

УДК 532.5

© 2006 г. А. В. Марченко

### МЕТОД РАСЧЕТА ЛЕДОВЫХ НАГРУЗОК ПРИ НАВАЛЕ ЛЬДА НА НЕПОДВИЖНУЮ СТЕНКУ

Разрабатывается модель расчета ледовых нагрузок на шельфовую ледостойкую платформу, соответствующая наблюдающемуся в лабораторных экспериментах циклическому сценарию взаимодействия льда со стенкой платформы. С использованием соотношений, вытекающих из законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных для льда, заполняющего формирующийся около стенки платформы торос, получена явная формула для ледовой нагрузки на стенку. Проведена параметризация обобщенных сил, характеризующих зависимость энергетической диссипации при торошении от размеров паруса и киля тороса и от формы стенки. Показано, что расчетные нагрузки, полученные с использованием предположения о гидростатическом равновесии паруса и киля тороса, соответствуют нижней границе экспериментально измененных нагрузок. Расчетные нагрузки, полученные с использованием предположения о постоянном размере киля тороса, дают верхнюю оценку ледовых нагрузок. Для оценки предельных нагрузок, при которых происходит обрушение тороса в воду, рассмотрена задача о формировании изгибающей трещины в льдине, надвигающейся на стенку. Проведен расчет средних и максимальных ледовых нагрузок на стенку платформы в реальном масштабе.

При взаимодействии платформы, стоящей на грунте, с дрейфующим ледяным покровом вблизи стенки платформы образуется навал льда или торос. Оценка ледовых нагрузок на платформу при образовании тороса необходима для планирования режима эксплуатации платформы и предотвращения катастроф, связанных с возникновением высоких нагрузок. Торос состоит из ледяных блоков, образовавшихся при разрушении края ледового поля, наползающего на платформу. Как правило, характерный размер блоков изменяется в интервале от одного до нескольких метров, а толщина блоков совпадает с толщиной ледового поля. Горизонтальные и вертикальные размеры тороса могут достигать нескольких десятков метров, протяженность тороса вдоль линии контакта с платформой – порядка горизонтального размера платформы на уровне воды (~100 м), количество блоков льда, заполняющих вертикальное сечение тороса, – порядка сотен, поэтому прямое использование моделей механики сплошных или сыпучих сред при моделировании торосов физически не обоснованно, если блок льда считать аналогом частицы сыпучей среды. В этом смысле моделирование тороса дискретными частицами более реалистично (см., например, [1]). Вместе с тем получение аналитических соотношений, позволяющих оценивать ледовые нагрузки на основе традиционных методов механики сплошных сред и без проведения сложных вычислений, представляет интерес.

Была сформулирована схема сил, определяющих суммарную нагрузку от навала льда на сооружение, и предложена эмпирическая формула для расчета ледовой нагрузки [2]. Был разработан [3] метод расчета напряжений, возникающих при формировании гряды торосов при сжатии ледовых полей. В этом подходе соотношения между напряжениями и деформациями вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии битого льда в торосе; ключевую роль играет выражение для диссипации энергии, определяемое сценарием формирования тороса. В данной работе этот метод применяется для расчета напряжений при торошении льда около неподвижной стенки.

**1. Основные уравнения.** При взаимодействии плавающей льдины с неподвижной стенкой происходит образование торося, состоящего из ледяных блоков, формирующихся при разрушении наползающей на стенку льдины. Средняя скорость блоков льда в торося практически равна нулю, а скорость наползающей льдины отлична от нуля. Пусть координата  $x$  отсчитывается от стенки и торося занимает область ширины  $L_r$  около стенки. Размер стенки вдоль оси  $y$ , перпендикулярной горизонтальной оси  $x$  и вертикальной оси  $z$ , назовем шириной стенки  $w_r$ . Будем рассматривать ледяной покров как двумерную сплошную среду, расположенную в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ , описание которой возможно в рамках плоского напряженного состояния, и торося как особую линию, обладающую собственными распределительными динамическими характеристиками: погонной плотностью, импульсом и энергией. Проекция скорости частиц льда на ось  $x$ , осредненная по толщине льда, изменяется при переходе через границу торося  $x = L_r$  от  $v$  (скорость льдины) до нуля (скорость кусков льда в торося). Представление торося линией возможно, когда отношение изменения ширины торося  $\delta L_r$  на расстоянии  $w_r$  к ширине стенки  $w_r$  мало. Предположение о малости энергии упругих деформаций по сравнению с диссипацией энергии вследствие трения обычно выполняется при взаимодействии льда с широкими конструкциями [4]. Далее предполагается, что процесс формирования торося протекает одинаково во всех вертикальных сечениях торося параллельных плоскости  $(x, z)$ . При этом полная ледовая нагрузка на стенку равна произведению погонной нагрузки на стенку от участка торося единичной длины на ширину стенки  $w_r$ .

Погонная плотность битого льда в торося равна  $\rho_i U_r$ , где  $\rho_i$  – плотность льда и  $U_r$  – площадь льда, заполняющего поперечное сечение торося, причем

$$U_r = \int_{-L_r z^-}^0 \int \gamma dz dx \quad (1.1)$$

где  $z = z^+(x)$  и  $z = z^-(x)$  – уравнения верхней и нижней поверхностей торося и  $\gamma$  – плотность заполнения торося кусками льда. Ширина торося  $L_r$  и площадь льда в поперечном сечении торося  $U_r$  увеличиваются в ходе процесса торошения. Импульс и кинетическая энергия торося равны нулю, поскольку полагается, что скорость кусков льда в торося равна нулю. Потенциальная энергия торося, нормированная на единицу его длины, определяется формулой ( $\rho_w$  – плотность воды)

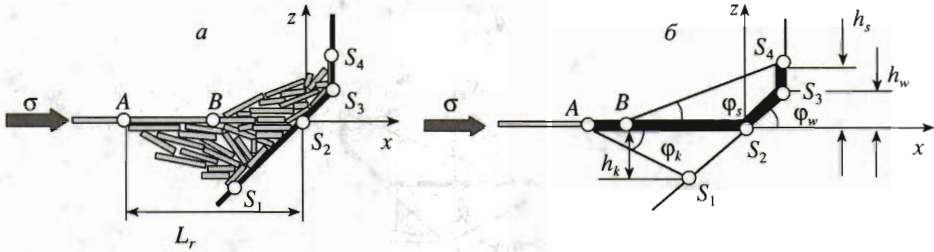
$$\Pi_r = \int_{-L_r}^0 \left[ \rho_i g \int_{z^-}^{z^+} \gamma z dz - \rho_w g \int_{z^-}^0 \gamma z dz \right] dx \quad (1.2)$$

В одномерном случае уравнения баланса массы, импульса и полной энергии ледяного покрова, проинтегрированные по ширине торося, имеют вид [3]

$$\frac{dU_r}{dt} - qh = 0, \quad -\rho_i q v h = \sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma_{xx}|_{x=-L_r}, \quad \frac{d(\Pi_r + D_r)}{dt} - q\Pi = -v\sigma_{xx}|_{x=-L_r} \quad (1.3)$$

где  $q = v + dL_r/dt$  – поток ровного льда в торося,  $h$  – толщина льдины, наползающей на стенку,  $\sigma_{xx}$  – проинтегрированные по толщине льда внутренние напряжения,  $dD_r/dt \geq 0$  – скорость диссипации энергии внутри торося,  $\Pi = \delta \rho_i g h^2 / 2$  – поверхностная плотность потенциальной энергии ровного льда ( $\delta = (\rho_w - \rho_i) / \rho_w$ ).

Полагая  $\rho_i = 920 \text{ кг/м}^3$ ,  $v = 0.1 \text{ м/с}$ ,  $|q| \approx |v|$  и  $h = 1 \text{ м}$ , находим оценку  $\rho_i h |q v| \approx 10 \text{ Па} \cdot \text{м}$ . Уровень ледовых нагрузок на стенку может быть намного выше, поэтому из второго уравнения (1.3) с высокой степенью точности вытекает  $\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma_{xx}|_{x=-L_r} = -\sigma$ , где величина  $\sigma$  – погонная нагрузка льда на стенку.



Фиг. 1

В соответствии с общими термодинамическими законами определим скорость диссипации энергии как произведение потока материала в торос на обобщенную силу  $\sigma_d$  (размерность Н/м)

$$dD_r/dt = q\sigma_d \tag{1.4}$$

Исключая  $v$  из первого и последнего уравнений (1.3) и используя формулу (1.4), находим выражение для погонной нагрузки льда на стенку

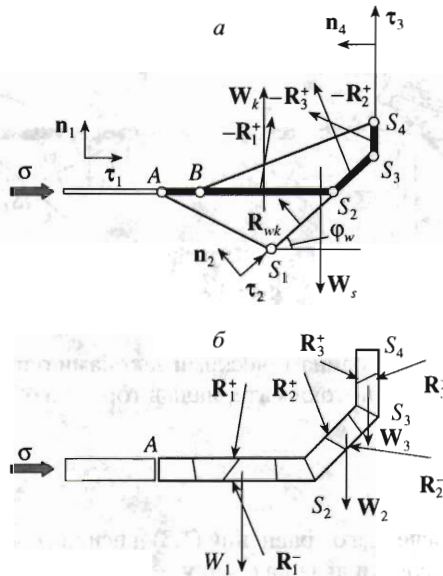
$$\sigma = \left( h \frac{d\Pi_r}{dU_r} + \sigma_d - \Pi \right) \left( 1 - h \frac{dL_r}{dU_r} \right)^{-1} \tag{1.5}$$

Из формулы (1.5) вытекает, что зависимость погонной нагрузки  $\sigma$  от скорости льдины  $v$  полностью определяется зависимостью  $\sigma_d$  от  $v$ . Далее рассматриваются сценарии формирования тороса, при которых  $\sigma_d$  не зависит от  $v$ .

**2. Сценарий торосения льда около неподвижной стенки.** На фиг. 1 показан сценарий образования тороса, описанный на основе наблюдений в ходе экспериментов в ледовом бассейне [5]. В этом сценарии плавающая льдина продавливает торос до стенки, ее обломки поднимаются вдоль стенки и скатываются на боковую поверхность  $BS_4$  паруса тороса. Парусом тороса называется надводная часть тороса, ограниченная линией уровня воды, совпадающей с осью  $x$ . Часть тороса, расположенная ниже уровня воды, называется килем. Процесс взаимодействия льда со стенкой носит циклический характер. При этом каждый цикл взаимодействия льда со стенкой может быть условно разделен на два этапа. На первом этапе строится парус тороса, причем киль тороса не изменяется, и куски вдавливаемой льдины двигаются по ломаной траектории  $ABS_2S_3S_4$ . На втором этапе происходит обрушение паруса тороса в воду и наблюдается резкое падение ледовой нагрузки на стенку. Физическая причина обрушения паруса тороса не вполне понятна. Высказывалось предположение, что это может быть связано с потерей несущей способности вдавливаемой в торос льдины [5].

Положим, что стенка имеет форму ломаной  $(S_1S_2S_3S_4$  на фиг. 1, а). На фиг. 1, б граница паруса тороса аппроксимируется ломаной  $BS_4S_3S_2$ , киль тороса – треугольником  $AS_2S_1$ . В рассматриваемом подходе формы тороса определяется вектором шестого порядка  $\chi = (h_s, h_k, h_w, \varphi_s, \varphi_k, \varphi_w)$ , где  $h_s$  и  $h_k$  – высота паруса и глубина киля тороса, величины  $h_w$  и  $\varphi_w$  определяют форму стенки в области ее контакта с торосом. Полагается, что угол ската паруса  $\varphi_s$  и угол ската киля  $\varphi_k$  остаются неизменными при наползании льдины на стенку, а высота паруса  $h_s$  и глубина киля  $h_k$  возрастают.

Площадь льда, заполняющего поперечное сечение тороса, ограничена ломаной  $ABS_4S_3S_2S_1$  (фиг. 1, б) и равна сумме площадей вертикальных сечений паруса ( $U_s$ ), киля



Фиг. 2

( $U_k$ ) и сегментов вдавливаемой льдины  $AS_2(U_1)$ ,  $S_2S_3(U_2)$  и  $S_3S_4(U_3)$ . Величины  $U_s$ ,  $U_k$ ,  $U_f$  и  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются с точностью до  $O(h/L_r)$  формулами

$$U_s = \frac{\gamma_s}{2} \left( \frac{h_s^2}{\operatorname{tg} \varphi_s} - \frac{h_w^2}{\operatorname{tg} \varphi_w} \right), \quad U_k = \frac{\gamma_k h_k L_r}{2}, \quad U_1 = h L_r, \quad U_2 = \frac{h h_w}{\sin \varphi_w}, \quad U_3 = h(h_s - h_w) \quad (2.1)$$

$$L_r = h_k \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_k} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_w} \right), \quad L_s = \frac{h_s}{\operatorname{tg} \varphi_s} - \frac{h_w}{\operatorname{tg} \varphi_w}$$

где  $L_r$  и  $L_s$  – ширина торося и паруса торося,  $\gamma_s$  и  $\gamma_k$  – плотности заполнения паруса и кия кусками льда.

Погонная плотность потенциальной энергии торося равна сумме потенциальных энергий паруса ( $\Pi_s$ ), кия ( $\Pi_k$ ) и вдавливаемой льдины ( $\Pi_f$ ). С использованием формулы (1.2) величины  $\Pi_s$ ,  $\Pi_k$  и  $\Pi_f$  записываются с точностью  $O(h/L_r)$  в виде

$$\Pi_s = \frac{\rho_i g \gamma_s}{6} \left( \frac{h_s^3}{\operatorname{tg} \varphi_s} - \frac{h_w^3}{\operatorname{tg} \varphi_w} \right), \quad \Pi_f = \frac{\rho_i g}{2} \left( \frac{\delta h^2 h_k}{\operatorname{tg} \varphi_w} + \frac{h h_w^2}{\sin \varphi_w} + h(h_s^2 - h_w^2) \right) \quad (2.2)$$

$$\Pi_k = \frac{(\rho_w - \rho_i) g \gamma_k h_k^3}{6} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_k} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_w} \right) \left( 1 + \frac{3h}{h_k} \right)$$

**3. Особенности диссипации энергии при формировании торося.** Обозначим  $R_j^\pm$  ( $j = 1, 2, 3$ ) силы, приложенные к вдавливаемой в торося льдине (фиг. 2а, б). Значения индексов 1, 2 и 3 соответствуют фрагментам льдины  $AS_2$ ,  $S_2S_3$  и  $S_3S_4$ . Индекс плюс будет обозначать силы, приложенные к поверхности фрагментов со стороны паруса, индекс минус – силы, приложенные к поверхности фрагмента  $AS_2$  со стороны кия ( $j = 1$ ) и к поверхнос-

тям фрагментом  $S_2S_3$  и  $S_3S_4$  ( $j = 2, 3$ ) со стороны стенки. Разложим силы реакции на нормальные и касательные составляющие

$$\mathbf{R}_j^\pm = R_{n,j}^\pm \mathbf{n}_j + R_{\tau,j}^\pm \boldsymbol{\tau}_j \quad (3.1)$$

Нормальные и касательные к поверхностям фрагментов вдавливаемой льдины единичные векторы определяются формулами (фиг. 2, а)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (0, 1), \quad \boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = (-\sin \varphi_w, \cos \varphi_w), \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= (\cos \varphi_w, \sin \varphi_w), \quad \mathbf{n}_3 = -\boldsymbol{\tau}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обобщенная сила трения  $\sigma_d$  равна сумме абсолютных значений сил трения, приложенных к поверхностям фрагментов  $AS_2$ ,  $S_2S_3$  и  $S_3S_4$ , и определяется формулой

$$\sigma_d = \sum_{j=1}^3 |R_{\tau,j}^+ + R_{\tau,j}^-| \quad (3.3)$$

Запишем баланс сил, приложенных к парусу и килю тороса

$$\mathbf{W}_s - \mathbf{R}_1^+ - \mathbf{R}_2^+ - \mathbf{R}_3^+ = 0, \quad \mathbf{W}_k - \mathbf{R}_1^- + \mathbf{R}_{wk} = 0 \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{W}_s = (0, -\rho_j g U_s)$  – вес паруса тороса,  $\mathbf{W}_k = (0, (\rho_w - \rho_i) g U_k)$  – сумма веса кия тороса и силы плавучести,  $\mathbf{R}_{wk} = r_{wk} \mathbf{n}_2$  – сила реакции, приложенная к килю тороса со стороны затопленного участка стенки  $S_1S_2$ ; полагается, что эта сила направлена по нормали к стенке.

Положим, что на поверхностях контакта вдавливаемой льдины с парусом и стенкой выполняется условие сухого трения Кулона – Мора

$$\begin{aligned} R_{\tau,j}^+ &= \mu_{ii} R_{n,j}^+, \quad (j = 1, 2, 3); \quad R_{\tau,1}^- = -\mu_{ii} R_{n,1}^-, \\ R_{\tau,2}^- &= -\mu_{iw} R_{n,2}^-, \quad R_{\tau,3}^- = -\mu_{iw} R_{n,3}^- \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\mu_{ii}$  и  $\mu_{iw}$  – коэффициенты трения льда со льдом и льда со стенкой.

Полагается, что нормальные проекции сил  $R_{n,j}^-$  ( $j = 2, 3$ ), приложенных к поверхностям фрагментов льдины, связаны с весами соответствующих фрагментов формулами

$$(\mathbf{R}_j^- + \mathbf{R}_j^+ + \mathbf{W}_j) \cdot \mathbf{n}_j = 0, \quad j = 2, 3 \quad (3.6)$$

Веса фрагментов вдавливаемой льдины равны  $\mathbf{W}_j = (0, -\rho_j g U_j)$ . В уравнениях (3.6) опущены члены, соответствующие нормальным проекциям сил взаимодействия фрагментов льдины, приложенных к торцам фрагментов. Это сделано на основе предположения о существовании узкого слоя между торцами фрагментов, заполненного крошкой битого льда, хорошо передающей давление и значительно снижающей трение, поэтому полагается, что давление на торцы фрагментов нормально к векторам  $\mathbf{n}_j$  и не дает вклада в уравнения (3.6).

В скалярном виде 12 уравнений (3.4)–(3.6) содержат 15 величин, изменяющихся в процессе торошения льда около стенки: 12 компонент векторов  $\mathbf{R}_j^\pm$ , силу реакции  $r_{wk}$ , высоту паруса  $h_s$  и глубину кия  $h_k$ . Сформулируем два дополнительных соотношения, позволяющих выразить погонную ледовую нагрузку на стенку (1.5) через один параметр, например высоту паруса тороса  $h_s$ , в виде

$$\sigma = \left( h \frac{d\Pi_r}{dh_s} \left( \frac{dU_r}{dh_s} \right)^{-1} + \sigma_d - \Pi \right) \left( 1 - h \frac{dL_r}{dh_s} \left( \frac{dU_r}{dh_s} \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

Дополнительные соотношения формулируются на основе идеализации процесса торошения, поэтому полученные выражения для нагрузки льда на стенку не могут описывать детально реальные зависимости, полученные в лабораторных и натуральных экспериментах. Вместе с тем они полезны для оценки ледовых нагрузок.

Условия равновесия (3.4) и формулы (3.5) определяют силы реакции, действующие на парус тороса заданных размеров, с точностью до постоянной величины. В качестве критерия выбора единственного решения предлагается использовать дополнительную гипотезу о минимальности напряжений трения на поверхностях фрагментов вдавливаемой льдины, согласно которой величина

$$Z = \sum_{j=1}^3 (R_{\tau,j}^+ + R_{\tau,j}^-)^2 \quad (3.8)$$

достигает минимума при истинном движении, т.е. выполняется условие

$$\partial Z / \partial R_{n,1}^+ = 0 \quad (3.9)$$

причем производная вычисляется после подстановки решения уравнений (3.4)–(3.6) в выражение (3.8).

При формировании паруса тороса при неизменном киле полагается

$$h_k = \text{const} \quad (3.10)$$

Разрушение вдавливаемой льдины может приводить к выполнению баланса сил тяжести и плавучести, действующих на ее фрагмент  $AS_2$ ,

$$R_{n,1}^+ + R_{n,1}^- + (\rho_w - \rho_i)gU_1 = 0 \quad (3.11)$$

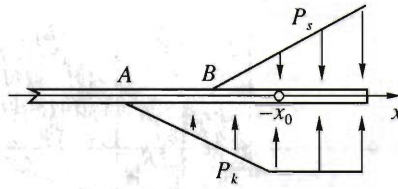
Последнее слагаемое в левой части соотношения (3.11) равно сумме веса и силы плавучести фрагмента  $AS_2$ . Полагается, что фрагмент  $AS_2$  находится в притопленном положении после разрушения льдины. Аналогично допущениям, сделанным при формулировке уравнений (3.6), вертикальная проекция силы, приложенной к торцу фрагмента в точке  $S_2$ , полагается малой и не учитывается в уравнении (3.11).

В качестве двух дополнительных условий при нахождении верхней границы ледовой нагрузки на стенку предлагается использовать уравнения (3.9) и (3.10), а при нахождении нижней границы – уравнения (3.9) и (3.11). Если наклон стенки постоянен, то в уравнениях (3.4) надо положить  $R_3^\pm = 0$ . В этом случае векторы  $R_1^\pm$  и  $R_2^\pm$  определяются единственным образом из уравнений (3.4)–(3.6)

$$\begin{aligned} R_{1,x}^\pm &= \pm \mu_{ii} R_{1,z}^\pm, & R_{1,z}^+ &= -W_s \frac{1 - \mu_{ii} \text{ctg} \varphi_w}{1 + \mu_{ii}^2}, & R_{2,x}^+ &= -R_{1,x}^+, & R_{2,z}^+ &= -W_s \mu_{ii} \frac{\mu_{ii} + \text{ctg} \varphi_w}{1 + \mu_{ii}^2} \\ R_{1,z}^- &= (\rho_w - \rho_i)gU_k, & R_{2,z}^- &= -\frac{(\mu_{iw} - \text{ctg} \varphi_w)(2W_s \mu_{ii} + W_2 \sin(2\varphi_w)(1 + \mu_{ii}^2))}{2(1 + \mu_{ii}^2)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$R_{2,x}^- = -\frac{1 + \mu_{iw} \text{ctg} \varphi_w}{\mu_{iw} - \text{ctg} \varphi_w} R_{2,z}^-, \quad W_s = \rho_i g U_s, \quad W_2 = \rho_i g U_2.$$

В формулах (3.12) полагается  $\text{tg} \varphi_w > \mu_{ii}$ . При невыполнении этого неравенства битый лед не соскальзывает вниз по наползающей на стенку льдине. Из формул (3.12) вытекает, что  $R_{n,2}^- > 0$  и  $R_{\tau,2}^- < 0$ .



Фиг. 3

**4. Критерий образования изгибной трещины.** Для формулировки критерия разрушения льдины рассмотрим задачу об изгибе полубесконечной упругой пластины на гидравлическом основании под действием распределенной погонной нагрузки. Отклонение точек пластины от горизонтального положения  $\eta(x)$  описывается уравнением

$$D \frac{d^4 \eta}{dx^4} + \rho_w g \eta = P, \quad x < 0; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.1)$$

$D$  – жесткость пластины,  $h$  – толщина,  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда. Схема распределенной погонной нагрузки показана на фиг. 3. Точки  $A$  и  $B$  имеют на оси  $x$  координаты  $-L_r$  и  $-L_s$ , значение  $x_0 = h_k \operatorname{ctg} \varphi_w$  равно координате точки  $S_1$  на фиг. 1. Распределенная погонная нагрузка  $P = P_s + P_k$  определяется силами реакции, приложенными к фрагменту льдины  $AS_2$  со стороны паруса и киля, и моделируется формулами

$$P_s = 2R_{n,1}^+ \frac{L_s + x}{L_s^2}, \quad x \in (0, -L_s); \quad P_k = 2R_{n,1}^- \begin{cases} (L_r + x_0)^{-1}, & x \in (0, -x_0) \\ (L_r^2 - x_0^2)^{-1}(L_r + x), & x \in (-x_0, -L_r) \end{cases} \quad (4.2)$$

Ширины тороса  $L_r$  и паруса тороса  $L_s$  определены формулами (2.2). Из формул (4.2) вытекают равенства

$$R_{n,1}^+ = \int_0^{-L_s} P_s dx, \quad R_{n,1}^- = \int_0^{-L_r} P_k dx$$

Полагается, что на больших расстояниях от стенки льдина не изгибается внешними силами и вблизи стенки изгибный момент, действующий на край льдины, равен нулю:

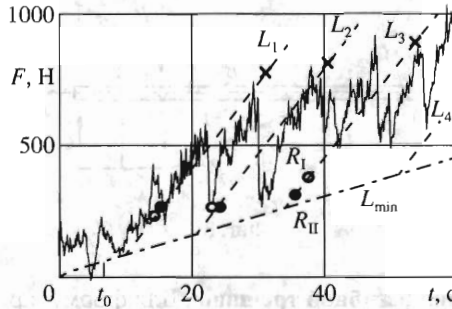
$$\eta \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0, \quad x = 0 \quad (4.3)$$

В дополнение к условиям (4.3) на краю льдины рассматривается одно из следующих граничных условий:

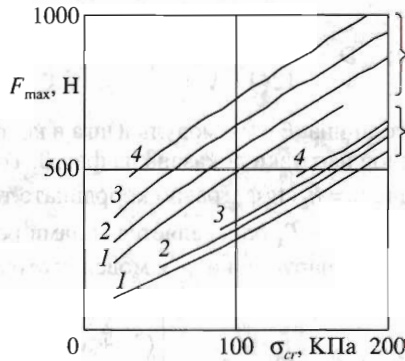
$$\eta = 0, \quad x = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{d^3 \eta}{dx^3} = 0, \quad x = 0 \quad (4.5)$$

Условие (4.4) выполняется, когда край вдавливаемой льдины опирается на стенку. Условие (4.5) соответствует случаю, когда край льдины находится вблизи стенки и не касается ее.



Фиг. 4



Фиг. 5

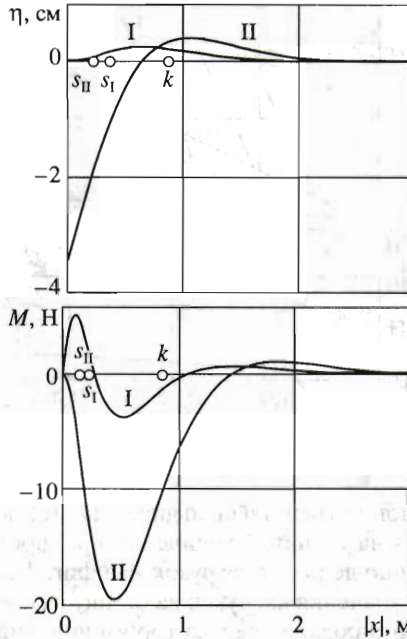
Решения уравнения (4.1), удовлетворяющие условиям (4.3) и (4.4), будем называть решениями класса I, а удовлетворяющие условиям (4.3) и (4.5) – решениями класса II.

Критерий формирования изгибной трещины в льдине сводится к равенству суммарного растягивающего напряжения  $\sigma_i$  на поверхности льдины прочности льда на растяжение  $\sigma_{cr}$ . Растягивающее напряжение на поверхности льдины при изгибе равно  $\sigma_{xx}^{3D} = 6|M|h^{-2}$ , где  $M = Dd^2\eta/dx^2$  – изгибающий момент. Суммарное напряжение  $\sigma_i$  на поверхности льдины в результате изгиба при наличии сжимающей погонной нагрузки –  $\sigma$  равно  $\sigma_{xx}^{3D} - \sigma h^{-1}$ . Таким образом, критерий формирования изгибной трещины записывается в виде

$$\max_{x>0} |M| = (\sigma_{cr} + \sigma h^{-1})h^2/6 \quad (4.6)$$

При небольших размерах паруса и киля распределенная погонная нагрузка на льдину недостаточна для выполнения критерия (4.6). При заданном размере киля тороса критерий (4.6) выполняется, когда высота паруса достигает критического значения, зависящего от размера киля. В этот момент в льдине образуется изгибная трещина. Заметим, что лед достаточно долго сохраняет несущую способность даже после окончательного развития изгибных трещин [6], поэтому обрушение паруса тороса может наступать при значительно больших его размерах.

**5. Ледовые нагрузки на стенку.** Результаты расчетов торосения льда около стенки в эксперименте в ледовом бассейне представлены на фиг. 4–6. В эксперименте искусст-

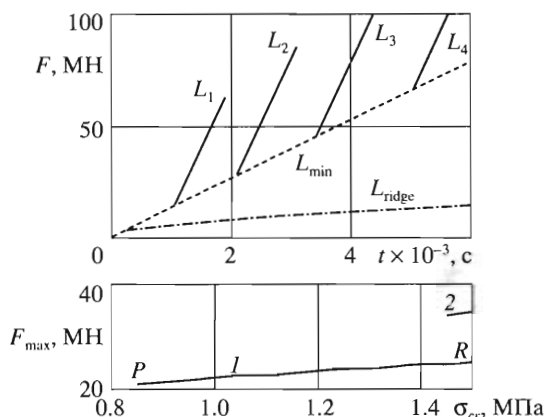


Фиг. 6

венно приготовленная льдина толщиной  $h = 35$  мм двигалась со скоростью  $v = 13.5$  см/с на стенку шириной  $w_r = 1.75$  м, высотой над уровнем воды  $h_w = 80$  мм и углом наклона  $\varphi_w = 58^\circ$ . Коэффициенты трения лед-лед и лед-стенка  $\mu_{ii} = 0.35$  и  $\mu_{iw} = 0.15$ . Измеренные значения модуля Юнга и прочность льда на изгиб – около  $E = 5 \cdot 10^7$  Нм<sup>-2</sup> и  $\sigma_f = 20$  КПа. В расчетах принято  $\varphi_s = \varphi_k = 30^\circ$ ,  $\gamma_s = 0.8$  и  $\gamma_k = 0.7$  и  $\sigma_{cr} = \sigma_f$ .

На фиг. 4 сплошной кривой показана измеренная в эксперименте полная ледовая нагрузка на стенку, штриховыми линиями – результаты расчетов. Линия  $L_{min}$  показывает нижнюю границу ледовой нагрузки, рассчитанную с использованием предположения (3.11) о гидростатическом равновесии паруса, киля и фрагмента  $AS_2$  вдавливаемой льдины (фиг. 1). Расчетные линии  $L_1, \dots, L_4$  построены с использованием предположения (3.10) о постоянстве размера киля; этот размер для каждой из расчетных линий постоянен и определяется размером киля, соответствующим точке пересечения с линией  $L_{min}$ . В момент времени  $t_0 = 6.3$  с высота паруса достигает значения  $h_w = 80$  мм, и ломаная форма стенки начинает влиять на процесс.

Зависимости ледовых нагрузок  $F_{max}$ , возникающих в момент формирования изгибной трещины, от прочности льда на растяжении  $\sigma_{cr}$  при  $20 \text{ КПа} < \sigma_{cr} < 220 \text{ КПа}$  показаны на фиг. 5. Кривые 1, 2, 3, 4 построены при размерах килей, соответствующих линиям  $L_1, L_2, L_3, L_4$ . Группы кривых I и II построены для решений класса I и II уравнения (4.1). Почти все кривые начинаются или заканчиваются при определенном значении прочности  $\sigma_{cr}$ . Ограничение кривых слева означает, что при меньших значениях прочности  $\sigma_{cr}$  льдина ломается изгибом уже при равновесной форме тороса в точках линии  $L_{min}$ . При увеличении номера линии увеличиваются размеры тороса и возрастает распределенная нагрузка на льдину, поэтому линии с большим номером начинаются при больших значениях  $\sigma_{cr}$ . Ограничение кривых справа означает, что при больших значениях прочности  $\sigma_{cr}$  льдина ломается изгибом, когда ширина паруса превышает ширину киля:  $L_s > L_r$ . Расчет проводился только для случая  $L_s < L_r$ . Из фиг. 5 видно, что ледовая нагрузка на стенку в



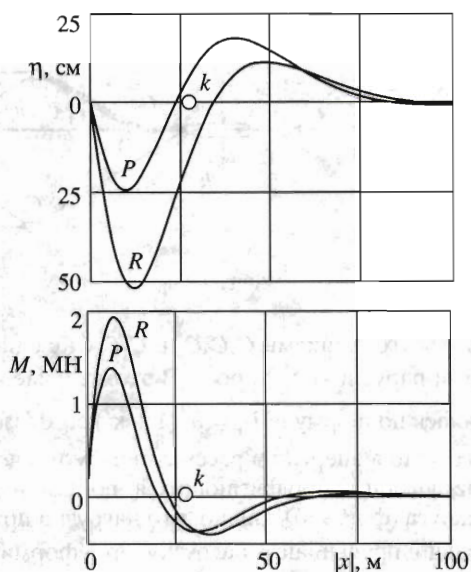
Фиг. 7

момент формирования изгибной трещины в льдине значительно больше в случаях, когда конец льдины опирается на стенку. Увеличение прочности льдины  $\sigma_{cr}$  приводит к почти линейному возрастанию ледовых нагрузок. На фиг. 4 светлыми, темными точками и крестиками отмечены значения нагрузки на стенку в момент формирования изгибной трещины на стадии формирования паруса тороса при неизменном киле, размер которого соответствует линиям  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . Светлые точки и крестики соответствуют решениям класса I и прочности льда  $\sigma_{cr} = 20$  КПа и  $\sigma_{cr} = 190$  КПа, темные точки – решению класса II и прочности  $\sigma_{cr} = 90$  КПа.

На фиг. 6 показана форма прогиба льдины  $\eta$  и изгибные моменты  $M$ , возникающие в ней в момент формирования трещины при действии распределенной нагрузки. Кривые I и II соответствуют классам решений I и II уравнения (4.1) и построены при размерах паруса и киля, соответствующих точкам  $R_I$  и  $R_{II}$  на фиг. 4. Точка  $k$  показывает границу киля тороса, точки  $s_I$  и  $s_{II}$  – границу паруса тороса. В решении I край льдины лежит на стенке. Максимальный изгибный момент возникает в пределах паруса тороса. В решении II край льдины провисает вниз примерно на 3.5 см вблизи стенки. Очевидно, что стенка будет мешать такому смещению. Однако можно предположить, что решение будет иметь аналогичный вид, если край льдины немного не достает до стенки. Максимальный изгибный момент возникает в пределах киля тороса.

Расчеты торосения льда около стенки, размеры которой соответствуют реальным ледостойким платформам, представлены на фиг. 7, 8. В расчетах принято, что лед толщиной  $h = 1$  м надвигается со скоростью  $v = 13$  см/с на стенку шириной  $w_r = 105$  м. Высота стенки над уровнем воды  $h_w = 4.8$  м и ее наклон  $\varphi_w = 58^\circ$ . Коэффициенты трения лед-лед и лед-стенка  $\mu_{ii} = 0.35$  и  $\mu_{iw} = 0.2$ . Принято, что  $\varphi_s = \varphi_k = 30^\circ$ ,  $\gamma_s = 0.8$  и  $\gamma_k = 0.7$ . При расчете изгиба использован модуль Юнга  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>. В верхней части фиг. 7 линия  $L_{min}$  показывает нижнюю границу ледовой нагрузки, рассчитанную с использованием предположения (3.11) о гидростатическом равновесии паруса, киля и фрагмента вдавливаемой льдины  $AS_2$ . Линии  $L_1, \dots, L_4$  построены с использованием предположения (3.10) о постоянстве размера киля. Размер киля на каждой из этих линий постоянен и определяется размером киля в точке ее пересечения с линией  $L_{min}$ . В момент времени  $t = 11.6$  мин высота паруса достигает значения  $h_w = 4.8$  м, и ломаная форма стенки начинает влиять на процесс.

Расчеты показывают, что воздействие распределенной нагрузки при равновесных размерах паруса и киля, соответствующих кривой  $L_{min}$ , приводит к разрушению льдины изгибом в случае, когда ее форма описывается решениями класса II. Зависимости мак-



Фиг. 8

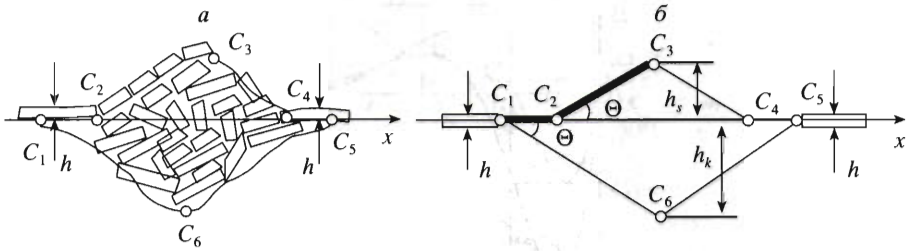
симальных ледовых нагрузок, соответствующих моменту формирования изгибной трещины в рамках решений класса I, от прочности льда на растяжение  $\sigma_{cr}$  при  $0.5 \text{ МПа} < \sigma_{cr} < 1.5 \text{ КПа}$  показаны в нижней части фиг. 7. Указанный диапазон изменений  $\sigma_{cr}$  соответствует прочности льда на изгиб, рассчитанной на основе экспериментов с морским льдом [7]. Кривые 1 и 2, построенные при размерах килей, соответствующих линиям  $L_1$  и  $L_2$ , начинаются при определенном значении прочности  $\sigma_{cr}$ . При меньших значениях прочности льдина ломается изгибом при равновесной форме тороса в точках линии  $L_{min}$ , когда изгиб льдины описывается решениями класса I. Увеличению номера кривой соответствуют увеличение размеров тороса и возрастание распределенной нагрузки на льдину. При достаточно больших равновесных размерах паруса и киля (соответствующих, например, начальным точкам линий  $L_3$  и  $L_4$ ) льдина ломается при любых значениях прочности  $\sigma_{cr}$  из рассматриваемого интервала значений. Максимальная ледовая нагрузка на стенку в момент разрушения льдины незначительно превышает нагрузку при равновесной форме тороса в точках кривой  $L_{min}$ .

На фиг. 8 показаны форма льдины, описываемая решениями класса I уравнения (4.1), и изгибные моменты  $M$ , возникающие в льдине в момент формирования трещины. Кривые  $P$  и  $R$  построены при размерах паруса и киля, соответствующих точкам  $P$  и  $R$  в нижней части фиг. 7 (не показанные в верхней части фиг. 7 точки  $P$  и  $R$  находятся вблизи точки пересечения линий  $L_1$  и  $L_{min}$ ). Точка  $k$  показывает границу киля тороса. Ширина паруса тороса равна 7.1 м в точке  $P$  и 8 м в точке  $R$ . Видно, что максимальный изгибный момент возникает вблизи края паруса тороса.

Линия  $L_{ridge}$  в верхней части фиг. 7 соответствует зависимости [8]

$$\sigma = kh\sqrt{U_r}, \quad k = \rho_i g \left( \frac{\sqrt{\text{tg}\theta}}{2(1 + \kappa^2)^{3/2}} \left( \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} \kappa^3 + 1 \right) + \frac{\mu_{ii}\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)\text{tg}\theta}} \right) \quad (5.1)$$

Погонное напряжение (5.1) получено для сценария формирования тороса сжатия в ровном ледяном покрове толщины  $h$ , представленного на фиг. 9, а. Торос моделировался



Фиг. 9

двумя равнобедренными треугольниками  $C_2C_3C_4$  и  $C_1C_6C_5$  с одинаковыми углами ската  $\theta = 30^\circ$ , представляющими парус и киль тороса. В этом случае площадь вертикального сечения тороса вычислялась по формуле  $U_r = h_s^2(1 + \kappa^2) \operatorname{ctg} \theta$ , где параметр  $\kappa = h_k/h_s$  полагался равным 4.4. Диссипация энергии в рассматриваемом сценарии происходит в результате трения кусков льдины, продвигающихся по боковой поверхности паруса  $C_1C_2C_3$ , о поверхность паруса (фиг. 9, б). Видно, что нагрузки при формировании тороса вблизи стенки значительно превышают нагрузку при формировании тороса между льдинами.

**6. Заключение и выводы.** Ледовая нагрузка, рассчитанная с использованием предположения о гидростатическом равновесии паруса и кия тороса, показывает нижнюю границу ледовых нагрузок на стенку, измеренных в экспериментах в ледовом бассейне. Верхняя граница расчетных ледовых нагрузок, полученная с использованием предположения о постоянном размере кия тороса, неограниченно возрастает при увеличении размера паруса тороса. Реальный уровень максимальных нагрузок в этом случае определяется моментом обрушения тороса в воду. При заданном размере кия расчетные нагрузки, возникающие в момент формирования трещины изгиба в наползающей на стенку льдине, имеют уровень максимальных нагрузок, измеренных в эксперименте, при значениях прочности льда на изгиб, на порядок больших, чем экспериментально измеренные значения прочности. Расчетные ледовые нагрузки на стенку в момент формирования изгибной трещины примерно в два раза меньше максимальных экспериментально измеренных нагрузок при реальных значениях прочности на изгиб. Возможно, это связано с тем, что потеря несущей способности льдины, поддерживающей парус, наступает значительно позже формирования изгибной трещины.

Проведен расчет ледовых нагрузок при наползании ледового поля толщиной 1 м на стенку длиной 105 м при циклическом взаимодействии льда со стенкой, наблюдавшемся в лабораторном эксперименте. Форма стенки подобна форме стенки в эксперименте. Прочность ледяного покрова на растяжении соответствовала прочности морского льда на изгиб. Оказалось, что расчетные ледовые нагрузки, возникающие в момент формирования изгибной трещины в льдине, поддерживающей парус тороса, близки к ледовым нагрузкам, полученным с использованием предположения о гидростатическом равновесии паруса и кия тороса. Ледовая нагрузка на единицу длины стенки достигала в расчетах 0.76 МПа · м при высоте паруса 13 м и глубине кия 27 м. Полагая, что максимальная ледовая нагрузка на единицу длины стенки в 2 раза больше, находим для нее оценку 1.5 МПа · м. Нагрузки, необходимые для формирования тороса между двумя льдинами, много меньше, поэтому при дрейфе ледового поля на платформу естественно предположить формирование торосов на некотором удалении от нее, например, в местах ослабления ледяного покрова трещинами.

В рассмотренных сценариях торования использованы кинематически допустимые схемы движения льда вблизи стенки, качественно отличные от классических схем, основанных на решении Прандтля о вдавливании штампа, в которых пластическое дефор-

мирование среды происходит в результате смещений областей треугольной формы. Прямое использование классических схем в задачах о формировании торосов представляется не вполне обоснованным, поскольку число блоков льда, составляющих торос не достаточно велико, и торос не может считаться аналогом сыпучей среды или гранулированного материала типа песка или гравия. Вместе с тем можно предположить, что с течением времени реологические свойства тороса приближаются к сыпучей среде [9], поэтому использование классических подходов более оправданно при расчетах воздействия ранее сформированных торосов на широкие конструкции [10, 11].

Автор благодарит С.А. Вершинина, Р.В. Гольдштейна, М.М. Карулину и Е.Б. Карулина за замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00219) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ 4710.2006.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hopkins M.A. Four stages of pressure ridging // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. № 10. P. 21883–21891.
2. Croasdale K.R., Cammaert A.B., Metge M. A method for the calculation of sheet ice loads on sloping structures // Int. Assoc. Hydraul. Res. Ice Symp. Trondheim, Norway, 1994. P. 874–885.
3. Марченко А.В. Модели торошения морских льдов // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 3. С. 67–129.
4. River and lake ice engineering // Ed. Ashton G.D. Michigan, USA: Book Crafters, 1986. 485 p.
5. Alexeev Y.N., Karulina M.M. A numerical prediction method for ice load on wide sloping offshore structures // Ice in surface waters / Ed. Shen H.T. Rotterdam: Balkema, 1998. P. 511–517.
6. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 318 с.
7. Timco G.W., Johnston M.E. Sea ice strength during the melt season // Ice in the Environment: Proc. 16th Int. Assoc. Hydraul. Res. Int. Symp. on Ice. Dunedin, New Zealand: IAHR. 2002. V. 2. P. 187–193.
8. Marchenko A., Makshtas A. A dynamic model of ice ridge build up // Cold Reg. Sci. and Tech. 2005. V. 41. № 3. P. 175–188.
9. Kioka S., Matuo Y., Kondo H., Yamamoto Y., Saeki H. Mechanical properties of unconsolidated layer model of ice ridge under various conditions // Proc. 17th Intern. Symp. on Ice. St. Petersburg: VNIIG, 2004. V. 1. P. 53–60.
10. Bekker A.T., Komarova O.A., Venkov A.V. Distribution of extreme ice loads on ice resistant platforms // Ice in Surface Waters / Ed. Shen H.T. Rotterdam: Balkema, 1998. P. 469–474.
11. Vershinin S.A., Truskov P.A., Kouzmitchev K.V. Impact of hummock formations on vertical structures // Proc. OMAE04: 23rd Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Eng., Vancouver, Canada, 2004. № 51271.

Москва  
e-mail: amarch@orc.ru

Поступила в редакцию  
9.XI.2004