

УДК 533.6.011

© 2006 г. А. И. Рылов

## ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ НУЛЕВЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА УСКОРЕНИЯ В ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Рассматривается дозвуковое установившееся обтекание тел конечных размеров неограниченным и равномерным на бесконечности потоком. Изучается структура, образуемая стационарными точками (точками обращения в нуль обеих компонент вектора ускорения), выходящими из них линиями нулевых значений компонент вектора ускорения и обтекаемым телом. Показано, что каждая из указанных линий должна выйти на поверхность обтекаемого тела. Этот факт, в частности, позволяет оценить общее число линий нулевой кривизны линий тока, выходящих из стационарных точек, через число нулей кривизны линий тока на обтекаемом теле, включая точки ветвления разделительной линии тока. С целью уточнения указанного числа нулей рассмотрено известное решение для окрестностей точек ветвления линии тока и исследована особенность течения в окрестностях точек разрыва кривизны обтекаемой стенки. Для иллюстрации сказанного уточнены некоторые свойства обтекания выпуклых тел, а также построен и рассмотрен достаточно широкий класс так называемых выпукло-вогнутых тел с нулевым углом заострения задней кромки. Показано, что на этом теле имеется не более четырех нулей кривизны линий тока; как следствие, в поле течения, в том числе и на бесконечности, нет точек ветвления изобар и изоклин, стационарной точкой является лишь бесконечно удаленная точка и, самое важное, при обтекании данных тел значения циркуляции и подъемной силы не могут обращаться в нуль. Используемый математический аппарат основан на построенных ранее автором уравнениях газовой динамики для некоторых комбинаций компонент вектора ускорения.

**1. Линии нулевых значений компонент вектора ускорения.** Рассмотрим дозвуковое плоское потенциальное обтекание конечного тела неограниченным и горизонтальным на бесконечности потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Данное обтекание характеризуется наличием разделительной линии тока с двумя лежащими на теле точками ветвления  $l$  и  $d$ . Разделительная линия приходит слева с бесконечности на тело в переднюю точку ветвления  $l$ , в которой она делится на две ветви, каждая из которых примыкает к обтекаемому телу. В задней точке ветвления  $d$  указанные ветви вновь соединяются в одну разделительную линию тока, уходящую вправо на бесконечность.

На теле имеется не более одной острой кромки с углом  $0 \leq \sigma < \frac{\pi}{2}$ , и в случае наличия таковой она, согласно условию Жуковского, является задней точкой ветвления  $d$ , а передняя точка ветвления  $l$  в любом случае является и точкой торможения. Иных точек ветвления линий тока, кроме  $l$  и  $d$ , в рассматриваемом течении нет и, следовательно, вне обтекаемого тела нет и точек торможения.

На плоскости потенциала  $(\varphi, \psi)$  исследуемое течение описывается уравнениями [1, 2]

$$kz_{\varphi} + \theta_{\psi} = 0, \quad z_{\psi} - \theta_{\varphi} = 0 \quad \left( z = \int \frac{\rho dq}{q}, \quad k = \frac{1 - M^2}{\rho^2} \right) \quad (1.1)$$

Здесь и далее  $\varphi, \psi$  – потенциал и функция тока,  $\rho$  – плотность,  $q, \theta$  – модуль и угол наклона вектора скорости,  $M$  – число Маха.

Основные геометрические объекты исследования – линии нулевых значений продольной (вдоль линии тока)  $F$  и поперечной (по левой нормали к линии тока)  $G$  компонент вектора ускорения и стационарные точки  $F = G = 0$ . Функции  $F$  и  $G$  следующим образом связаны с производными из системы (1.1):

$$F = z_\varphi q^3 \rho^{-1}, \quad G = \theta_\varphi q^3$$

чем во многом и определяется выбор системы (1.1) в качестве исходной. Отметим также, что с точностью до положительного множителя функция  $G$  совпадает с кривизной линии тока.

Для изучения линий  $F = 0$  и  $G = 0$  наиболее подходящими представляются уравнения [3]

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \quad U_\psi + V_\varphi = 0 \tag{1.2}$$

с новыми зависимыми переменными  $U$  и  $V$

$$U = \frac{z_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2}, \quad V = \frac{\theta_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2} \tag{1.3}$$

Напомним, что система (1.2) получается дифференцированием системы (1.1) по  $\varphi$  и последующим преобразованием полученной неоднородной системы в однородную с применением алгоритма [4], основанного на использовании двухпараметрических решений. В рассматриваемом случае таковым будет спиральное течение – суперпозиция течения от источника и течения типа потенциальный вихрь [5, 6]. Впрочем, связь системы (1.2) со спиральным течением видна уже из того факта, что очевидное решение  $U = C_1 = \text{const}, V = C_2 = \text{const}$  как раз и дает спиральное течение.

Отметим также, что в сверхзвуковой области условия совместности системы (1.2) могут быть записаны в виде так называемых транспортных уравнений [2, 3].

Однородная система (1.2) при  $M < 1$  эллиптическая, и поэтому [4] в рассматриваемом течении функции  $U$  и  $V$  обладают свойством монотонности: каждая из этих функций монотонна вдоль линии уровня другой функции.

Здесь уместно уточнить определение линии уровня.

*Определение.* Под линией уровня функции  $U$  (функции  $V$ ) понимается линия  $U = \text{const}$  ( $V = \text{const}$ ), для продолжения которой при прохождении точки ветвления для определенности выбирается левая ветвь.

Для демонстрации свойств монотонности функций  $U$  и  $V$  выпишем выражения для производных  $U_l$  и  $V_l$ , вычисляемых вдоль линий уровня функций  $V$  и  $U$  соответственно [3]:

$$V = \text{const}, \quad U_l = V_n \frac{\rho(1 - M^2 \sin^2 \chi)}{1 - M^2} \tag{1.4}$$

$$U = \text{const}, \quad V_l = -U_n \frac{1 - M^2 \sin^2 \delta}{\rho}$$

где  $\chi$  и  $\delta$  – углы, образуемые линиями уровня с вектором скорости.

Производные  $V_n$  и  $U_n$ , вычисляемые по левым нормальям к линиям  $V = \text{const}$  и  $U = \text{const}$  соответственно в области эллиптичности могут обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Действительно, в противном случае, например при выполнении равенства  $V_n = 0$  вдоль некоторого отрезка линии  $V = \text{const}$ , на этом отрезке должны равняться ну-

лю все четыре производные  $U_\varphi, \dots, V_\psi$ , что возможно, лишь если во всей области имеет место спиральное течение. Из сказанного, из определения линии уровня и из соотношений (1.4) следует, что вдоль линии уровня  $V = \text{const}$  ( $U = \text{const}$ ) производная  $U_t$  (производная  $V_t$ ) не меняет свой знак. Но необходимо подчеркнуть, что в отличие от изобар, изоклин и других линий уровня, анализ которых лежит в основе метода линий уровня [4, 7–11], в области рассматриваемого дозвукового течения при наличии стационарных точек  $F = G = 0$  существует бесконечное множество замкнутых линий уровня  $U = \text{const} \neq 0$  и  $V = \text{const} \neq 0$ , проходящих через указанные точки (это точки неоднозначности функций  $U$  и  $V$ ). При круговом обходе стационарной точки функции  $U$  и  $V$  пробегают все значения в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Более детально этот факт будет продемонстрирован ниже при рассмотрении стационарных точек. Отметим, что проведенный ранее [3, 11] анализ линий  $U = \text{const}$  и  $V = \text{const}$  был ограничен лишь областями однозначного определения функций  $U$  и  $V$ .

Среди множества линий уровня функций  $U$  и  $V$  особое место занимают линии  $U = F = 0$  и  $V = G = 0$ . В первую очередь это связано с тем, что вдоль каждой из этих линий монотонна не комбинация компонент вектора ускорения, а лишь одна из компонент, взятая с некоторым знакопостоянным множителем. Физический смысл этих линий достаточно ясен; более того, в экспериментах с визуализацией линий тока линия  $V = G = 0$  хорошо просматривается как геометрическое место точек перегиба линий тока.

Как оказывается, анализ линий нулевых значений компонент вектора ускорения наиболее эффективен, если начальными точками ветвей указанных линий являются стационарные точки  $F = G = 0$ . В связи с этим рассмотрим некоторые достаточно очевидные свойства указанных точек.

**2. Стационарные точки.** В рассматриваемом дозвуковом течении вне границ обтекаемого тела существуют два типа стационарных точек: это точки ветвления изобар и изоклин, расположенные на конечном расстоянии от тела, и бесконечно удаленная точка.

*Точка ветвления изобар и изоклин.* Эта точка достаточно подробно обсуждалась (см. [5] и др. руководства). Здесь же в первую очередь представляет интерес зависимость числа линий  $F = 0$  и  $G = 0$ , выходящих из точки ветвления, от числа изобар и изоклин, выходящих из этой же точки.

Воспользуемся методом “замороженных” параметров, для чего в бесконечно малой окрестности исследуемой точки ветвления, в которой параметрам приписан нулевой индекс, преобразуем исходную систему (1.1) в систему типа Коши–Римана

$$S_\varphi + T_\psi = 0, \quad S_\psi - T_\varphi = 0 \quad (2.1)$$

где

$$S = \sqrt{k_0}(z - z_0), \quad T = \theta - \theta_0, \quad \phi = \sqrt{k_0}\psi$$

Представляющее интерес периодическое решение в точке ветвления в локальной полярной системе координат  $(R, \omega)$  на плоскости  $(\varphi, \psi)$  имеет вид

$$S = AR^n \cos(n\omega - t_*), \quad T = AR^n \sin(n\omega - t_*) \quad (2.2)$$

где

$$R = \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2}, \quad \omega = \arctg \frac{\psi - \psi_0}{\varphi - \varphi_0} \quad (2.3)$$

$A$  и  $t_*$  – некоторые постоянные,  $n$  – целое положительное число.

Дифференцируя по  $\varphi$  каждое из соотношений (2.2), получаем

$$\sqrt{k_0}z_\varphi = -nAR^{n-1} \cos((n-1)\omega - t_*), \quad \theta_\varphi = nAR^{n-1} \sin((n-1)\omega - t_*) \quad (2.4)$$

Следовательно, при  $n = 1$  исследуемая точка – регулярная, через нее проходят одна изобара и одна изоклина, и в которой исключено одновременное обращение в нуль обеих компонент вектора ускорения. При  $n \geq 2$  исследуемая точка является точкой ветвления, в которой, согласно уточненному выше определению линии уровня, имеет место соприкосновение (не пересечение)  $n$  изобар и  $n$  изоклин или, что то же самое, из этой точки выходит четное число  $2n$  изобар и  $2n$  изоклин, а также четное число  $N = 2(n - 1)$  линий  $F = 0$  и такое же число линий  $G = 0$ . Определенное таким образом четное число  $N(N \geq 2)$  будем называть показателем стационарной точки.

При круговом обходе малой окрестности точки ветвления знаки продольного ускорения  $F$  на линиях  $G = 0$  строго чередуются, так же как и знаки функции  $G$  строго чередуются на линиях  $F = 0$ .

Подставляя выражения (2.4) для  $z_\varphi$  и  $\theta_\varphi$  в соотношения (1.3) при  $N \geq 2$ , получаем описание бесконечного множества замкнутых линий уровня  $U = \text{const} \neq 0$  и  $V = \text{const} \neq 0$ . В частности, при  $N = 2$  на физической плоскости в малой окрестности стационарной точки имеем два бесконечных семейства эллипсов  $U = \text{const} \neq 0$ , касающихся в стационарной точке линии  $U = 0$ , и два семейства эллипсов  $V = \text{const} \neq 0$ , касающихся в этой же точке линии  $V = 0$ . Подчеркнем, что наличие замкнутых линий уровня в окрестности стационарной точки не противоречит свойству монотонности. Так, например, при соответствующем выборе обхода эллипса  $U = \text{const} \neq 0$  при подходе к стационарной точке функция  $V$  монотонно возрастает до  $+\infty$ , а после ее прохождения также монотонно возрастает от  $-\infty$ .

*Бесконечно удаленная точка (БУТ).* Свойства дозвуковых течений на большом удалении от тела и, в частности, асимптотики изучались и обсуждались в ряде работ [1, 2, 10, 12–15], хотя многие вопросы до сих пор открыты. Здесь же задача состоит лишь в нахождении числа линий нулевых значений компонент вектора ускорения, выходящих из БУТ, либо ограничений, налагаемых на это число. Сразу отметим, что из периодичности решения следует, что искомые числа четные.

Исследование структуры линий уровня в окрестности БУТ существенно зависит от того, равны ли нулю циркуляция  $\Gamma$  и линейно связанное с ним значение подъемной силы  $Y$ . При  $\Gamma \neq 0$  уходящая с тела в поток разделительная линия тока  $\psi = 0$  является линией разрыва потенциала  $\varphi$  и в то же время на плоскости потенциала ( $\varphi, \psi$ ) данная ветвь линии тока  $\psi = 0$  будет линией разрыва газодинамических параметров, поэтому использование системы типа Коши–Римана (2.1) для анализа БУТ при  $\Gamma \neq 0$  требует дополнительного обоснования. Но как раз при  $\Gamma \neq 0$  течение в окрестности БУТ изучено наиболее полно. Так, на большом удалении от тела выражения для  $\varphi, q$  и  $\theta$  с точностью до малых более высокого порядка имеют вид [1, 2, 13–15]

$$\varphi = q_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x} \sqrt{1 - M_\infty^2}\right) \tag{2.5}$$

$$\frac{q - q_\infty}{y} = \frac{q_\infty \theta}{x} = \frac{\Gamma \sqrt{1 - M_\infty^2}}{2\pi(x^2 + (1 - M_\infty^2)y^2)}$$

Анализ этих соотношений приводит к следующему выводу: при дозвуковом обтекании тел с ненулевой циркуляцией из БУТ выходят по две изобары и изоклины и по четыре линии  $F = 0$  и  $G = 0$ .

При  $\Gamma = 0$  соотношения (2.5) теряют силу. Но при  $\Gamma = 0$  разделительная линия тока  $\psi = 0$  за телом уже не будет линией разрыва потенциала. Следовательно, при  $\Gamma = Y = 0$  нет формальных препятствий для использования системы (2.1) для анализа структуры линий уровня в окрестности БУТ. Представляющее интерес периодическое решение в этом случае выглядит так:

$$\sqrt{k_\infty}(z - z_\infty) = AR^{-n} \cos(n\omega - t_*), \quad \theta = AR^{-n} \sin(n\omega - t_*) \quad (2.6)$$

где

$$R = \sqrt{\varphi^2 + \phi^2}, \quad \omega = \operatorname{arctg} \frac{\phi}{\varphi}$$

А и  $t_*$  – некоторые постоянные,  $n$  – целое положительное число.

Определение всех трех параметров  $A$ ,  $t_*$  и  $n$  составляет задачу построения асимптотик в окрестности БУТ; здесь же представляют интерес лишь некоторые соотношения, которым удовлетворяет параметр  $n$ .

Периодическому решению, при котором из БУТ выходит большее число линий уровня, чем при  $\Gamma \neq 0$ , отвечает  $n \geq 2$ . Анализ решения (2.6) показывает, что из БУТ выходят  $2n$  изобары и  $2n$  изоклины и по  $N_0 = 2(n+1)$  линий нулевых значений компонент вектора ускорения; при этом при круговом обходе БУТ знаки функции  $F$  на линиях  $G = 0$  строго чередуются, как и знаки функции  $G$  на линиях  $F = 0$ .

Как видим, и при  $\Gamma = 0$ , и при  $\Gamma \neq 0$  число выходящих из БУТ линий нулевых значений каждой из компонент вектора ускорения больше числа выходящих из БУТ изобар и изоклин, в то время как для точки ветвления, расположенной на конечном расстоянии от тела, ситуация прямо противоположная.

И, наконец, приведем итоговые соотношения для чисел  $n$  и показателей  $N_0$  в БУТ:

$$\Gamma \neq 0: n = 1, \quad N_0 = 4; \quad \Gamma = 0: n \geq 2, \quad N_0 \geq 6$$

*Замечание.* Выше отмечено, что при  $\Gamma \neq 0$  течение в окрестности БУТ изучено лучше, чем при  $\Gamma = 0$ . Это связано с тем, что при  $\Gamma \neq 0$  первые члены соответствующих рядов удается выразить через  $\Gamma$ , что и приводит к решению (2.5). При  $\Gamma = 0$  первые существенные члены рядов в общем случае неизвестны, за исключением частного случая симметричного обтекания так называемого “одновершинного” тела и, в частности, выпуклого тела, при этом единственная искомая постоянная выражается через площадь, ограниченную линией тока и ее горизонтальной асимптотой при удалении указанной линии тока вверх на бесконечность [10]. В то же время ряды, описывающие течение в окрестности БУТ при  $\Gamma = 0$  существенно проще, чем при  $\Gamma \neq 0$ , что видно из следующих соотношений для потенциала  $\varphi$  [1, 12–15]:

$$\Gamma \neq 0: \varphi = q_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm}(\mu) \left( \frac{\ln r}{r} \right)^n \frac{1}{r^m}$$

$$\Gamma = 0: \varphi = q_\infty x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m(\mu)}{r^m}$$

Здесь  $x$  и  $y$  – декартовы координаты,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\mu = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,  $f_{nm}(\mu)$  и  $g_m(\mu)$  – подлежащие определению периодические функции.

Очевидно, что ряд, отвечающий  $\Gamma = 0$ , точнее, первый ненулевой член с индексом  $m \geq 1$ , так же как и решение (2.6), может быть использован для определения числа характерных линий уровня, выходящих из БУТ.

**3. Стационарные точки и линии нулевых значений компонент вектора ускорения.** Из предыдущего раздела следует, что в рассматриваемом дозвуковом обтекании существует не менее одной стационарной точки. Это БУТ с показателем  $N_0 \geq 4$  и, возможно,  $j$  ( $j \geq 1$ ), точек ветвления изобар и изоклин, каждая с показателем  $N_i \geq 2$  ( $i = 1, \dots, j$ ; при  $j = 0$  точек ветвления изобар и изоклин нет). Стационарные точки, выходящие из них линии нулевых значений компонент вектора ускорения и обтекаемое тело связаны следующей теоремой.

**Теорема 1.** Каждая линия нулевого значения любой из компонент вектора ускорения, выходящая из стационарной точки, во-первых, вне указанной точки обладает свойством знакопостоянства другой компоненты вектора ускорения, и во-вторых, эта линия приходит на поверхность обтекаемого тела. Иными словами, на поверхность тела приходит  $N_s = N_0 + N_1 + \dots + N_j$  линий  $G = 0$  и такое же число линий  $F = 0$ .

**Доказательство.** Из стационарной точки выходит четное число  $N$  линий нулевого значения кривизны линий тока

$$G = V = 0 \tag{3.1}$$

При круговом обходе стационарной точки линии (3.1), при движении вдоль которых от стационарной точки функция  $U$  растет, чередуются с линиями (3.1), вдоль которых  $U$  убывает. Для определенности рассмотрим линию (3.1), вдоль которой  $U$  убывает. Согласно соотношениям (1.3), функция  $U$  на этой линии упрощается до выражения  $U = (kz_\phi)^{-1}$ . Следовательно, произведение  $kz_\phi$ , равное нулю в стационарной точке, при движении от стационарной точки вдоль линии (3.1) возрастает. Далее, в рассматриваемом дозвуковом течении вне поверхности тела исключены точки ветвления линий тока и точки торможения и, следовательно, вне обтекаемого тела функции  $z$  и  $\theta$  по модулю ограничены, поэтому вне обтекаемого тела производные  $z_\phi$  и  $\theta_\phi$  по модулю также ограничены [1] (хотя на обтекаемом теле производные  $z_\phi$  и  $\theta_\phi$  могут достигать значений  $\pm\infty$ ). Иными словами, вдоль линии (3.1)  $0 < z_\phi < \infty$ ,  $0 < F < \infty$ , что и завершает доказательство первой части теоремы.

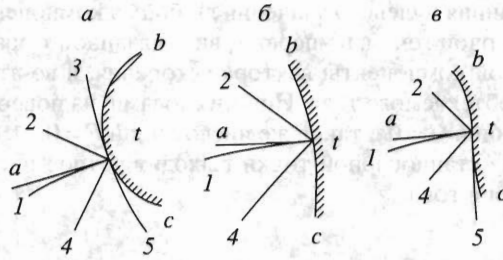
Монотонное возрастание произведения  $kz_\phi$  вдоль линии (3.1) исключает ее самопересечение. Неравенство  $z_\phi < \infty$  исключает ситуацию, при которой при движении от стационарной точки вдоль линии (3.1) функция  $U$  сначала убывает от  $+\infty$  до 0, а затем – от 0 до  $-\infty$ , что, в свою очередь, исключает достижение линией (3.1) какой-либо стационарной точки, в том числе и исходной. И, наконец, предположим, что линия (3.1) обрывается в некоторой внутренней точке течения  $w$ , и рассмотрим окружность сколь угодно малого радиуса с центром в точке  $w$  и целиком лежащую в области течения. Простой анализ поведения функции  $G$  на этой окружности показывает, что на ней существует четное число точек  $G = 0$ , т.е. кроме точки пересечения окружности с линией (3.1) существует как минимум еще одна точка  $G = 0$ . Устремляя радиус окружности к нулю приходим к опровержению сделанного предположения.

Итак, линия (3.1) не может самопересечься и образовать замкнутую петлю, не может войти в любую, в том числе и в исходную стационарную точку и, наконец, не может оборваться внутри области течения. Следовательно, эта линия должна прийти на поверхность обтекаемого тела. Все сказанное автоматически переносится и на другие линии  $G = V = 0$  и  $F = U = 0$ , выходящие из всех стационарных точек, что и завершает доказательство.

**Замечания.** 1°. Можно надеяться, что свойства линий  $F = 0$  и  $G = 0$  и связанных с ними стационарных точек позволят расширить возможности топологических методов в гидродинамике [16] и в первую очередь метода линий уровня, основы которого были заложены в работе [7].

2°. Число  $N_j$  (число  $N_g$ ) нулей функции  $F$  (функции  $G$ ) на обтекаемом теле и введенное в теореме число  $N_s$  связаны неравенствами  $N_j \geq N_s$ ,  $N_g \geq N_s$ . Данные знаки неравенств связаны с тем, что на теле могут существовать точки  $F = 0$  ( $G = 0$ ), являющиеся точками локального экстремума функции  $F$  (функции  $G$ ). Кроме того, на теле могут существовать точки, соединяемые подковообразными линиями  $F = U = 0$  или  $G = V = 0$ , не содержащими стационарные точки  $F = G = 0$ .

При исследовании обтекания ряда известных и вновь построенных тел неравенство  $N_g \geq N_s$  позволяет получить ограничение суммарного показателя  $N_s$  стационарных точек и (или) количества  $j$  стационарных точек, либо найти точное значение  $N_s$ . Но для этого необходимо определить число нулей кривизны линий тока на обтекаемом теле и, что более важно, число линий  $G = V = 0$ , связывающих тело со стационарными точками.



Фиг. 1

**4. Нули кривизны линий тока на обтекаемом теле.** Перейдем к определению числа нулей функции  $G$  на теле с использованием лишь локальных свойств течений в окрестностях точек ветвления разделительной линии тока и, в следующем разделе, разрыва кривизны.

Рассмотрим отрезок  $at$  разделительной линии тока, приходящий на гладкий, без изломов, участок образующей обтекаемого тела (фиг. 1). В бесконечно малой окрестности точки  $t$ , являющейся точкой торможения, течение описывается уравнениями для несжимаемой жидкости (число Маха  $M$  в уравнениях (1.1) равно нулю). С точностью до несущественного постоянного множителя это течение описывается следующими соотношениями в полярной системе координат  $(R, \omega)$  с центром в точке  $t$  [17]:

$$q = R, \quad \theta = -\omega + \pi \quad (4.1)$$

Здесь  $R$  – расстояние от точки  $t$ ,  $\omega$  – полярный угол, начальное значение которого для определенности выбрано так, что  $\omega = \pi$  отвечает отрезку  $at$ .

Иными словами, в малой окрестности точки торможения изобарам отвечают полуокружности, а изоклинам – прямые, выходящие из точки  $t$ . Далее, опуская выкладки, связанные с получением из соотношений (4.1) уравнений линий  $F = 0$  и  $G = 0$ , приведем основные результаты.

Итак, в бесконечно малой окрестности точки  $t$  отрезок  $at$  образует два прямых угла с отрезками  $tb$  и  $tc$ . Биссектрисы этих углов – линии  $F = 0$ , обозначенные на фиг. 1 цифрами 2 и 4, при этом на линии 2 (линии 4) кривизна линий тока положительна (отрицательна). В свою очередь линии  $G = 0$  касаются в точке  $t$  линий тока  $at$ ,  $tb$  и  $tc$ . Независимо от формы тела в окрестности точки торможения линия  $G = 0$ , касающаяся разделительной линии тока, выходит в область течения. На фиг. 1 эта линия обозначена цифрой 1. Возможность выхода из точки  $t$  других линий  $G = 0$  зависит от кривизны отрезков линий тока  $tb$  и  $tc$ . В связи с этим рассмотрим три случая.

*Случай 1.* Отрезки  $tb$  и  $tc$  выпуклостью обращены в сторону течения (фиг. 1, а). Значение функции  $G$  на отрезке  $tb$  отрицательно, а на линии 2 оно положительно. Следовательно, между линиями 2 и  $tb$  в область течения по касательной к  $tb$  выходит линия  $G = 0$ , обозначенная цифрой 3. Также по касательной к линии  $tc$  в область течения выходит линия  $G = 0$ , обозначенная цифрой 5. Окончательно, в рассматриваемом случае из точки торможения  $t$  в область течения выходят три линии  $G = 0$ , обозначенные на фиг. 1, а цифрами 1, 3 и 5.

*Случай 2.* Отрезки  $tb$  и  $tc$  обращены вогнутостью в сторону течения (фиг. 1, б). В этом случае на отрезке  $tb$  и на линии 2 функция  $G$  имеет один знак. То же самое имеет место на отрезках  $tc$  и 4. Следовательно, в этом случае в область течения выходит лишь одна линия  $G = 0$  (линия 1 фиг. 1, б).

*Случай 3.* Это промежуточный случай, когда по одну сторону от точки торможения стенка выпуклая, а по другую – вогнутая. Не вдаваясь в обсуждение возможности реали-

зации такой ситуации, когда точка ветвления разделительной линии тока совпадает с точкой перегиба или, более того, с точкой разрыва знака кривизны образующей тела, лишь отметим, что если такая ситуация реализуется, то в этом случае из указанной точки в область течения выходят две линии  $G = 0$ , как, например, линии 1 и 5 на фиг. 1, в.

Если задняя точка ветвления  $d$ , из которой с тела уходит разделительная линия тока, расположена на гладком, без изломов, участке тела, то для нее справедливо все сказанное выше о взаимном расположении линий тока и линий  $G = 0$  и  $F = 0$  в окрестности передней точки ветвления  $t$ . Если задняя точка ветвления является точкой заострения с ненулевым углом, то в этом случае она также будет точкой торможения и, как показывает анализ, зависимость числа выходящих из нее линий  $G = 0$  от кривизны примыкающих участков тела такая же, как и при отсутствии заострения. В этом случае из точки схода выходят три линии  $G = 0$ , если оба примыкающих участка выпуклостью обращены в сторону течения; лишь одна линия  $G = 0$ , если оба участка – вогнутые по отношению к потоку; две линии  $G = 0$ , если один из участков выпуклый, а другой вогнутый.

**5. Особенность течения в окрестности точки разрыва кривизны стенки обтекаемого тела.** Рассмотрим два случая.

*Случай, когда точка с разрыва кривизны не является ни точкой ветвления линии тока, ни точкой излома стенки.* В этом случае газодинамические параметры  $q$  и  $\theta$  в окрестности точки  $c$  непрерывны, скорость  $q$  дозвуковая и отлична от нуля, но кривизна стенки по обе стороны от точки  $c$  имеет различные, но конечные значения.

Параметры  $q$  и  $\theta$  непрерывны в окрестности точки  $c$ , поэтому может быть выбрана такая окрестность точки  $c$ , в каждой точке которой  $q$  и  $\theta$  сколь угодно мало отличаются от  $q_c$  и  $\theta_c$ , поэтому можем считать, что в указанной окрестности кривизна линий тока с точностью до положительного постоянного множителя совпадает с функцией  $G$ . Диапазон изменения функции  $G$  в рассматриваемой окрестности определяется скачком кривизны стенки в точке  $c$ , т.е. является конечной величиной. Для нахождения асимптотических выражений для функций  $G$  и  $F$  в полярной системе координат в качестве исходной целесообразно использовать систему (1.2), считая множитель  $k$  постоянным и равным  $k_c$  в окрестности точки  $c$ . При указанных предположениях, вводя модифицированную функцию тока  $\phi = \sqrt{k_c} \psi$ , систему (1.2) преобразуем в следующую систему типа Коши–Римана:

$$(\sqrt{k_c} U)_\phi - V_\phi = 0, \quad (\sqrt{k_c} U)_\phi + V_\phi = 0$$

С использованием соотношений (1.3) последнюю систему представим в виде

$$\left( \frac{\sqrt{k_c} z_\phi}{k_c z_\phi^2 + \theta_\phi^2} \right)_\phi - \left( \frac{\theta_\phi}{k_c z_\phi^2 + \theta_\phi^2} \right)_\phi = 0, \quad \left( \frac{\sqrt{k_c} z_\phi}{k_c z_\phi^2 + \theta_\phi^2} \right)_\phi + \left( \frac{\theta_\phi}{k_c z_\phi^2 + \theta_\phi^2} \right)_\phi = 0$$

В свою очередь данная система эквивалентна еще одной системе типа Коши–Римана

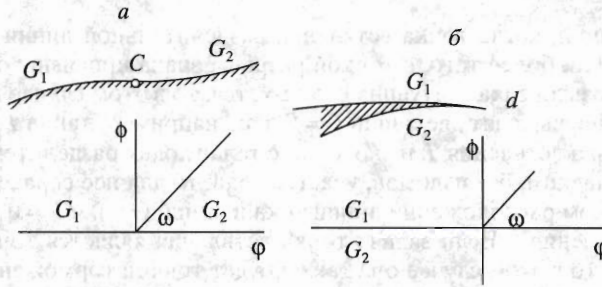
$$(\sqrt{k_c} z_\phi)_\phi + (\theta_\phi)_\phi = 0, \quad (\sqrt{k_c} z_\phi)_\phi - (\theta_\phi)_\phi = 0$$

которая, если принять во внимание выражения  $F = z_\phi q^3 \rho^{-1}$  и  $G = \theta_\phi q^3$  из разд. 2, равносильна системе

$$(F \sqrt{1 - M_c^2})_\phi + G_\phi = 0, \quad (F \sqrt{1 - M_c^2})_\phi - G_\phi = 0$$

Наконец, полученную систему перепишем в более удобной полярной системе координат, связанной с точкой  $c$ ,

$$(F \sqrt{1 - M_c^2})_R + \frac{1}{R} G_\omega = 0, \quad \frac{1}{R} (F \sqrt{1 - M_c^2})_\omega - G_R = 0 \tag{5.1}$$



Фиг. 2

Выражения для  $R$  и  $\omega$  даются формулами, аналогичными формулам (2.3) при замене в них нулевого индекса индексом  $c$ .

Для исследования особенности в окрестности точки  $c$  сформулируем и рассмотрим модельную задачу 1.

*Задача 1.* На стенке в окрестности точки  $c$  течение осуществляется слева направо, (фиг. 2,  $a$ ). Левее точки  $c$  поперечная компонента вектора ускорения постоянна и равна  $G_1$ , правее этой точки  $G = G_2$ ,  $G_1 \neq G_2$ . Требуется найти функции  $F = F(R, \omega)$ ,  $G = G(R, \omega)$ .

Для решения задачи рассмотрим приведенную на фиг. 2,  $a$  верхнюю полуплоскость плоскости  $(\varphi, \phi)$ , на которой  $G = G_1$  при  $\omega = \pi$ ,  $G = G_2$  при  $\omega = 0$ . Для данных граничных условий решение системы (5.1) имеет вид

$$G = G_2 - \frac{G_2 - G_1}{\pi} \omega, \quad F \sqrt{1 - M_c^2} = \frac{G_2 - G_1}{\pi} \ln R$$

Иными словами, если при движении вдоль линии тока в точке  $c$  скачок  $G_2 - G_1$  положительный (отрицательный), то при подходе к точке  $c$  по любому направлению продольное ускорение неограниченно возрастает (убывает) по логарифмическому закону. На физической плоскости в окрестности точки  $c$  линии  $F = \text{const}$  образуют семейство полуэллипсов, а линии  $G = \text{const}$  — пучок прямых, причем лишь при разных знаках значений  $G_1$  и  $G_2$  одна из линий этого пучка будет линией  $G = 0$ .

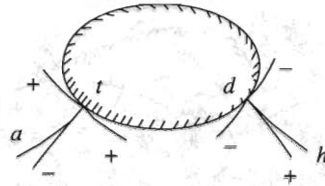
*Случай, когда разрыв кривизны (но не угла наклона вектора скорости) имеет место в задней точке ветвления  $d$ .* Этому случаю отвечает модельная задача 2.

*Задача 2.* В точке  $d$  на фиг. 2,  $b$  имеет место касание верхней и нижней образующих, значения кривизны обеих образующих в точке  $d$  конечны и не равны друг другу. В точке  $d$  линии тока, отвечающие верхней и нижней образующим, соединяются в раздельную линию тока, уходящую вправо. Модельная задача в этом случае формулируется так:  $G = G_1$  при  $\omega = \pi$ ,  $G = G_2$  при  $\omega = -\pi$ . Решение системы (5.1) выглядит следующим образом:

$$G = \frac{G_1 + G_2}{2} - \frac{G_2 - G_1}{2\pi} \omega, \quad F \sqrt{1 - M_d^2} = \frac{G_2 - G_1}{2\pi} \ln R$$

Из постановки задачи видно, что  $G_1 > G_2$ . Следовательно, при подходе к точке  $d$  по любому направлению функция  $F$  неограниченно возрастает по логарифмическому закону. И, наконец, если  $G_1$  и  $G_2$  имеют один знак, например отрицательный, как на фиг. 2,  $b$ , то в этом случае из точки  $d$  не выходит ни одной линии  $G = 0$ .

*Случай, когда точка  $c$  на фиг. 2,  $a$  является точкой перегиба, но не является точкой разрыва кривизны.* В этом случае задача определения числа выходящих из точки  $c$  линий  $G = 0$  и знака ускорения в этой точке существенно усложняется и ее решение в общем случае может зависеть от всей картины течения. Практически все сказанное переносится и на точку  $d$  на фиг. 2,  $b$ .



Фиг. 3

**6. Обтекание тел с малым и с минимально возможным числом нулей функции  $G$ .** Согласно теореме 1, на теле может быть не менее четырех нулей функции  $G$ , причем существование тел в случае четырех нулей функции  $G$  заранее не очевидно. Пример такого тела будет рассмотрен в конце раздела. Пока же остановимся на обтекании выпуклых тел.

*Теорема 2.* При обтекании гладких выпуклых тел (фиг. 3), с двумя точками ветвления разделительной линии тока  $t$  и  $d$  при ненулевых значениях циркуляции  $\Gamma$  существуют лишь две стационарные точки с суммарным показателем  $N_s = 6$ . Это БУТ с показателем  $N_0 = 4$  и одна точка ветвления изобар и изоклин с показателем  $N_1 = 2$ . При стремлении циркуляции к нулю точка ветвления удаляется от тела и при нулевой циркуляции обе стационарные точки сливаются в одну БУТ с показателем  $N_0 = 6$ .

*Доказательство.* На фиг. 3  $at$  и  $dh$  – отрезки разделительной линии тока. С поверхности рассматриваемого тела в область течения выходят шесть линий  $G = 0$ : по три из точек  $t$  и  $d$ . Знаки плюс и минус указывают на знак функции  $F$  вдоль соответствующей линии  $G = 0$ . При ненулевой циркуляции решение в окрестности БУТ описывается соотношениями (2.5), при этом из БУТ на тело приходят четыре линии  $G = 0$  (показатель  $N_0 = 4$ ), на двух из них  $F > 0$ , на двух других  $F < 0$ . Следовательно, на конечном расстоянии от тела существует лишь одна стационарная точка (точка ветвления изобар и изоклин) с показателем  $N_1 = 2$ , из которой на тело приходят еще две линии  $G = 0$ , вдоль одной из них  $F > 0$ , вдоль другой  $F < 0$ .

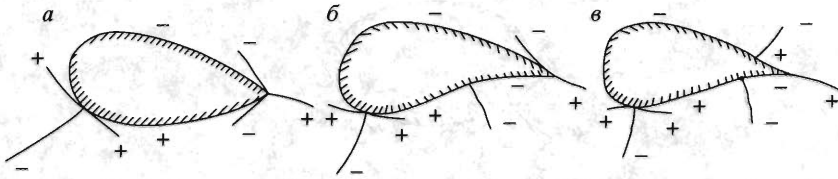
Далее, как отмечено выше, при нулевой циркуляции показатель БУТ  $N_0 \geq 6$ . Но на рассматриваемое тело могут прийти лишь шесть линий  $G = 0$ . Следовательно, в исследуемом случае обтекания при нулевой циркуляции  $N_0 = 6$  точек ветвления на конечном расстоянии от тела нет, что и завершает доказательство.

*Следствие.* При обтекании выпуклого тела с нулевой циркуляцией шесть линий  $G = 0$ , приходящих на тело с бесконечности, делят область течения на шесть подобластей знакопостоянства кривизны линий тока.

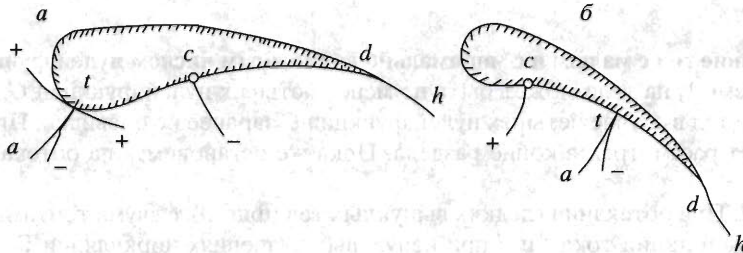
*Замечания.* 1°. Теорема 2 существенно обобщает результаты работ [9, 10], в которых для симметричного обтекания выпуклых тел доказано отсутствие точек ветвления изобар и изоклин, а значит, и стационарных точек вне БУТ.

2°. Результаты теоремы переносятся и на ряд других тел, с поверхностями которых в область течения также выходят по шесть линий  $G = 0$ . Примеры таких тел приведены на фиг. 4. Здесь так же, как и на фиг. 3, знаки плюс и минус на линиях  $G = 0$  отвечают знаку функции  $F$ , а такие же знаки на участках тела отвечают знаку функции  $G$ . Отметим также, что известный профиль Жуковского относится к классу тел, приведенных на фиг. 4,  $в$ .

*Обтекание тел с минимально возможным числом нулей функции  $G$ .* Из рассмотренных выше свойств БУТ видно, что из БУТ на обтекаемое тело приходит не менее четырех линий  $G = 0$ , причем показатель  $N_0 = 4$  отвечает обтеканию с ненулевой циркуляцией. Как уже отмечено, существование тел с числом нулей функции  $G$ , равным четырем, заранее не очевидно. Тем не менее, как оказывается, с использованием результатов двух предыдущих разделов, такое тело может быть построено.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим следующее выпукло-вогнутое тело с нулевым углом заострения в задней точке ветвления (фиг. 5, а, б). Здесь  $at$  и  $dh$  – отрезки разделительной линии тока. Участок  $cd$  образующей тела вогнутый, остальная часть тела выпуклая. Значения кривизны по обе стороны точки  $c$  конечны, отличны от нуля и имеют разные знаки. В точке  $d$  имеет место касание верхней и нижней образующих, значения кривизны которых в точке  $d$  конечны, отличны друг от друга и от нуля и имеют один знак. На фиг. 5 этот знак, для определенности, взят отрицательным, что непринципиально.

Из исследованных выше свойств точек ветвления разделительной линии тока и разрыва кривизны следует, что с поверхности рассматриваемого тела в область течения линии  $G = 0$  выходят лишь из точки торможения  $t$  и из точки  $c$  разрыва кривизны. Отрезки линий  $G = 0$ , связанные с точками  $t$  и  $c$ , показаны на фиг. 5, а, б, при этом знаки плюс и минус указывают на знак функции  $F$ . Анализ указанных линий  $G = 0$  приводит к следующим утверждениям.

**Теорема 3.** Безотрывное обтекание выпукло-вогнутого тела с несовпадающими точками ветвления разделительной линии тока  $t$  и  $d$  (фиг. 5), возможно лишь при расположении передней точки ветвления  $t$  на выпуклой части образующей, как на фиг. 5, а, при этом обтекание характеризуется ненулевыми значениями циркуляции и подъемной силы и наличием лишь одной стационарной точки, а именно стационарной БУТ с  $N_0 = 4$ . Как следствие, четыре линии  $G = 0$ , приходящие на тело с бесконечности, делят всю область течения на четыре подобласти знакопостоянства кривизны линий тока.

**Доказательство.** Расположение точки  $t$  на вогнутом участке, как на фиг. 5, б, так же как и в точке разрыва кривизны  $c$ , приводит к тому, что число нулей функции  $G$  равно двум, что противоречит неравенству  $N_0 \geq 4$ . Следовательно, точка  $t$  находится на выпуклом участке, как на фиг. 5, а, при этом число нулей функции  $G$  равно четырем. Следовательно, значения циркуляции и подъемной силы отличны от нуля, из БУТ на тело приходят четыре линии  $G = 0$  (показатель БУТ  $N_0 = 4$ ) и других стационарных точек, отличных от БУТ, нет.

**Замечания.** 1°. Попытки доказательства теоремы 3 с помощью лишь анализа изобар и изоклин не приводят к успеху, что еще раз говорит о новых возможностях, которые дает анализ линий нулевых значений компонент вектора ускорения.

2°. Теорема 3 приводит к ряду парадоксов. Остановимся на одном из них. С этой целью в рамках течений несжимаемой жидкости рассмотрим обтекание несимметричного профиля Жуковского [18–20]. Для этого профиля число нулей функции  $G$  равно шести, что видно из фиг. 4, в. Устремляя к нулю параметр, отвечающий за толщину профиля Жуковского, получаем профиль,

сколь угодно близкий к дуге окружности. Выбором угла атаки для каждого из этих профилей может быть получено обтекание с нулевыми значениями циркуляции и подъемной силы и с показателем БУТ  $N_0 = 6$ , при котором шесть линий  $G = 0$  соединяют БУТ и профиль. В то же время профиль, сколь угодно близкий к той же дуге окружности, может быть построен на основе выпукловогнутого тела, приведенного на фиг. 5, а. Но для любого из этих профилей число нулей функции  $G$  равно четырем,  $\Gamma \neq 0$ ,  $Y \neq 0$ . Тем самым приходим к ситуации, когда двум сколь угодно близким профилям отвечают принципиально различные схемы обтекания. Этот и ряд других примеров, список которых может быть продолжен, требуют отдельного рассмотрения.

Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта № 117 СО РАН 2006 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics.* N. Y.: Wiley, 1958 = *Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 208 с.
2. *Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики.* М.: Наука, 1981. 368 с.
3. *Рылов А.И. О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. ж. индустр. математики. 1998. Т. 1. № 2. С. 169–174.*
4. *Рылов А.И. Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.*
5. *Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow.* N.Y.: Acad. Press, 1958 = *Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости.* М.: Изд-во иностр. лит.-ры., 1961. 588 с.
6. *Черный Г.Г. Газовая динамика.* М.: Наука, 1988. 424 с.
7. *Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.*
8. *Шифрин Э.Г. Исследование осесимметричных трансзвуковых течений при помощи специальной плоскости годографа // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 549–558.*
9. *Рылов А.И. О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 386–391.*
10. *Рылов А.И. Асимптотики и структура линий уровня в дозвуковых плоских потенциальных течениях // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 403–414.*
11. *Рылов А.И. Геометрические свойства некоторых линий уровня в плоских и осесимметричных течениях газа // Сиб. ж. индустр. математики. 2003. Т. 6. № 1. С. 125–137.*
12. *Bateman H. Notes on a differential equation which occurs in the Two-dimensional motion of a compressible fluid and associated variational problem // Proc. Roy. Soc. 1929. London. ser. A. V. 125. № 799. P. 598–618.*
13. *Ludford G.S.S. The behavior at infinity of the potential function Two dimensional subsonic compressible flow // J. Math. and Phys., 1951. V. 30. № 3. P. 117–130.*
14. *Bers L. Existence and uniqueness of subsonic flow past a given profile // Comm. Pure Appl. 1954. V. 7. № 3. P. 441–504.*
15. *Finn R., Gilbarg D. Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 23–63.*
16. *Arnold V.I., Khesin B.A. Topological methods in hydrodynamics.* N. Y.: Springer, 1997. 374 p.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 736 с.
18. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.*
19. *Валландер С.В. Лекции по гидромеханике.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 295 с.
20. *Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла.* Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.