

УДК (532.591 + 539.3):534.1

© 2006 г. И. В. Стурова

ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ, ПЛАВАЮЩУЮ НА МЕЛКОВОДЬЕ

В рамках линейной теории мелкой воды исследуется установившееся поведение плавающей упругой пластины ограниченных размеров под действием локализованной внешней нагрузки. Для пластины произвольной формы задача сведена к решению системы граничных интегральных уравнений, дополненных дифференциальными соотношениями для свободного края пластины. На примере прямоугольной пластины исследовано влияние частоты периодических воздействий и места их приложения на амплитуды нормальных прогибов пластины и диаграммы направленности для поверхностных волн вдали от пластины. Показано проявление волноводных свойств для удлиненной пластины.

При определении прочности плавающих платформ больших размеров типа плавучего аэропорта (см., например [1]) представляет интерес изучение влияния на них нестационарного внешнего воздействия. Наиболее простой случай такого воздействия – периодическое давление на платформу, которая обычно моделируется тонкой упругой пластиной.

Установившиеся колебания плавающей упругой пластины под действием периодической нагрузки были рассмотрены в линейной постановке [2]. В плоском случае предложено решение для балочной пластины конечной и полубесконечной длины, в пространственном – для круглой пластины. Сопоставление решений для мелкой воды и жидкости конечной глубины показало их хорошее согласие при относительно низких частотах. Использование приближения мелкой воды и метода граничных интегральных уравнений позволяет рассмотреть задачу о воздействии периодических внешних давлений на пластину произвольной формы, аналогично тому, как это было сделано независимо [3, 4] для дифракционной задачи. Использовалась [3] модель Грина – Нагди, позволяющая несколько расширить область применения обычной теории мелкой воды в сторону более коротких волн.

В данной работе исследование линейной гидроупругой задачи о воздействии периодических поверхностных давлений на пластину произвольной формы проводится для случая прямоугольной пластины, поскольку прямоугольная форма плавающей платформы наиболее часто рассматривается для практического приложения, и кроме того, плавающая на мелководье упругая платформа в виде полосы постоянной ширины и бесконечной длины может обладать волноводными свойствами при ненулевой осадке [5]. Представляет интерес исследование влияния конечной длины прямоугольной пластины на проявление волноводных свойств.

1. Постановка задачи. На поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины h плавает упругая однородная прямоугольная пластина длиной $2L$ и шириной $2B$. Поверхность жидкости, не покрытая пластиной, свободна. Область горизонтальных переменных x и y , занимаемую пластиной, обозначим Ω_1 , а область вне пластины – Ω_2 . Начало координат расположено в центре области Ω_1 , которая определена условиями $|x| \leq B$, $|y| \leq L$. Соответственно область Ω_2 определяется условиями $|x| > B$, $|y| > L$.

Предполагается, что на пластину действует периодическое по времени с частотой ω нормальное давление

$$p(x, y, t) = P(x, y)\exp(-i\omega t) \quad (1.1)$$

Исследуем колебания жидкости и пластины, вызванные этим давлением. Движение жидкости полагается потенциальным, а скорость жидких частиц и прогиб пластины – малыми.

Считая, что движение жидкости и пластины во времени установившееся, потенциалы скоростей $\phi_j(x, y, t)$ жидкости соответственно в областях Ω_j ($j = 1, 2$) ищем в виде

$$\phi_j(x, y, t) = \Phi_j(x, y) \exp(-i\omega t)$$

Нормальный прогиб пластины

$$w(x, y, t) = W(x, y) \exp(-i\omega t)$$

описывается уравнением

$$D\Delta^2 W - \rho_1 h_1 \omega^2 W + g\rho W - i\omega\rho\Phi_1 = -P(x, y), \quad x, y \in \Omega_1 \quad (1.2)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, h_1 – ее толщина, ρ_1 – плотность материала, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Для мелкой воды справедливо соотношение

$$W = -i(h-d)\omega^{-1}\Delta\Phi_1, \quad x, y \in \Omega_1 \quad (1.3)$$

где $d = \rho_1 h_1 / \rho$ – осадка пластины. Потенциал скоростей в области чистой воды Ω_2 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi_2 + k_0^2\Phi_2 = 0, \quad x, y \in \Omega_2; \quad k_0 = \omega/\sqrt{gh} \quad (1.4)$$

Возвышение свободной поверхности

$$\eta(x, y, t) = \zeta(x, y) \exp(-i\omega t)$$

определяется из соотношения

$$\zeta = i\omega g^{-1}\Phi_2, \quad x, y \in \Omega_2$$

На контуре пластины S должны выполняться условия сопряжения, означающие непрерывность давления и потока массы,

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{h}{h-d} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}, \quad x, y \in S \quad (1.5)$$

где n – направление нормали к контуру S .

Предполагается, что края пластины свободные, т.е. изгибающий момент и перерезывающая сила на краях равны нулю. Для прямоугольной пластины условия свободного края имеют вид (для произвольной формы пластины см., например [2,4])

$$\Delta W = \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial\Delta W}{\partial n} = -\nu_1 \frac{\partial^3 W}{\partial n \partial s^2}, \quad x, y \in S; \quad \nu_1 = 1 - \nu \quad (1.6)$$

где s – дуговая координата контура S , ν – коэффициент Пуассона пластины.

В угловых точках пластины должны быть выполнены условия компенсации изгибающего момента сосредоточенной перерезывающей силой

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad x = \pm B, \quad y = \pm L \quad (1.7)$$

Вдали от пластины следует учесть условие излучения, означающее отсутствие приходящих волн,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_0 \right) \Phi_2 = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Далее перейдем к безразмерным переменным, взяв за масштаб длины глубину бассейна h , а за масштаб времени $\sqrt{h/g}$, т.е.

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}, \bar{W}, \bar{\zeta}, \bar{L}, \bar{B}, \bar{d}) = \frac{1}{h}(x, y, r, W, \zeta, L, B, d)$$

$$\bar{\Phi}_j = \frac{1 - \bar{d}}{\sqrt{gh^3}} \Phi_j, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho gh}, \quad \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{h}{g}}$$

2. Метод решения. Уравнения (1.2), (1.4) в безразмерных переменных имеют вид

$$\chi \Delta^3 \bar{\Phi}_1 + \gamma \Delta \bar{\Phi}_1 + \tau \bar{\Phi}_1 = -i \bar{\omega} \bar{P}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Omega_1 \tag{2.1}$$

$$\Delta \bar{\Phi}_2 + \bar{\omega}^2 \bar{\Phi}_2 = 0, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Omega_2 \tag{2.2}$$

где

$$\chi = D/(\rho gh^4), \quad \gamma = 1 - \bar{d} \bar{\omega}^2, \quad \tau = \bar{\omega}^2/(1 - \bar{d})$$

Решение уравнения (2.1) ищем в виде (всюду далее суммирование ведется от $m = 1$ до $m = 3$)

$$\bar{\Phi}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi_0(\bar{x}, \bar{y}) + \sum \Psi_m(\bar{x}, \bar{y}) \tag{2.3}$$

Функции $\Psi_m(\bar{x}, \bar{y})$ ($m = 1, 2, 3$) удовлетворяют уравнению

$$\Delta \Psi_m + \mu_m^2 \Psi_m = 0 \tag{2.4}$$

а величины μ_m – корни уравнения (подробнее см. [3, 4])

$$\chi \mu^6 + \gamma \mu^2 - \tau = 0 \tag{2.5}$$

Вещественный положительный корень этого уравнения обозначим μ_1 , а два комплексно-сопряженных корня, расположенных в первом и четвертом квадрантах комплексной плоскости μ – соответственно μ_2 и μ_3 .

Функция $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y})$ является в безразмерной форме решением задачи о воздействии периодического давления на безграничную упругую пластину в приближении мелкой воды.

Далее предположим для простоты, что давление $P(x, y)$ в (1.1) зависит только от величины $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, где x_0 и y_0 – координаты центра области приложения внешнего давления, т.е.

$$P(x, y) = a \operatorname{argf}(R)$$

Здесь a – множитель, имеющий размерность длины, а функция $f(R)$ – безразмерная.

Функция $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y})$ имеет вид (подробнее см. [2])

$$\Phi_0 = -\frac{i\bar{a}\bar{\omega}}{2} \left[\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{f}(k) J_0(k\bar{R}) dk}{Q(k)[\bar{\omega}^2 - S(k)]} - \frac{i\tilde{f}(\mu_1) J_0(\mu_1\bar{R})}{Q(\mu_1)S'(\mu_1)} \right]$$

$$\tilde{f}(k) = 2\pi \int_0^{\infty} \bar{R} f(\bar{R}) J_0(k\bar{R}) d\bar{R}, \quad Q(k) = \bar{d}k + \frac{1}{k(1-\bar{d})}$$

$$S(k) = \frac{k(1+\chi k^4)}{Q(k)}, \quad S'(\mu_1) = \left. \frac{dS}{dk} \right|_{k=\mu_1}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{h}$$

где $\tilde{f}(k)$ – двойное преобразование Фурье функции $f(\bar{R})$, $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, п.в. означает интеграл в смысле главного значения, μ_1 – вещественный положительный корень уравнения $\bar{\omega}^2 = S(k)$, которое совпадает с уравнением (2.5).

Уравнения (2.2), (2.4) являются уравнениями Гельмгольца. Соответствующая функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; k)$ удовлетворяет в общем случае уравнению

$$\Delta G + k^2 G = 2\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r} = (\bar{x}, \bar{y}), \quad \mathbf{r}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Требование выполнения условия излучения в дальнем поле приводит к представлению

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; k) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(kR_1), \quad R_1 = \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2} \quad (2.6)$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. В области Ω_1 функция Грина может быть использована в виде (2.6), а также может быть выражена через другие цилиндрические функции [3].

Используя теорему Грина в области Ω_1 , получим

$$\varepsilon_1 \Psi_m(\mathbf{r}) + \frac{1}{\pi} \int_S \left[\Psi_m(\mathbf{r}_1) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \mu_m) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \mu_m) \frac{\partial \Psi_m}{\partial n}(\mathbf{r}_1) \right] ds = 0, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Omega_1 \quad (2.7)$$

где $\varepsilon_1 = 2$, если точка \mathbf{r} внутри S , $\varepsilon_1 = 1$, если \mathbf{r} на гладком участке S , и $\varepsilon_1 = 1/2$, если \mathbf{r} – угловая точка прямоугольной области Ω_1 .

Аналогичное интегральное соотношение имеет место в области Ω_2

$$\varepsilon_2 \Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \int_S \left[\Phi_2(\mathbf{r}_1) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \bar{\omega}) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \bar{\omega}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\mathbf{r}_1) \right] ds, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Omega_2 \quad (2.8)$$

где $\varepsilon_2 = 2$, если точка \mathbf{r} вне контура S , $\varepsilon_2 = 1$, если \mathbf{r} на гладком участке S , и $\varepsilon_2 = 3/2$ в угловых точках.

Для решения исходной задачи необходимо определить значения $\Psi_m(\mathbf{r})$ и $\partial \Psi_m(\mathbf{r})/\partial n$ ($m = 1, 2, 3$) на контуре S . Используя точки \mathbf{r} , принадлежащие S , получим систему четырех интегральных уравнений, первые три из которых являются уравнениями (2.7) соответственно при $m = 1, 2, 3$, а четвертое уравнение, согласно соотношениям (1.5), (2.3), (2.8), имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_2[\Phi_0(\mathbf{r}) + \sum \Psi_m(\mathbf{r})] = \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \bar{\omega})[\Phi_0(\mathbf{r}_1) + \sum \Psi_m(\mathbf{r}_1)] - \right. \\ \left. - (1 - \bar{d})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \bar{\omega}) \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(\mathbf{r}_1) + \sum \frac{\partial \Psi_m}{\partial n}(\mathbf{r}_1) \right] \right\} ds, \quad \bar{x}, \bar{y} \in S \end{aligned} \quad (2.9)$$

Два дополнительных дифференциальных уравнения получаются из условий свободного края (1.6), которые можно записать согласно соотношениям (1.3), (2.3), (2.4) в виде

$$\sum \mu_m^2 \left(\mu_m^2 \Psi_m + \nu_1 \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial s^2} \right) = \Delta \left(\nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial s^2} - \Delta \Phi_0 \right) \quad (2.10)$$

$$\sum \mu_m^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu_m^2 \Psi_m - \nu_1 \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial s^2} \right) = -\Delta \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta \Phi_0 + \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial s^2} \right), \quad \bar{x}, \bar{y} \in S \quad (2.11)$$

В угловых точках согласно условию (1.7) должно выполняться равенство

$$\sum \mu_m^2 \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \Delta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, \quad \bar{x} = \pm \bar{B}, \quad y = \pm \bar{L}$$

После определения граничных значений Ψ_m и $\partial \Psi_m / \partial n$ ($m = 1, 2, 3$) на контуре S можно вычислить нормальный прогиб пластины

$$\bar{W} = \frac{i}{\bar{\omega}} \left(\sum \mu_m^2 \Psi_m - \Delta \Phi_0 \right), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Omega_1$$

Используя асимптотическое представление функции Грина (2.6) для области Ω_2 в дальнем поле

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \bar{\omega}) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2\bar{\omega}\bar{r}}} \exp \left\{ i \left[\bar{\omega}(\bar{r} - \bar{x}_1 \cos \theta - \bar{y}_1 \sin \theta) + \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad \bar{r} \rightarrow \infty$$

можно выразить амплитуды поверхностных волн вдали от пластины через функцию Кочина

$$H(\bar{\omega}, \theta) = \int_S \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial n} + i \bar{\omega} \bar{\Phi}_2 (n_x \cos \theta + n_y \sin \theta) \right] \exp[-i \bar{\omega}(\bar{x}_1 \cos \theta + \bar{y}_1 \sin \theta)] ds$$

Имеем

$$|\bar{\zeta}| = \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{8\pi\bar{r}}} \frac{|H(\bar{\omega}, \theta)|}{1 - \bar{d}}, \quad \theta = \text{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

где n_x и n_y – компоненты вектора внешней нормали к контуру S в точке \bar{x}_1, \bar{y}_1 .

При численном решении уравнений (2.7), (2.9)–(2.11) участки контура S , параллельные осям x и y , разбиваются соответственно на N_x и N_y равных отрезков. Численный метод решения изложен в [4], альтернативный метод можно найти в [3].

3. Волноводные свойства упругой полосы. Было показано [5], что для плавающей на мелководье упругой платформы в виде полосы конечной ширины и бесконечной длины возможно существование волноводной собственной моды, которая распространяется

вдоль полосы и экспоненциально затухает вдали от нее. Необходимое условие существования волноводной моды – наличие ненулевой осадки платформы.

Изложим кратко решение задачи об определении характеристик волн, захваченных упругой полосой ширины $2B$. Следует найти нетривиальное решение однородных уравнений для соответствующих потенциалов скоростей, которые вытекают из соотношений (1.2)–(1.4)

$$D\Delta^3\Phi_1 + (g\rho - \rho_1 h_1 \omega^2)\Delta\Phi_1 + \frac{\rho\omega^2}{h-d}\Phi_1 = 0, \quad |x| \leq B, \quad |y| < \infty \quad (3.1)$$

$$\Delta\Phi_2 + k_0^2\Phi_2 = 0, \quad |x| > B, \quad |y| < \infty \quad (3.2)$$

с условиями свободного края, вытекающими из (1.3), (1.6),

$$\Delta^2\Phi_1 = v_1\Delta\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}, \quad \Delta^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = -v_1\Delta\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial x\partial y^2}, \quad x = \pm B, \quad |y| < \infty \quad (3.3)$$

и условиями сопряжения, аналогичными (1.5),

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \frac{h}{h-d}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}, \quad x = \pm B, \quad |y| < \infty \quad (3.4)$$

Решение уравнений (3.1), (3.2) ищем в виде

$$\Phi_j(x, y) = \Psi_j(x)\exp(i\lambda y), \quad j = 1, 2 \quad (3.5)$$

Для волн, захваченных упругой полосой, требуется выполнение следующего условия в дальнем поле:

$$\Psi_2 \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

согласно которому решение для $\Psi_2(x)$ при учете соотношений (3.2) и (3.5) имеет вид

$$\Psi_2 = \begin{cases} \alpha_+ \exp(-\beta x), & x > B \\ \alpha_- \exp(\beta x), & x < -B \end{cases}; \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$$

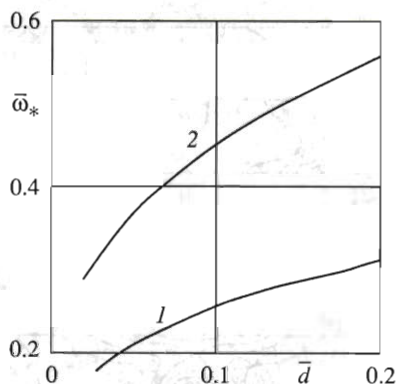
где α_{\pm} – неизвестные постоянные. Значение β должно быть вещественным и положительным, следовательно, $\lambda > k_0$. Это неравенство означает, что собственные колебания упругой полосы не могут возбуждаться набегающими поверхностными волнами, так как для них всегда $\lambda \leq k_0$ (см., например [6]).

Как было показано [5], собственные колебания упругой полосы симметричны относительно оси y . В силу этого условия решение для функции $\Psi_1(x)$ можно записать в виде

$$\Psi_1(x) = \sum c_m \operatorname{ch}(\sigma_m x), \quad |x| \leq B \quad (3.6)$$

где c_m – неизвестные постоянные, а значения σ_m определяются из уравнения, аналогичного (2.5) после подстановки (3.5) с учетом выражения (3.6) в уравнение (3.1). Из граничных условий (3.3) и условий сопряжения (3.4) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений четвертого порядка для определения α_{\pm} , c_1 , c_2 , c_3 . Собственными частотами упругой полосы называются те значения ω , при которых для заданного значения λ определитель этой системы обращается в нуль.

4. Результаты расчетов. Представленные ниже численные результаты получены для двух вариантов набора параметров упругой пластины:



Фиг. 1

1) лабораторная модель плавучего аэропорта [4]

$$D = 1.093 \cdot 10^3 \text{ кг м}^2/\text{с}^2, \quad h = 25 \text{ см}, \quad 2L = 15 \text{ м}, \quad 2B = 3 \text{ м}, \quad d = 1.25 \text{ см}, \\ \chi = 28.52, \quad \bar{d} = 0.05$$

2) проект реального плавучего аэропорта [3]

$$D = 1.96 \cdot 10^{11} \text{ кг м}^2/\text{с}^2, \quad h = 50 \text{ м}, \quad 2L = 5 \text{ км}, \quad 2B = 1 \text{ км}, \quad d = 5 \text{ м}, \\ \chi = 3.197, \quad \bar{d} = 0.1$$

В обоих случаях плотность жидкости $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона пластины $\nu = 0.3$.

Вначале представим характеристики собственных частот для упругой полосы ширины $2B$ и значений D, h, d , указанных для обоих вариантов. Как было показано [5], волноводная мода существует только при $d > 0$ и в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_*$. При этом соответствующее волновое число λ лишь очень незначительно превышает значение ω/\sqrt{gh} (см. [5], рис. 1). Значения ω_* таковы: 1.312 с^{-1} ($\bar{\omega}_* = 0.209$) для варианта 1 и 0.199 с^{-1} ($\bar{\omega}_* = 0.450$) для варианта 2. Относительное превышение λ над значением ω/\sqrt{gh} составило не более 2%.

На фиг. 1 показаны зависимости $\bar{\omega}_*$ от безразмерного значения осадки упругой полосы \bar{d} для параметров D, h, B , соответствующих варианту 1 (кривая 1) и варианту 2 (кривая 2). С увеличением осадки диапазон частот, при которых существует волноводная мода, монотонно расширяется.

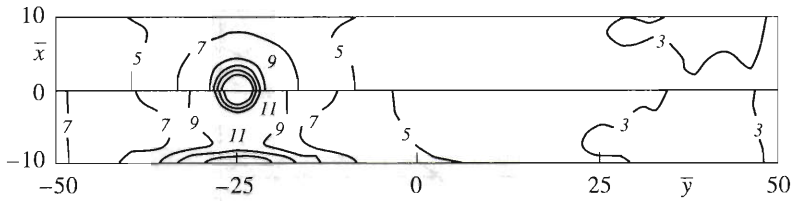
Действие периодического давления на прямоугольную пластину исследовано для функции

$$f(R) = [1 - (R/l)^2], \quad R < l; \quad f(R) = 0, \quad R > l; \quad \tilde{f}(k) = 4\pi J_2(kl)/l^2$$

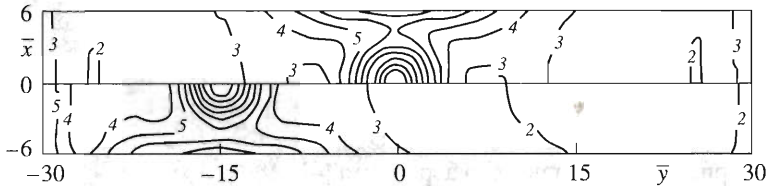
Во всех приведенных ниже расчетах радиус области приложения давления равен $l = 2h$ и центр этой области расположен на средней линии пластины ($x_0 = 0$).

На фиг. 2 представлены изолинии амплитуд нормальных прогибов пластины для варианта 2 и $\bar{y}_0 = -25$ при $\bar{\omega} = 0.3$ (верхняя половина фиг. 2) и $\bar{\omega} = 0.6$ (нижняя половина).

Выведены изолинии функции $10^2 \times |W/a$ с уровнями от 1 до 15 с шагом 2. Значения $|W/a$



Фиг. 2



Фиг. 3

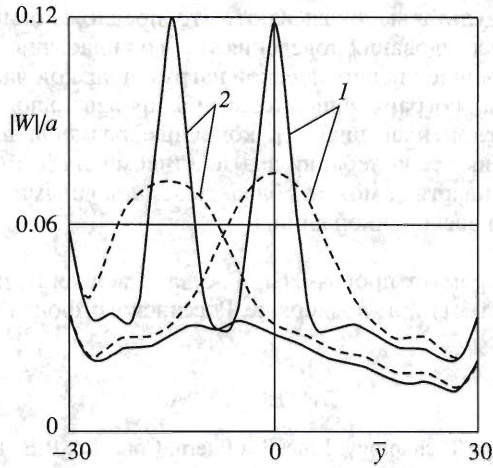
в центре области приложения давления равны 0.354 и 0.285 соответственно при $\bar{\omega} = 0.3$ и $\bar{\omega} = 0.6$. Расчеты выполнены при $N_x = 6$, $N_y = 30$, дальнейшее увеличение этих параметров практически не меняет результаты. Эти же значения N_x и N_y использованы ниже во всех расчетах, выполненных для отношения сторон прямоугольной пластины $L/B = 5$.

Влияние места приложения внешнего давления на поведение пластины показано на фиг. 3 для варианта 1 при $\bar{\omega} = 0.4$. Центр области приложения давления находится в точке $y_0 = 0$ и $\bar{y}_0 = -15$ соответственно для верхней и нижней половины фигуры. Выведены изолинии функции $10^2 \times |W|/a$ с уровнями от 2 до 11 с шагом 1.

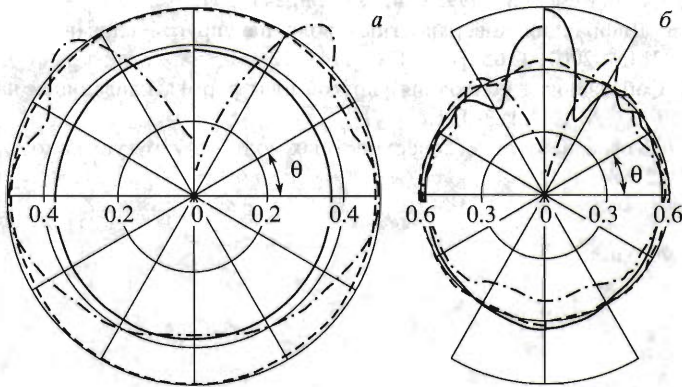
На фиг. 4 представлена более детальная информация о поведении $|W|/a$ на средней линии $x = 0$ (сплошные кривые) и на краю пластины $|x| = B$ (штриховые кривые) при $y_0 = 0$ (кривые 1) и $\bar{y}_0 = -15$ (кривые 2).

Из анализа результатов, представленных на фиг. 2–4, видно, что при $\bar{\omega} > \bar{\omega}_*$ области значительных прогибов пластины соответствуют не только центральной части области приложения давления, но и краям пластины. При этом картина распределения амплитуд колебаний прогибов в окрестности области приложения давления вплоть до ближайших краев пластины мало зависит от значения y_0 . Вблизи торцов пластины амплитуды ее прогибов практически не меняются в поперечном направлении.

Поведение поверхностных волн вдали от упругой пластины удобно описывать с помощью диаграммы направленности. На фиг. 5 в полярных координатах представлена зависимость $Q = |H(\bar{\omega}, \theta)|/\sqrt{8\pi\bar{\omega}}$ от угла θ , при этом левые половины фиг. 5, а, б соответствуют пластинам с отношением сторон $L/B = 5$, а правые половины – более длинным пластинам с $L/B = 7$. Для $L/B = 7$ расчеты выполнены при $N_x = 6$, $N_y = 42$. Левая часть фиг. 5, а построена для варианта 1 при $\bar{y}_0 = -15$, а правая часть – при тех же значениях D, h, d, B , но для $L = 21$ м и $\bar{y}_0 = -27$. Сплошные кривые на фиг. 5, а соответствуют частоте $\bar{\omega} = 0.1$, штриховые – $\bar{\omega} = \bar{\omega}_* = 0.209$, штрихпунктирные – $\bar{\omega} = 0.4$. Левая часть фиг. 5, б соответствует варианту 2 при $\bar{y}_0 = -25$, а правая часть – тем же значениям $D, h,$



Фиг. 4



Фиг. 5

d, B , но для $L = 7$ км и $\bar{y}_0 = -45$. Сплошные кривые на фиг. 5, б соответствуют частоте $\bar{\omega} = 0.3$, штриховые – $\bar{\omega} = \bar{\omega}_* = 0.45$, штрихпунктирные – $\bar{\omega} = 0.6$.

Видно, что формы диаграмм направленности для частот $\bar{\omega} < \bar{\omega}_*$ и $\bar{\omega} > \bar{\omega}_*$ различаются. При достаточно низком предельном значении волноводной моды (фиг. 5, а) диаграмма направленности при $\bar{\omega} \leq \bar{\omega}_*$ близка к окружности. Это означает, что амплитуды поверхностных волн практически равны во всех направлениях. Однако с увеличением $\bar{\omega}_*$ в более значительной мере проявляется волноводный характер пластины: поверхностные волны наибольшей амплитуды распространяются в направлении длинной стороны пластины, т.е. вдоль оси y . Этот эффект усиливается с увеличением удлинения пластины (см. фиг. 5, б).

При колебаниях внешнего давления с частотой $\bar{\omega} > \bar{\omega}_*$ наблюдается уменьшение рассеяния поверхностных волн в направлении вдоль пластины, особенно в направлении ее дальнего конца по отношению к области давления.

Представленные результаты показывают, что предложенный метод является эффективным способом исследования поведения упругой пластины, плавающей на мелководье, под действием внешней периодической нагрузки низкой частоты. Этот метод может быть использован для ограниченной пластины произвольной формы. Как было ранее показано для круглой пластины [2], конечные размеры пластины существенно влияют на характеристики ее колебаний под действием периодической нагрузки. Удлиненная прямоугольная пластина может обладать волноводными свойствами, как и плавающая упругая полоса бесконечной длины.

Работа выполнена в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-902.2003.1) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00739).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hydroelasticity in Marine Technology: Proc. 3rd Intern. Conf. Ed. R.E. Taylor. Oxford, UK, 2003. 328 p.
2. Стурова И.В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 75–86.
3. Ertekin R.C., Kim J.W. Hydroelastic response of a floating mat-type structure in oblique, shallow-water waves // J. Ship Research. 1999. V. 43. № 4. P. 241–254.
4. Стурова И.В. Дифракция поверхностных волн на упругой плавающей на мелководье платформе // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 114–122.
5. Ткачева Л.А. Собственные колебания упругой платформы, плавающей на мелководье // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 1. С. 173–181.
6. Стурова И.В. Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 62–68.

Новосибирск
e-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
30.III.2004