

УДК 533.6.011

© 2006 г. С. А. Таковицкий

К ПОСТРОЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассматривается задача минимизации волнового сопротивления осесимметричных головных частей в сверхзвуковом потоке невязкого нетеплопроводного совершенного газа. Предлагается процедура построения экстремальной образующей на основе последовательного решения однопараметрических задач в рамках допущений о локальной связи между геометрическими параметрами и газодинамическими функциями. Заданным условиям в набегающем потоке соответствует единая образующая, из которой выделяются участки, формирующие головные части произвольного удлинения. Сопоставление полученных головных частей и головных частей, оптимальных в точной постановке задачи, показывает близость аэродинамических характеристик при заметном различии геометрических параметров.

Одно из направлений повышения аэродинамических характеристик сверхзвуковых летательных аппаратов различного назначения заключается в построении осесимметричных головных частей, имеющих низкие значения волнового сопротивления. Первые важные результаты получены при решении задачи на основе модели, использующей для связи геометрических и газодинамических переменных формулу Ньютона [1]. Установлен ряд особенностей оптимальных форм, которые в значительной мере определили направления дальнейших исследований. Экспериментальное подтверждение нашел вывод о представлении образующей близких к оптимальным тел степенной зависимостью радиуса от продольной координаты [2]. Систематические исследования в рамках уравнений Эйлера показали, что оптимальные головные части имеют затупление по торцу, который является участком краевого экстремума [3].

В модели Ньютона образующие оптимальных головных частей всевозможных удлинений представляют собой элементы единой образующей. Ее построение может быть проведено с использованием разбиения на отрезки, для которых выполняется последовательный выбор пространственного положения. Первый, вертикальный отрезок начинается на оси симметрии. Прямая, замыкающая к нему ломаная при увеличении числа отрезков сходится к гладкой образующей, для которой выполняется известное необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера).

Данная процедура применима и в случае, когда течение описывается системой уравнений Эйлера. Задача минимизации функции многих переменных сводится к последовательности однопараметрических задач на основе допущения о локальной связи между геометрическими параметрами и газодинамическими функциями. Положение каждого отрезка образующей выбирается без учета положения отрезков ниже по потоку. Координаты переднего конца отрезка определяются формой начального участка образующей и поэтому фиксированы. Свободный параметр – угол наклона отрезка по отношению к оси симметрии. Построенная таким образом образующая, которую в дальнейшем будем называть локально экстремальной, задает форму носовых частей для любых значений удлинения. В отличие от модели, использующей формулу Ньютона, в точной постановке геометрические параметры образующей зависят от параметров набегающего потока.

1. Построение образующей головной части заданного удлинения. Требуется найти минимум волнового сопротивления осесимметричной головной части как функции многих переменных: $X(r_1, r_2, \dots, r_n) = \min$. Образующая головной части состоит из n отрезков. Геометрическими параметрами служат радиусы r_i ($i = 1, \dots, n$) поперечных сечений

с координатами x_i . В процессе оптимизации значения x_i не изменяются. Радиус r_1 определяет размер переднего торца ($x_1 = 0$). Радиус основания r_n фиксирован и соответствует заданному значению удлинения $\lambda = 0.5x_n/r_n$ ($x_n = L$, L – длина головной части).

Задача решается методом прямой оптимизации, в основе которого лежит представление целевой функции в виде квадратичной формы. Аппроксимирующие зависимости определяются в рамках локального анализа распределения аэродинамической нагрузки с линеаризацией связи между газодинамическими и геометрическими параметрами. Ранее этот метод использовался для построения близких к оптимальным тел, обтекаемых с присоединенным скачком уплотнения [4].

При моделировании течения около головной части выделялись две расчетные области. Общая граница областей лежала в поперечном сечении, удаленном от вершины на расстояние, равное диаметру переднего торца. В окрестности торца расчетная сетка строилась в сферической системе координат, и уравнения Эйлера интегрировались по схеме Годунова с использованием установления по времени [3]. Узлы сгущались к излому контура. На поверхности головной части размещалось 207 узлов. В сверхзвуковой области течения расчет проводился в цилиндрической системе координат маршевым методом [5]. Уравнения движения интегрировались по схеме Мак-Кормака. Параметры течения в начальном поперечном сечении определялись из решения для первой расчетной области. В обоих случаях разрыв газодинамических переменных на головном скачке уплотнения выделялся строго. В направлении от поверхности головной части к скачку уплотнения число узлов сетки равнялось 84.

Оптимизационные исследования проведены для головных частей с удлинением $\lambda = 1, 2, 4, 8$ при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 2, 4$. Отношение удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$. Число геометрических параметров изменялось от $n = 55$ для коротких головных частей до $n = 480$ для головных частей большого удлинения. Вблизи переднего торца узловые поперечные сечения сгущались по закону

$$x_i = 2r_1(s_1^{i-1} - 1)/(s_1^{25} - 1), \quad i = 1, \dots, 26; \quad s_1 = 1.1$$

Для остальных поперечных сечений принято:

$$x_i = x_{26} + (x_n - x_{26})(s_2^{i-26} - 1)/(s_2^{n-26} - 1), \quad i = 27, \dots, n; \quad s_2 = 1.015$$

Коэффициент сопротивления определялся как сила сопротивления, отнесенная к скоростному напору и площади основания головной части.

Прямой метод оптимизации продемонстрировал достаточно высокую скорость сходимости. Процесс оптимизации состоял из четырех циклов, в каждом из которых число прямых расчетов изменялось от 6 до 12. Таким образом, для определения оптимальной головной части заданного удлинения требовалось перебрать не более 50 возможных конфигураций. Полученные результаты согласуются с данными систематических исследований [3] как по значениям минимального коэффициента сопротивления, так и по параметрам, определяющим форму головной части.

По значениям коэффициента сопротивления относительное различие не превысило 0.5%. Для диаметра переднего торца расхождение составило от 2 до 13%. При $M_\infty = 2$ угол ϕ_1 наклона образующей у переднего торца увеличивается с ростом удлинения от 57.4° (при $\lambda = 1$) до 59.2° (при $\lambda = 8$). Обратная зависимость наблюдается при $M_\infty = 4$. При увеличении удлинения угол ϕ_1 уменьшается от 58.4° до 54.8° . Ранее для угла ϕ_1 были получены значения 55° при $M_\infty = 2$ и 56° при $M_\infty = 4$ [3].

2. Построение локально экстремальной образующей. Значительно упростить процесс оптимизации позволяет допущение о локальной связи геометрических параметров и газодинамических функций. При этом строится единая образующая для головных частей разного удлинения.

Рассмотрим образующую, начинающуюся на оси симметрии ($x_0 = 0, r_0 = 0$) и уходящую в бесконечность. Образующая состоит из отрезков, первый из которых определяет передний торец. Для удобства длина этого отрезка принята за характерный линейный размер: $r_1 = 1, x_1 = 0$. Распределение отрезков в продольном направлении фиксировано: $x_i = \text{const}$. Независимыми геометрическими параметрами служат ординаты r_i концов отрезков.

Образующая определяет форму осесимметричной головной части для любого значения удлинения $\lambda_n = 0.5x_n/r_n$ (с учетом возможного изменения продольного распределения отрезков). Сопротивление головной части представляется суммой:

$$X_n = \pi \sum_{i=1}^n (p_i - p_\infty)(r_i^2 - r_{i-1}^2)$$

где p_∞ – давление в набегающем потоке, p_i – давление на участке поверхности головной части, соответствующем отрезку образующей с номером i .

В точной постановке от величины параметра r_i зависит распределение давления для всех отрезков с номерами, большими $i - 1$. Условиями оптимальности формы головной части являются равенства нулю производных сопротивления X_n по переменным r_i ($i = 1, \dots, n - 1$). В случае локальных моделей течения параметр r_i определяет давление только для соседних отрезков p_i и p_{i+1} . Соответственно изменяются условия оптимальности. Необходимо обеспечить равенство нулю производной сопротивления $X_{i+1} - X_{i-1}$ для пары смежных отрезков по параметру r_i . Каждое из условий при $i = 1, \dots, n - 1$ связывает тройку параметров r_{i-1}, r_i, r_{i+1} . Поскольку r_0 и r_1 заданы, оптимизационный процесс сводится к последовательному определению оптимальных значений r_2, \dots, r_n через решение однопараметрических задач.

Преимущества, получаемые при использовании локальных моделей, могут быть реализованы и в точной постановке задачи. Для локально экстремальной образующей (ЛЭО) условия оптимальности выполняются в предположении о локальности связи между газодинамическими параметрами и формой головной части.

Если от параметра r_1 зависит сопротивление X_2 лишь для первых двух отрезков, то необходимое условие экстремума представляется равенством

$$2(p_1 - p_\infty)r_1 - 2(p_2 - p_\infty)r_1 + (\partial p_2 / \partial r_1)(r_2^2 - r_1^2) = 0$$

Здесь $\partial p_2 / \partial r_1$ – производная давления для второго отрезка по параметру r_1 , p_1 – не зависящее от r_1 среднее давление на торце. В результате численных расчетов при разных r_2 определяется значение, соответствующее ЛЭО.

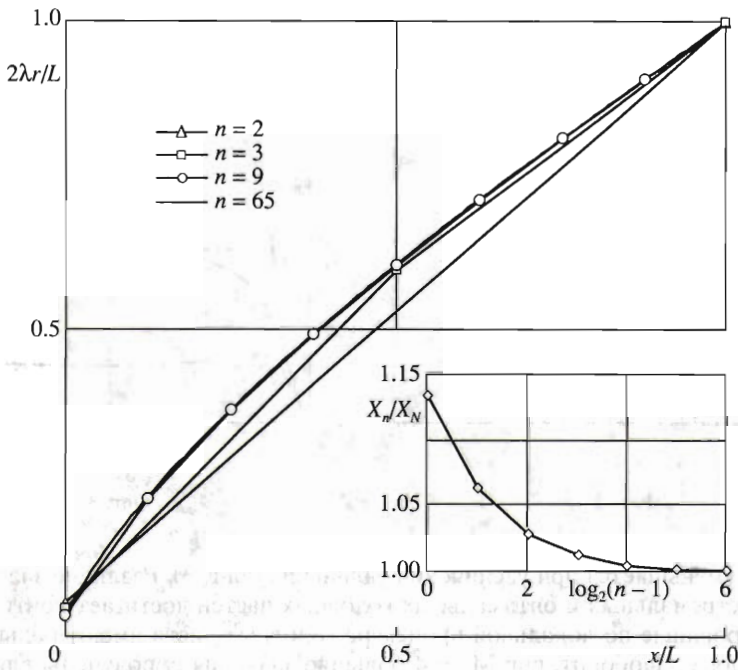
Для пар отрезков с номерами i и $i + 1$ ($i > 1$) имеем условие

$$2(p_i - p_\infty)r_i + (\partial p_i / \partial r_i)(r_i^2 - r_{i-1}^2) - 2(p_{i+1} - p_\infty)r_i + (\partial p_{i+1} / \partial r_i)(r_{i+1}^2 - r_i^2) = 0$$

из которого при известных значениях r_{i-1}, r_i можно численно найти экстремальное значение r_{i+1} . Таким образом, получена процедура последовательного построения отрезков, определяющих ЛЭО. На каждом шаге находится решение задачи с одним независимым переменным. Допущение о локальности устранило необходимость решения сложной задачи поиска минимума функции многих переменных.

3. Анализ результатов исследования. В рамках локальных моделей течения ЛЭО совпадает с оптимальной образующей. Рассмотрим построение образующей для случая, когда поверхностное давление определяется формулой Ньютона. Коэффициент давления, соответствующий отрезку с номером i , можно представить в виде

$$C_{pi} = 2r_i^2 / (1 + r_i^2); \quad r_i' = (r_i - r_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}), \quad i > 0$$



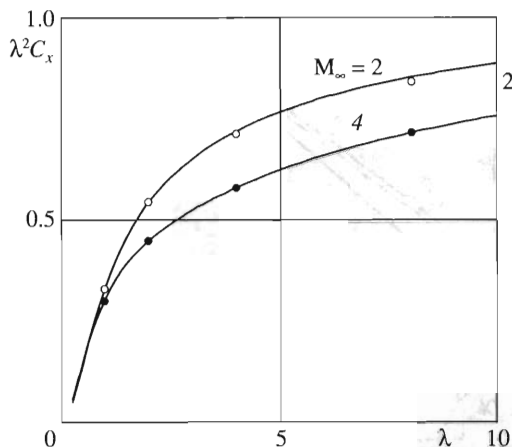
Фиг. 1

Примем равномерное продольное распределение отрезков $x_i = (i - 1)\Delta x$ ($i > 0$). Условия оптимальности аналогичны условию Вейерштрасса – Эрдмана в угловой точке.

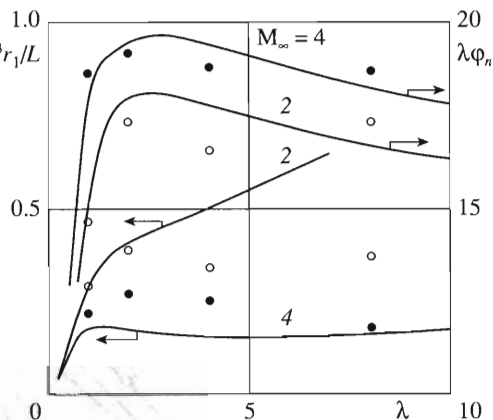
При $\Delta x \rightarrow 0$ ломаная образующая сходится к образующей с примыкающим к торцу гладким участком, что соответствует точному решению (ньютоновская головная часть). Число отрезков, составляющих образующую, менялось от $n = 2$ до $n = 65$. В случае $n = 2$ оптимальное тело – усеченный конус. При увеличении n диаметр переднего торца и сопротивление X_n соответствующей головной части уменьшаются. На фиг. 1 для удлинения $\lambda = 2$ представлены четыре ломаные образующие, соответствующие разным Δx ; здесь же показано отношение X_n к сопротивлению X_N головной части с гладкой образующей в зависимости от n . По сравнению с ньютоновской головной частью головная часть с ломаной образующей из 5 отрезков имеет сопротивление на 2.9% больше. При числе отрезков $n = 65$ различие составляет всего 0.07%.

В точной постановке течение описывается системой уравнений Эйлера, и зависимость поверхностного распределения давления от геометрических параметров устанавливается в численном расчете. ЛЭО определены для условий набегающего потока, соответствующих числу Маха $M_\infty = 2, 4$. Построение продолжалось до $\lambda = 10$. Результаты сопоставлены с данными для головных частей, имеющих минимальное сопротивление при заданном удлинении (разд. 1). На фиг. 2 и 3 сплошные линии представляют зависимости для ЛЭО. Маркерами отмечены значения, соответствующие оптимальным головным частям.

Коэффициент сопротивления C_x головной части уменьшается с ростом удлинения и числа Маха, исключая случай малых удлинений (фиг. 2). Максимальное относительное превышение сопротивления головной части с ЛЭО над сопротивлением оптимальной головной части составляет 1.6% при $M_\infty = 2$ и 1.1% при $M_\infty = 4$. Близость аэродинамических характеристик достигается при значительном различии параметров, определяющих форму головных частей. Диаметр переднего торца, отнесенный к диаметру основа-



Фиг. 2



Фиг. 3

ния, быстро уменьшается при увеличении удлинения (фиг. 3). Различие значений r_1 для локально экстремальных и оптимальных головных частей достигает почти 100%. При $M_\infty = 2$ построенные по локальной процедуре головные части имеют больший размер переднего торца. Наоборот, при $M_\infty = 4$ большие значения r_1 получены для оптимальных головных частей. Угол ϕ_1 наклона образующей около переднего торца слабо зависит от числа Маха. Локальный анализ дает значение $\phi_1 = 57.6^\circ$. При увеличении удлинения ЛЭО становится более полой. Угол наклона образующей ϕ_n в месте стыковки с основанием уменьшается с ростом λ (фиг. 3). По данному геометрическому параметру расхождение для локально экстремальных и оптимальных головных частей не превышает 10%.

Автор благодарит К.С. Пьянкова за предоставленную возможность использования программы расчета течения в окрестности переднего торца тела вращения и А.Н. Крайко за обсуждение результатов исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00691).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
2. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
3. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
4. Таковицкий С.А. Остроконечные двухпараметрические степенные головные части минимального волнового сопротивления // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 829–835.
5. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Тр. ЦАГИ. 1997. Вып. 2590. С. 24–32.