений теории упругости получим в форме (4.1), где коэффициенты u_k, υ_k, …, τ_{yzk} в приближении с номером n будут выражены посредством $12n$ произвольных функций Φ_x^k, Π_x^k, Γ_x^k, K_x^k, Φ_y^k, …, K_z^k.

Сравнивая построенный алгоритм с алгоритмом асимптотического метода, находим взаимосвязь этих двух методов. Результаты будут идентичны, если в приближении с номером n выполняются соотношения

$$\Phi_x^k = \sum_s^k h^{s-2} f_x^s, \quad \Gamma_x^k = \sum_s^k h^{s-2} g_x^s, \quad \Pi_x^k = \sum_s^k h^{s-1} p_x^s, \quad K_x^k = \sum_s^k h^{s-1} q_x^s$$

$$(x, y, z), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-1$$

Здесь $\sum_s^k$ означает суммирование по индексу s, принимающему значения 1, 3, …, $2k-1$.

Таким образом, построенный алгоритм метода последовательных приближений полностью соответствует асимптотическому алгоритму.

7. О классификации моделей деформирования упругого слоя. Расчетные модели деформирования пластин, плит, несущих и связующих слоев в трехслойных пластинах и клеевых соединениях вытекают из построенных алгоритмов при конкретном выборе вида произвольных функций. Здесь показано, что сформулированные надлежащим образом различные методы решения задачи теории упругости приводят к одинаковым степенным рядам для всех компонент НДС. Это позволяет ввести непротиворечивую классификацию моделей деформирования, в основу которой можно положить максимальную степень координаты z в рядах (4.1).

Моделями первого приближения можно назвать расчетные схемы, точно следующие из структуры первого асимптотического приближения. При этом доказано [6], что модель Кирхгофа – схема первого приближения. К первому приближению следует отнести модель расчета связующего в слоистых конструкциях [7].

Расчетные схемы второго приближения должны содержать полиномы с наибольшей степенью по координате z, равной трем. К ним относится модель деформирования ортотропных пластин, в которых межслоевой сдвиг определяется законом квадратной параболы по толщине [5], модель деформирования заполнителя в трехслойных конструкциях [8] и многие другие модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. *Агаловян Л.А.* О взаимодействии погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв. АН АрмССР. 1977. Т. 30. № 5. С. 48–62.
3. *Мальков В.М.* Линейная теория тонкого слоя из малосжимаемого материала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 52–54.
4. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
5. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
6. *Рябенков Н.Г.* Один вариант асимптотического метода в теории упругости тонкого слоя // Механика оболочек и пластин. Сб. докл. 20-й Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2002. С. 254–261.
7. *Болотин В.В.* Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 27–38.
8. *Прусаков А.П.* Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 1. С. 27–36.

Казань
e-mail: kgeu@kgeu,ru

Поступила в редакцию
22.IV.2004