

УДК 532.546

© 2006 г. М. М. Алимов

**ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ХЕЛЕ-ШОУ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛЕ**

Для всех известных точных решений задачи пальцеобразования в канале Хеле-Шоу частные производные функции, отображающей вспомогательную плоскость на физическую, являются рациональными функциями. С помощью методов комплексного анализа построен общий вид решения, обладающего этим свойством, и в отличие от известных решений необязательно симметричный относительно центральной оси канала. Для свободных параметров решения выписана обобщенная задача динамики системы, показана ее полная интегрируемость.

Классическая задача Хеле-Шоу описывает эволюцию границы раздела невязкой и вязкой жидкости (далее воздуха и просто жидкости) при их совместном течении в лотке Хеле-Шоу в предположении о непрерывности давления на границе раздела фаз [1]. Когда жидкость отступает, межфазная граница становится неустойчивой. Тем не менее в экспериментах на лотках разной геометрии [1, 2] наблюдаются относительно устойчивые структуры типа растущих "пальцев" [1]. Это характерная особенность многочисленных процессов, математические модели которых сводятся к задаче Хеле-Шоу [3], а также к разным ее обобщениям, например, связанным с неньютоновской реологией вязкой жидкости [4].

Первые точные решения задачи о стягивании контура нефтеносности, родственной задаче Хеле-Шоу, найдены в середине прошлого столетия [5–7]. Непосредственно для задачи пальцеобразования в канале Хеле-Шоу было построено первое нестационарное решение [8]. Для задачи о "раздуваемом пузыре" впервые показано [9], что краевая задача Хеле-Шоу может быть сведена к обобщенной задаче динамики системы. Было предложено находить первые интегралы такой динамической системы с помощью функции Шварца, и фактически сформулирован метод конструирования точных решений (далее метод Ховисона) [10, 11]. С его использованием построено множество точных решений как для течений Хеле-Шоу, так и для родственных им процессов [12]. Однако сам метод плохо формализован, поскольку были высказаны [11] только идеи возможных путей обобщения найденных частных решений. Более того, метод не полон – сам по себе он не позволяет обоснованно утверждать, является или нет параметризованный вид отображающей функции решением задачи Хеле-Шоу.

Помимо введения вспомогательной плоскости комплексного переменного [5, 6] общим элементом всех работ является представление решения в виде параметризованной функции, отображающей вспомогательную плоскость на физическую. Все найденные решения – частные представители класса решений, в котором частные производные отображающей функции – рациональные функции во вспомогательной плоскости [11] (имеются решения, не попадающие в этот класс [13], однако только для течений в лотках с угловой геометрией). Цель данной работы – построение точного решения наиболее общего вида из этого класса решений задачи Хеле-Шоу для течений в канале.

**1. Определяющие соотношения для течений Хеле-Шоу.** Математическая формулировка классической задачи Хеле-Шоу имеет вид [1]

$$\Omega_z(t): \Delta p = 0; \quad \Gamma(t): -\partial p / \partial n = v_n, \quad p = 0 \quad (1.1)$$

к которому надо добавить естественные граничные условия на фиксированных границах лотка и в бесконечности. Здесь  $\Omega_z(t)$  – область, занятая жидкостью,  $\Gamma(t)$  – межфазная граница между жидкостью и воздухом,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\Gamma(t)$ ,  $p(x, y, t)$  – давле-

ние в жидкости,  $v_n$  – нормальная составляющая скорости движения межфазной границы. Первое граничное условие в задаче (1.1) – кинематическое, второе – динамическое и в таком виде часто называется идеализированным граничным условием.

Краевая задача (1.1) позволяет ввести комплексную физическую плоскость  $z = x + iy$  и комплексный потенциал течения  $W = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi = -p$ ,  $\psi$  – функция тока, причем  $W = W(z, t)$  [14]. Использование комплексных переменных делает целесообразным и введение комплекснозначных аналогов векторных полей [15]. Если в плоскости  $\mathbf{R}^2$  действует векторное поле  $\mathbf{V}(x, y, t) = (v_x, v_y)$ , то, очевидно, можно говорить о действующем в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  векторном поле  $\mathbb{V}(z, \bar{z}, t)$

$$\mathbb{V}(z, \bar{z}, t) = [v_x(x, y, t) + iv_y(x, y, t)]|_{x=(z+\bar{z})/2; y=(z-\bar{z})/2} \tag{1.2}$$

Тогда для скорости потенциального течения можно использовать формулу  $\mathbb{V}_p = \overline{\partial W / \partial z}$ , откуда, в частности, следует  $\mathbb{V}_p = \mathbb{V}_p(\bar{z}, t)$ . Если вид функции  $\mathbb{V}_p(\bar{z}, t)$  параметризован, то можно записать  $\partial W / \partial z = \mathbb{V}_p^*(z, t)$ , где  $\mathbb{V}_p^*(z, t) \equiv \overline{\mathbb{V}_p(\bar{z}, t)}$ . Звездочка сверху здесь и далее означает операцию сопряжения только по параметрам (а не переменным) функции.

Введем вспомогательную плоскость комплексной переменной  $\zeta$ . Области  $\Omega_\zeta(t)$  в ней отвечает область  $\Omega_z$  неизменного вида. Сам вид области пока не конкретизируем, но условимся в дальнейшем выбирать его так, чтобы свободной границе  $\Gamma$  в плоскости  $\zeta$  соответствовала дуга единичной окружности. Аналитическую функцию, конформно отображающую область  $\Omega_\zeta$  на область  $\Omega_z(t)$ , обозначим через  $g(\zeta, t)$ :

$$z = g(\zeta, t), \quad |\partial g / \partial \zeta|_{\zeta \in \Omega_\zeta} \neq 0, \infty \tag{1.3}$$

Конформность отображения предполагает отсутствие в области  $\Omega_\zeta$  сингулярностей функции  $g(\zeta, t)$ , что подчеркнуто в выражении (1.3). Как следствие существует и обратное отображение

$$\zeta = f(z, t), \quad |\partial f / \partial z|_{z \in \Omega_z} \neq 0, \infty \tag{1.4}$$

Зависящее от времени  $t$  как от параметра конформное отображение (1.3) задает группу преобразований, которой отвечает некоторое конформное движение точек физической плоскости. Вспомогательная плоскость  $\zeta$  при этом выступает в качестве плоскости лагранжевых переменных. Скорость такого движения обозначим через  $\mathbb{V}_g(z, t)$  и по определению имеем

$$\mathbb{V}_g(z, t) = (\partial g / \partial t)|_{\zeta=f(z, t)} \tag{1.5}$$

Разные по характеру потенциальное  $\mathbb{V}_p(\bar{z}, t)$  и конформное  $\mathbb{V}_g(z, t)$  движения могут приводить к одинаковой эволюции свободной границы тогда и только тогда, когда в каждой точке границы будут совпадать нормальные проекции скоростей этих движений:

$$\forall t, z \in \Gamma(t): \operatorname{Re}\{\bar{\mathbb{V}}_g \mathbb{N}\} = \operatorname{Re}\{\bar{\mathbb{V}}_p \mathbb{N}\} \tag{1.6}$$

где  $\mathbb{N}$  – комплекснозначный аналог внешней нормали к границе  $\Gamma(t)$  в плоскости  $z$ , а для скалярного произведения двух векторов  $\mathbb{V}_1$  и  $\mathbb{V}_2$  использована очевидная формула  $\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_2 = \operatorname{Re}\{\bar{\mathbb{V}}_1 \mathbb{V}_2\}$ .

Граничное соотношение (1.6) фактически является векторным аналогом граничного уравнения Полубариновой – Галина [5, 6]. Чтобы убедиться в этом, заметим, что  $\zeta$  – комплексный аналог нормали к границе  $\Gamma$  области  $\Omega_\zeta$ . Тогда, учитывая геометрические свойства производной аналитической функции комплексного переменного [16], для

нормали  $\mathbb{N}$  получим выражение  $\mathbb{N} = -\zeta e^{i \arg(\partial g / \partial \zeta)}$ . Подставляя его в условие (1.6) и используя представление (1.5) для скорости  $\mathbb{V}_g$  и  $\overline{\partial W / \partial z}$  для скорости  $\mathbb{V}_p$ , получим уравнение Полубариновой – Галина общего вида

$$\zeta = e^{i\sigma}: \operatorname{Re}\{(\overline{\partial g / \partial t})\zeta \partial g / \partial \zeta\} = \operatorname{Re}\{\zeta \partial W / \partial \zeta\} \quad (1.7)$$

где правая часть преобразована с учетом очевидного дифференциального соотношения

$$(\partial W / \partial z)(\partial g / \partial \zeta) = \partial W / \partial \zeta$$

Далее введем функцию Шварца [17]. Она получается подстановкой

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2$$

в уравнение  $F(x, y, t) = 0$  движущейся свободной границы и разрешением его относительно  $\bar{z}$ :  $\bar{z} = S(z, t)$ , где  $z \in \Gamma(t)$ .

Обозначим через  $r(\zeta, t) \equiv S(g(\zeta, t), t)$  образ функции Шварца во вспомогательной плоскости. В этой плоскости свободной границе  $\Gamma(t)$  отвечает дуга единичного круга  $\zeta = e^{i\sigma}$ . Соответственно функция  $r(\zeta, t)$  получается применением к функции  $g(\zeta, t)$  преобразования [11]

$$r(\zeta, t) = g^*(\zeta^{-1}, t) \equiv \mathcal{P}[g(\zeta, t)] \quad (1.8)$$

которое определим как оператор  $\mathcal{P}$ . С его помощью могут быть выражены и частные производные функции  $r(\zeta, t)$

$$\partial r / \partial t = \mathcal{P}[\partial g / \partial t], \quad \zeta(\partial r / \partial \zeta) = -\mathcal{P}[\zeta(\partial g / \partial \zeta)]$$

Поскольку на свободной границе выполняются соотношения

$$\zeta = e^{i\sigma}: \zeta^{-1} = \bar{\zeta}, \quad \partial r / \partial t = \overline{(\partial g / \partial t)}, \quad \zeta(\partial r / \partial \zeta) = -\overline{\zeta(\partial g / \partial \zeta)}$$

граничное эволюционное уравнение (1.7) может быть переписано в виде

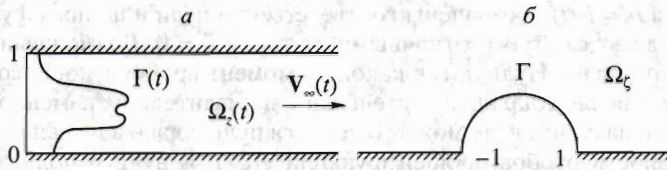
$$\zeta = e^{i\sigma}: \zeta \frac{\partial r \partial g}{\partial t \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial g \partial r}{\partial t \partial \zeta} = 2 \operatorname{Re}\left\{ \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\} \quad (1.9)$$

Именно такая форма эволюционного уравнения была принята [7] для построения решения задачи о стягивании контура нефтеносности (с тем уточнением, что П.П. Куфарев не использовал явного обозначения для функции Шварца), а также была принята [18] для установления связи задач Хеле-Шоу с современной теорией интегрируемых систем. Преимущество формы (1.9) перед (1.7) в том, что левая часть уравнения

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta \frac{\partial r \partial g}{\partial t \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial g \partial r}{\partial t \partial \zeta} = \mathcal{P}\left[ \frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial g}{\partial t} \mathcal{P}\left[ \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right] \quad (1.10)$$

является аналитической функцией переменной  $\zeta$ . Это позволяет привлечь к ее анализу аппарат теории функции комплексного переменного.

Второе выражение в (1.10) представляет функцию  $\Phi(\zeta, t)$  некоторым преобразованием функции  $g(\zeta, t)$ . Из него с учетом очевидной эквивалентности преобразования  $\mathcal{P}^2$  тождественному следует инвариантность функции  $\Phi(\zeta, t)$  к преобразованию  $\mathcal{P}$ , что позволяет при некоторых условиях установить структуру функции.



Фиг. 1

**Утверждение.** Пусть частные производные функции  $g(\zeta, t)$  по переменным  $\zeta$  и  $t$  – рациональные функции в плоскости  $\zeta$ . Тогда функция  $\Phi(\zeta, t)$  также рациональна и представима в виде

$$\Phi(\zeta, t) = \alpha(t) \prod_{j=1}^{J_n} [\zeta - c_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{c}_j(t)] / \prod_{j=1}^{J_p} [\zeta - b_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{b}_j(t)]$$

где  $\alpha(t)$  – некоторая вещественная функция  $t$ . Иначе говоря, рациональная функция  $\Phi(\zeta, t)$  является комбинацией отличных от нуля и бесконечности плоскости  $\zeta$  парных нулей  $\{c_j, \bar{c}_j^{-1}\}$  и парных полюсов  $\{b_j, \bar{b}_j^{-1}\}$ .

Доказательство очевидным образом следует из мультипликативного представления рациональной функции и инвариантности  $\Phi(\zeta, t)$  относительно преобразования  $\mathcal{P}$ . При этом количество нулей  $2J_n$  и полюсов  $2J_p$  может не совпадать. Знак разности  $J_n - J_p$  определяет поведение функции  $\Phi(\zeta, t)$  в нуле и бесконечности: если он положителен, там будут полюса порядка  $J_n - J_p$ , если отрицателен – нули порядка  $J_p - J_n$ .

**2. Течение в канале.** Далее будем рассматривать только течения в лотке Хеле-Шоу, имеющем форму канала, при идеализированном динамическом граничном условии на свободной границе. К системе (1.1) надо добавить условия непроницаемости боковых стенок канала и задать, вообще говоря, непостоянную скорость отбора жидкости на бесконечности  $V_\infty(t)$  (см. фиг. 1, а).

Конкретизируя вид вспомогательной плоскости  $\zeta$ , выберем в качестве области  $\Omega_\zeta$  верхнюю половину внешности единичного круга  $|\zeta| = 1$  (фиг. 1, б) так, что границе  $\Gamma(t)$  отвечает единичная полуокружность, стенкам канала – действительная ось, а бесконечности – бесконечность

$$|\zeta| \sim \infty, \quad g(\zeta, t) \sim \pi^{-1} \ln \zeta; \quad \text{Im} \zeta = 0, \quad \text{Im} \{ \partial g / \partial \zeta \} = 0 \tag{2.1}$$

Тем самым задана и нормировка конформного отображения (1.3), точнее говоря, два из трех необходимых параметров нормировки [16]. Последний параметр остается произвольным вплоть до построения решения [10].

Далее с учетом известных результатов [8–11] целесообразно заложить структуру решения задачи, т. е. самый общий параметрический вид функции  $g(\zeta, t)$ , обеспечивающий условие рациональности ее частных производных в плоскости  $\zeta$ . Для того чтобы иметь возможность продолжить функцию  $g(\zeta, t)$  через действительную ось [16] при соблюдении нормировки (2.1), потребуем у решения симметрию относительно действительной оси во вспомогательной (но не в физической) плоскости

$$g(\zeta, t) = \overline{g(\bar{\zeta}, t)} \equiv g^*(\zeta, t) \tag{2.2}$$

Общий вид производной  $\partial g / \partial \zeta$ , как рациональной функции такой:

$$\pi \frac{\partial g}{\partial \zeta} = \zeta^{-M-1} \prod_{n=1}^N (\zeta - a_n) / \prod_{j=1}^J (\zeta - b_j), \quad N - J = M > 0 \tag{2.3}$$

Через  $a_n = a_n(t)$  и  $b_j = b_j(t)$  обозначены соответственно нули и полюса функции, причем полюса предполагаются строго отличными от точки  $\zeta = 0$ . Возможный полюс в этой точке выделен отдельно. Нули  $a_k(t)$  в какой-то момент времени могут совпадать с точкой  $\zeta = 0$ , так что после сокращения степеней  $\zeta$  в числителе и знаменателе у функции  $\partial g/\partial \zeta$  в этой точке на самом деле может оказаться нуль порядка не выше  $(J-1)$ .

Как сингулярности отображающей функции  $g(\zeta, t)$  – нули и полюса производной  $\partial g/\partial \zeta$  – должны лежать вне области  $\Omega_\zeta$  [16]. Точнее, при учете симметрии (2.2) они должны лежать внутри единичного круга  $|\zeta| < 1$ :

$$\forall t: |a_n| < 1, \quad n = 1, \dots, N; \quad |b_j| < 1, \quad j = 1, \dots, J \quad (2.4)$$

Рациональная функция (2.3) допускает и аддитивное представление [16]. Интегрируя его по  $\zeta$  и выбирая постоянную интегрирования определенной и равной  $t$ , получим общий вид функции  $g(\zeta, t)$

$$g(\zeta, t) = t + \frac{\ln \zeta}{\pi} + \sum_{j=1}^J \left[ d_{j,0} \ln(\zeta^{-1} - b_j^{-1}) - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d_{j,k}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^k} \right] + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\zeta^m} \quad (2.5)$$

где  $d_{j,0}$ ,  $d_{j,k}$ ,  $b_j$ ,  $\beta_m$  – свободные параметры, причем  $d_{j,0}$  – комплексные постоянные,  $d_{j,k} = d_{j,k}(t)$  и  $b_j = b_j(t)$  – комплекснозначные, а  $\beta_m = \beta_m(t)$  – вещественные функции времени  $t$ . Нули  $a_n = a_n(t)$  производной  $\partial g/\partial \zeta$ , очевидно, будут определяться всей совокупностью свободных параметров.

Вещественность  $\beta_m$  – следствие симметрии (2.2) функции  $g(\zeta, t)$ . Она же необходимо приводит к условию попарной сопряженности всех остальных свободных параметров. Иначе говоря, весь интервал  $j = 1, \dots, J$  особенностей  $b_j$  можно условно разбить на три интервала

$$j \leq J_0: \operatorname{Im} b_j = 0, \quad \operatorname{Im} d_{j,k} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K_j$$

$$J_0 < j \leq J_0 + J_1: \operatorname{Im} b_j > 0, \quad b_j = \bar{b}_{j+J_1}, \quad d_{j,k} = \bar{d}_{j+J_1,k}, \quad \forall k = 1, \dots, K_j \quad (2.6)$$

$$j > J_0 + J_1: \operatorname{Im} b_j < 0, \quad b_j = \bar{b}_{j-J_1}, \quad d_{j,k} = \bar{d}_{j-J_1,k}, \quad \forall k = 1, \dots, K_j$$

За счет такой попарной сопряженности независимыми остаются только следующие свободные параметры решения:

$$[\beta_m(t), m = 1, \dots, M]; \quad [b_j(t), d_{j,k}(t), j = 1, \dots, J_0 + J_1, k = 1, \dots, K_j] \quad (2.7)$$

Обозначая через  $Q(t) = V_\infty(t)$  расход жидкости в лотке и используя канонический вид области  $\Omega_\zeta$ , находим вид функции  $W(\zeta, t)$

$$W(\zeta, t) = \pi^{-1} Q(t) \ln \zeta \quad (2.8)$$

Тогда уравнение (1.9) примет вид

$$\zeta = e^{i\sigma}: \zeta \frac{\partial r \partial g}{\partial t \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial g \partial r}{\partial t \partial \zeta} = 2 \frac{Q(t)}{\pi} \quad (2.9)$$

В соответствии с основной идеей метода функции Шварца [17] удовлетворим граничное уравнение (2.9) для функции  $g(\zeta, t)$  вида (2.5), обеспечив его выполнение всюду в плоскости  $\zeta$ . При учете введенного для левой части уравнения обозначения  $\Phi(\zeta, t)$  это возможно, если всюду в плоскости  $\zeta$  обеспечить равенство  $\Phi(\zeta, t) = 2\pi^{-1} Q(t)$ .

Из выражения (2.5) видно, что обе частные производные функции  $g(\zeta, t)$  в плоскости  $\zeta$  – функции рациональные с полюсами в нуле и точках  $b_j$ , лежащих внутри единичного

круга. Следовательно, функция  $g(\zeta, t)$  удовлетворяет всем условиям утверждения из разд. 1. Поэтому функция  $\Phi(\zeta, t)$  также рациональна в плоскости  $\zeta$  и, кроме того, структурно состоит из двух слагаемых – рациональных функций с одними и теми же полюсами. Соответственно можно пытаться добиться взаимного сокращения полюсов путем наложения дополнительных условий на свободные параметры функции  $g(\zeta, t)$ . Тогда по теореме Лиувилля [16]  $\Phi(\zeta, t)$  во всей плоскости  $\zeta$  будет функцией только параметра  $t$ , причем вещественной, вследствие ее инвариантности относительно преобразования  $\mathcal{P}$ . В результате из утверждения, приведенного в разд. 1 для течений Хеле-Шоу в канале вытекает.

*Следствие.* Пусть функция  $g(\zeta, t)$  имеет вид (2.5)–(2.6), а функция  $\Phi(\zeta, t)$  – образ функции  $g(\zeta, t)$  при преобразовании (1.10). Тогда расположение ее нулей и полюсов будет необходимо симметричным как относительно единичной окружности, так и относительно действительной оси в плоскости  $\zeta$ . Если, управляя свободными параметрами (2.7), добиться выполнения совокупности локальных условий в окрестности особых точек функции  $\Phi(\zeta, t)$ , лежащих в замыкании области  $\bar{\Omega}_\zeta$ ,

$$\Phi(\zeta, t)|_{|\zeta|=\bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1; \quad \Phi(\zeta, t)|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1) \quad (2.10)$$

то функция  $g(\zeta, t)$  будет решением задачи Хеле-Шоу для течения в канале с некоторым определенным законом изменения расхода  $Q = Q_*(t)$ .

Определенный вид закона изменения расхода  $Q = Q_*(t)$  связан, очевидно, с выбором определенной постоянной интегрирования у функции  $g(\zeta, t)$  вида (2.5). В дальнейшем заменой переменной времени [19] можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона  $Q(t) > 0$ .

Зная вид решения  $g(\zeta, t)$  и комплексного потенциала  $W(\zeta)$ , можно найти комплексно-сопряженную скорость потенциального движения

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{Q(t)}{\pi \zeta (\partial g / \partial \zeta)} \quad (2.11)$$

Таким образом, при параметризации решения (2.5), (2.6) краевая задача Хеле-Шоу (1.1) для течений в канале сводится к задаче локального анализа поведения функции  $\Phi(\zeta, t)$  в окрестности ее особых точек. Вместе с тем такой непосредственный путь связан с громоздкими выкладками, поскольку сама функция будет иметь громоздкий вид. Избежать этих неудобств позволит предлагаемый далее формализм.

**3. Формализм.** Пусть в плоскости  $\mathbf{R}^2$  задано гладкое векторное поле  $\mathbf{V}(x, y, t)$ , где время  $t \in \mathbf{R}$ . Можно ввести [20, 21] пространство  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ , действующее в нем векторное поле  $(1, \mathbf{V})$  и производную Ли скалярного поля  $F(x, y, t)$  относительно векторного поля  $(1, \mathbf{V})$

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbf{V})} F \equiv \partial F / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla F \quad (3.1)$$

В механической интерпретации она совпадает с субстанциональной производной скалярной величины  $F$  для материальных частиц, движение которых в плоскости  $\mathbf{R}^2$  задается векторным полем  $\mathbf{V}$ .

Как отмечалось в разд. 1, этому векторному полю можно поставить в соответствие комплекснозначное векторное поле  $\mathbb{V}(z, \bar{z}, t)$  вида (1.2), действующее в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Соответственно можно ввести пространство  $\mathbf{R} \times \mathbb{C}$  и действующее в нем векторное поле  $(1, \mathbb{V})$ .

Пусть  $f(z, t)$  – аналитическая функция комплексного переменного  $z$  и действительного переменного  $t$ . Определим производную этой функции как скалярного поля, заданного в пространстве  $\mathbf{R} \times \mathbb{C}$ , по векторному полю  $(1, \mathbb{V})$  посредством общей формулы (3.1):

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})} f \equiv \mathcal{L}_{(1, \mathbf{V})} [\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f]$$

При учете соотношений Коши-Римана она преобразуется к виду [15]

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})}f \equiv \partial f / \partial t + \mathbb{V} \partial f / \partial z \tag{3.2}$$

Далее, в соответствии со сказанным в разд. 2 пусть  $\zeta$  – вспомогательная плоскость, в которой области течения  $\Omega_z(t)$  отвечает область  $\Omega_\zeta$  неизменного вида. В каждый момент времени  $t \in T \subset \mathbb{R}$  конформное отображение области  $\Omega_z(t)$  на  $\Omega_\zeta$  реализует функция  $f(z, t)$ , а обратное отображение – функция  $g(\zeta, t)$ . Вводя тождественное преобразование времени  $\phi(t) \equiv t$ , определим взаимно обратные отображения  $(\phi, f)$  и  $(\phi, g)$

$$(\phi, f): T \times \Omega_z(T) \rightarrow T \times \Omega_\zeta, \quad (\phi, g): T \times \Omega_\zeta \rightarrow T \times \Omega_z(t)$$

Пусть в области  $T \times \Omega_z(t)$  действует векторное поле  $(1, \mathbb{V})$ . В результате отображения  $(\phi, f)$  в области  $T \times \Omega_\zeta$  ему будет отвечать векторное поле  $(1, \mathbb{U})$ . В механической интерпретации поле  $\mathbb{V}(z, \bar{z}, t)$  задает движение материальных точек области  $\Omega_z(t)$ , а поле  $\mathbb{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t)$  – движение образов этих точек в области  $\Omega_\zeta$  при отображении  $(\phi, f)$ .

Для производной Ли справедливы соотношения  $(1, \mathbb{U}) = \mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})}(\phi, f)$ ,  $(1, \mathbb{V}) = \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U})}(\phi, g)$  [21]. Применяя к ним формулу (3.2), получим

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})}\phi(t), & \mathbb{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t) &= (\partial f / \partial t + \mathbb{V} \partial f / \partial z)|_{z=g(\zeta, t)} \\ 1 &\equiv \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U})}\phi(t), & \mathbb{V}(z, \bar{z}, t) &= (\partial g / \partial t + \mathbb{U} \partial g / \partial \zeta)|_{\zeta=f(z, t)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

**4. Запись условий (2.10) в терминах производной Ли.** Конформному движению  $\mathbb{V}_g(z, t)$ , порожденному отображением (1.3), в плоскости  $\zeta$  по сути отвечает векторное поле  $\mathbb{U}_g(\zeta, t) \equiv 0$ . Подставляя его в формулы (3.3), получим, кроме выражения (1.5), новую формулу

$$\mathbb{V}_g(z, t) = (\partial g / \partial t)|_{\zeta=f(z, t)} = -(\partial f / \partial t) / (\partial f / \partial z) \tag{4.1}$$

Аналогично можно определить другое конформное движение, порожденное отображением (1.4), когда  $z$  выступает плоскостью лагранжевых переменных. В этой плоскости ему отвечает поле скоростей  $\mathbb{V}_f(z, t) \equiv 0$ , а в плоскости  $\zeta$  – поле  $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ , по аналогии с (4.1) имеющее вид

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) = (\partial f / \partial t)|_{z=g(\zeta, t)} = -(\partial g / \partial t) / (\partial g / \partial \zeta) \tag{4.2}$$

Вычисляя частные производные функции  $g(\zeta, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\pi \zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{K_j} \frac{d_{k,j}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^{k+1}} - \sum_{m=1}^M \frac{m \beta_m}{\zeta^{m+1}} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= 1 + \sum_{j=1}^J b'_j(t) \left[ \sum_{k=0}^{K_j} \frac{d_{k,j}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^{k+1} b_j} \right] - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d'_{k,j}(t)}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^k} + \sum_{m=1}^M \frac{\beta'_m(t)}{\zeta^m} \end{aligned} \tag{4.3}$$

можно судить об особенностях функции  $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ . Очевидно, она рациональна в плоскости  $\zeta$ , имеет простой полюс в бесконечности и полюса  $a_k(t)$ , лежащие внутри единичного круга в силу требования (2.4). Соответственно, всюду в области  $\Omega_\zeta$  функция  $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$  регулярна.

Из формул (1.10), (4.2) найдем новое представление функции  $\Phi(\zeta, t)$

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta (\partial g / \partial \zeta) \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t)$$

Тогда граничное уравнение (2.9) можно переписать в терминах производной Ли функции Шварца  $r(\zeta, t)$

$$\zeta = e^{i\sigma}: \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \mathcal{L}_{(1, U_j)} r(\zeta, t) = \frac{2}{\pi} Q(t) \tag{4.4}$$

Согласно следствию удовлетворить ему можно, выполнив условия (2.10). Поскольку все полюса рациональной функции  $\zeta \partial g / \partial \zeta$  лежат вне  $\bar{\Omega}_\zeta$ , это равносильно совокупности условий

$$\mathcal{L}_{(1, U_j)} r(\zeta, t) \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1; \quad \mathcal{L}_{(1, U_j)} r(\zeta, t) \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1) \tag{4.5}$$

С помощью преобразования (1.8) построим функцию Шварца для решения вида (2.5), (2.6) с точностью до несущественной постоянной

$$r(\zeta, t) = t - \frac{\ln \zeta}{\pi} + \sum_{j=1}^J \left[ \bar{d}_{j,0} \ln(\zeta - \bar{b}_j^{-1}) - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}_{j,k}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} \right] + \sum_{m=1}^M \beta_m \zeta^m \tag{4.6}$$

С учетом формулы (3.2) проанализируем левые части условий (4.5) на наличие особенностей в замыкании области  $\bar{\Omega}_\zeta$ . Они могут быть порождены особенностями функции  $U_j(\zeta, t)$  и частных производных функции  $r(\zeta, t)$ . Как уже отмечалось выше, функция  $U_j(\zeta, t)$  в замыкании  $\bar{\Omega}_\zeta$  имеет единственную особенность – простой полюс в бесконечности. Далее из выражения (4.6) непосредственно дифференцированием найдем  $\partial r / \partial \zeta$  и  $\partial r / \partial t$ . Обе эти частные производные представимы в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет особенность в той точке  $\bar{b}_j^{-1}$ , которую явно содержит. Соответственно в левые части  $j$ -го локального условия (4.5) существенный вклад могут дать только те слагаемые представления (4.6), которые явно содержат  $\bar{b}_j^{-1}$ . В результате первая группа условий (4.5) дает

$$\mathcal{L}_{(1, U_j)} \left[ \bar{d}_{j,0} \ln(\zeta - \bar{b}_j^{-1}) - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}_{j,k}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} \right] \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1 \tag{4.7}$$

Аналогично в левую часть последнего локального условия в (4.5) в окрестности бесконечности существенный вклад может дать только последний член аддитивного представления (4.6)

$$\mathcal{L}_{(1, U_j)} \left[ \sum_{m=1}^M \beta_m \zeta^m \right] \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1) \tag{4.8}$$

В результате совокупность локальных условий (2.10) сведена к более простой совокупности локальных условий (4.7), (4.8).

**5. Формулировка динамической задачи.** Свободные параметры решения можно трактовать как фазовые координаты некоторой обобщенной динамической системы. Состояние системы в момент времени  $t$  характеризует вектор  $X(t)$  фазового пространства системы размерности  $L$

$$X(t) = \{ [\beta_m(t), m = 1, \dots, M], [b_j(t), d_{j,k}(t); j = 1, \dots, J_0 + J_1; k = 1, \dots, K_j] \} \tag{5.1}$$

Покажем, что наложение локальных условий (4.7), (4.8) приводит к обобщенной задаче динамики системы вида

$$\sum_{l=1}^L A_{l,s}(\mathbf{X}) X'_l(t) = B_s(\mathbf{X}), \quad s = 1, \dots, L \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{X}(\mathbf{X})$  – вектор размерности  $L$ , а  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  – квадратная матрица размерности  $L \times L$ , причем оба объекта – функции только вектора  $\mathbf{X}(t)$ .

Распишем условие (4.7) с учетом формулы (3.2)

$$\left[ \left( \mathbb{U}_f - \frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} \right) \sum_{k=1}^{K_j+1} \frac{\bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right] \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1 \quad (5.3)$$

Аналогично, расписывая условие (4.8), получим

$$\left\{ \beta'_M(t) \zeta^M + \sum_{m=1}^{M-1} [\beta'_m(t) + (m+1)\beta_{m+1}] \mathbb{U}_f \zeta^m \right\} \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1) \quad (5.4)$$

Ввиду регулярности функции  $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$  в области  $\Omega_\zeta$  справедливо ее разложение в ряд Тейлора с коэффициентами  $C_{j,n}(t)$

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{j,n}(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^n, \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1 \quad (5.5)$$

В окрестности бесконечности имеем  $\mathbb{U}_f(\zeta, t) \sim \zeta$  и соответственно справедливо разложение функции  $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$  в ряд с коэффициентами  $C_{\infty,n}(t)$

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{\infty,n}}{\zeta^{n-1}} \quad (5.6)$$

Подставим разложение (5.5) в  $j$ -е условие (5.3). При этом существенный вклад, т. е. отличный от  $O(1)$ , в левую часть условия дают только аддитивные члены порядка  $(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^{-k}$  ( $k = 1, \dots, K_j + 1$ )

$$\left\{ \left[ \sum_{n=0}^{K_j} C_{j,n}(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^n - \frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} \right] \sum_{k=1}^{K_j+1} \frac{\bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right\} \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = O(1) \quad (5.7)$$

Чтобы найти условия выполнения равенства (5.7), сгруппируем члены одного порядка и приравняем нулю результирующий коэффициент при нем. По числу значимых порядков  $k = 1, \dots, K_j + 1$  получим  $K_j + 1$  уравнений.

Сначала выпишем уравнение для старшего порядка  $k = K_j + 1$

$$\partial \bar{b}_j^{-1} / \partial t = C_{j,0}(t), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1 \quad (5.8)$$

Учитывая его, перепишем условие (5.7) в более простом виде

$$\left[ \sum_{k=2}^{K_j+1} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{C_{j,n} \bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^{k-n}} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right] \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}} = O(1)$$

и, группируя в нем члены порядка  $k = 1, \dots, K_j$ , найдем

$$\bar{d}'_{j,k}(t) = k \sum_{n=1}^{K_j+1-k} C_{j,n}(t) \bar{d}_{j,n+1-k}(t), \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1, \quad k = 1, \dots, K_j \quad (5.9)$$

В результате соотношения (5.8), (5.9) дают эволюционные уравнения для совокупности компонентов  $b_j(t)$  и  $d_{j,k}(t)$  вектора  $\mathbf{X}(t)$  фазового пространства. Осталось получить эволюционные уравнения для совокупности компонентов  $\beta_m(t)$  вектора  $\mathbf{X}(t)$ .

Действуя аналогичным образом, подставим разложение (5.6) в условие (5.4). При этом существенный вклад в левую часть условия дают только аддитивные члены порядка  $\zeta^k$  ( $k = 1, \dots, M$ )

$$\left\{ \beta'_M(t) \zeta^M + \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \beta'_m(t) \zeta^m + (m+1) \beta_{m+1} \sum_{n=0}^m C_{\infty,n} \zeta^{m-n+1} \right] \right\} \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1)$$

Группируя члены одного порядка  $m$  и приравнивая результирующий коэффициент при  $\zeta^m$  нулю, получим

$$\beta'_m(t) = - \sum_{n=0}^{M-m} (m+n) C_{\infty,n}(t) \beta_{m+n}(t), \quad m = 1, \dots, M \quad (5.10)$$

Таким образом, для компонент вектора  $\mathbf{X}(t)$  фазового пространства системы (5.1) получена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.8)–(5.10). Для ее анализа необходимо выяснить структуру функций  $C_{j,n}(t)$ ,  $C_{\infty,n}(t)$  – коэффициентов разложений (5.5) и (5.6) в ряд Тейлора функции  $\mathbb{U}_j(\zeta, t)$ , представимой выражением (4.2).

Обратимся к соотношениям (4.3). Частная производная  $\partial g / \partial \zeta$  – функция комплексной переменной  $\zeta$  и компонент вектора  $\mathbf{X}(t)$ . Частная производная  $\partial g / \partial t$  – также функция комплексной переменной  $\zeta$ , компонент вектора  $\mathbf{X}(t)$  и, кроме того, его производной  $\mathbf{X}'(t)$ , причем зависимость от вектора  $\mathbf{X}(t)$ , очевидно, линейная. Следовательно, функция  $\mathbb{U}_j(\zeta, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) = U_0(\zeta, \mathbf{X}) + \sum_{l=1}^L U_l(\zeta, \mathbf{X}) X'_l(t)$$

где  $U_l(\zeta, \mathbf{X})$  ( $l = 0, \dots, L$ ) – некоторые функции (их конкретный вид легко получается из представления (4.2) функции  $\mathbb{U}_j(\zeta, t)$  при учете выражения (4.3) и не приводится здесь ввиду их громоздкого вида). Тогда коэффициенты  $C_{j,n}(t)$ ,  $C_{\infty,n}(t)$  разложений функции  $\mathbb{U}_j(\zeta, t)$  имеют структуру

$$C_{\chi,n}(t) = \hat{U}_{0,\chi,n}(\mathbf{X}) + \sum_{l=1}^L \hat{U}_{l,\chi,n}(\mathbf{X}) X'_l(t), \quad \chi = j, \infty \quad (5.11)$$

Проанализируем систему уравнений (5.8)–(5.10) с учетом выражений (5.11). Очевидно, в правых частях всех уравнений зависимость от  $t$  не явная, а опосредованная компонентами вектора  $\mathbf{X}(t)$ , а зависимость от компонент производной  $\mathbf{X}'(t)$  – линейная. Следовательно, всю совокупность уравнений (5.8)–(5.10) можно представить в виде (5.2).

**6. О законе изменения расхода через канал.** Найдем, какому виду закона изменения расхода  $Q_*(t)$  в канале соответствует решение задачи вида (2.5), (2.6), когда его свободные параметры (5.1) удовлетворяют обобщенной задаче динамики системы (5.2). Для этого надо в граничном уравнении (2.9) вычислить левую часть в произвольной точке

плоскости  $\zeta$ . Таким путем можно получить множество различных по форме, но эквивалентных по сути, выражений для функции  $Q_*(t)$ . Приводить их здесь нецелесообразно, поскольку наиболее удобное выражение будет получено ниже при интегрировании динамической системы (5.2) (см. разд. 8).

Пусть функция  $Q_*(t)$  найдена. Введем новое время  $\theta$  [19], связанное со старым  $t$  взаимно однозначным соответствием  $\theta = \theta(t)$ , так что  $\theta'(t) > 0$  для всех  $t > 0$  и  $\theta(t) = 0$  при  $t = 0$ . Определим новую отображающую функцию  $z = \tilde{g}(\zeta, \theta)$  и соответствующую ей функцию Шварца  $\tilde{r}(\zeta, \theta)$  так, что

$$\tilde{g}(\zeta, \theta) \equiv g(\zeta, t)|_{t=\theta}, \quad \tilde{r}(\zeta, \theta) \equiv r(\zeta, t)|_{t=\theta} \quad (6.1)$$

Подставляя первое выражение (1.10) для функции  $\Phi(\zeta, t)$  в уравнение (2.9) и умножая обе части на  $t'(\theta)$ , получим уравнение структуры, аналогичной (2.9), только для времени  $\theta$  и закона изменения расхода через канал вида  $Q(\theta) = t'(\theta)Q_*[t(\theta)]$ . Интегрируя по  $\theta$ , найдем соотношение

$$\int_0^t Q_*(t) dt = \int_0^\theta Q(\theta) d\theta \quad (6.2)$$

позволяющее установить взаимно однозначное соответствие между  $\theta$  и  $t$  для любого наперед заданного закона изменения расхода  $Q(\theta) > 0$  до тех пор, пока выполняется условие  $Q_*(t) > 0$ . Таким образом, из решения задачи Хеле-Шоу вида (2.5) для определенного закона изменения расхода в канале  $Q_*(t)$  с помощью подстановки (6.1) можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона  $Q(\theta) > 0$ , установив соответствие  $t(\theta)$  с помощью формулы (6.2).

Как правило, для течений в канале расход остается фиксированным:  $Q(\theta) = 1$ . Тогда из выражения (6.2) при условии  $Q_*(t) > 0$  сразу следует

$$\theta(t) = \int_0^t Q_*(t) dt \quad (6.3)$$

**7. Сравнение с оригинальным методом Ховисона.** С помощью отображения  $(\phi, g)$  (см. разд. 3) перейдем из области  $T \times \Omega_\zeta$  в область  $T \times \Omega_z(t)$ . С учетом инвариантности производной Ли относительно отображений [21] и определения функции  $r(\zeta, t)$  найдем

$$z \in \Gamma(t): \{ \mathcal{L}_{(1, \cup, r)} r(\zeta, t) \}_{\zeta=f(z, t)} = \mathcal{L}_{(1, \cup, r)} S(z, t) \equiv \partial S / \partial t$$

Тогда, поделив уравнение (4.4) на  $\zeta(\partial g / \partial \zeta)$  и учитывая соотношения (2.11), получим еще один вид граничного эволюционного уравнения

$$z \in \Gamma(t): \partial S / \partial t = 2 \partial W / \partial z \quad (7.1)$$

Именно такой вид граничного эволюционного уравнения использовал Howison [10]. При этом в качестве вспомогательной плоскости не совсем удачно был выбран единичный круг с разрезом. Чтобы частные производные функции  $g(\zeta, t)$  были рациональными функциями в плоскости  $\zeta$ , необходимо провести ее сращивание по разрезу. Это можно сделать только при условии симметрии решения относительно центральной оси канала Хеле-Шоу. Тем самым искусственно сужается класс решений.

Далее граничное уравнение (7.1) распространялось на замыкание области течения  $\bar{\Omega}_z(t)$ . Производная комплексного потенциала течения  $\partial W / \partial z$  в  $\bar{\Omega}_z(t)$  регулярна. Для выполнения уравнения (7.1) всюду в  $\bar{\Omega}_z(t)$  все особенности производной функции Шварца

$\partial S/\partial t$  должны там исчезать. Это дает ряд условий, накладываемых на свободные параметры решения  $g(\zeta, t)$ , причем эти условия алгебраические, т.е. фактически являются первыми интегралами обобщенной задачи динамики системы, рассмотренной в разд. 6. В то же время по характеру вывода они являются необходимыми, но не достаточными условиями выполнения эволюционного уравнения (7.1), поскольку особенности функций  $\partial S/\partial t$  и  $\partial W/\partial z$  определяются только в области  $\bar{\Omega}_z(t)$ . Не имея представления об особенностях функций  $\partial S/\partial t$  и  $\partial W/\partial z$  в оставшейся части плоскости  $z$ , нельзя судить о равенстве между ними ни в замыкании области  $\bar{\Omega}_z(t)$ , ни, в частности, на межфазной границе  $\Gamma(t)$ .

Таким образом, метод Ховисона в оригинале не позволяет обоснованно заключить, является ли параметризованный вид отображающей функции  $g(\zeta, t)$  решением задачи Хеле-Шоу (1.1) или нет. В то же время, если из каких-то дополнительных соображений этот факт установлен (как, например, здесь), то метод Ховисона можно использовать для интегрирования динамической задачи типа (5.2). Покажем это.

**8. Интегрирование динамической системы (5.2).** Пусть свободные параметры удовлетворяют задаче (5.2). Тогда уравнение (4.4) выполняется во всей плоскости  $\zeta$ , а уравнение (7.1) – в замыкании области  $\bar{\Omega}_z(t)$ . При учете регулярности в  $\bar{\Omega}_z(t)$  функции  $\partial W/\partial z$  имеем соотношение

$$z \in \bar{\Omega}_z(t): \partial S/\partial t = O(1) \tag{8.1}$$

Особенности функции  $r(\zeta, t)$  – это бесконечность и точки  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$ . Соответственно особенности функции  $S(z, t)$  – это бесконечность и точки  $z = B_j(t)$ , образы точек  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$  при отображении  $z = g(\zeta, t)$

$$B_j(t) = g(\zeta, t)|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)} \tag{8.2}$$

Проанализируем поведение функции  $S(z, t)$  в окрестности точек  $B_j(t)$ . Ввиду регулярности функции  $g(\zeta, t)$  в точке  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$  можно выписать ряд Бурмана – Лагранжа [16] (штрих означает производную по  $\zeta$ )

$$\zeta - \bar{b}_j^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n}(t)(z - B_j)^n, \quad A_{j,1}(t) = \frac{1}{g'|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}}}, \quad A_{j,2}(t) = -\frac{g''}{2(g')^3}\bigg|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}}, \dots \tag{8.3}$$

Тогда из представления (4.6) находится главная часть лорановского разложения комбинации  $S(z, t) - \bar{d}_{j,0} \ln[z - B_j(t)]$  в окрестности точки  $B_j(t)$

$$S(z, t)|_{z \rightarrow B_j} = \bar{d}_{j,0} \ln[z - B_j(t)] + \sum_{k=1}^{K_j} D_{j,k}(t)[z - B_j(t)]^{-k} + O(1) \tag{8.4}$$

Коэффициенты разложения  $D_{j,k}(t)$  могут быть выражены через совокупность коэффициентов  $\{\bar{d}_{j,k}(t), A_{j,k}(t), k = 1, \dots, K_j\}$ . В частности, приведем вид коэффициента при старшем члене разложения

$$D_{j,K_j}(t) = -K_j^{-1} \bar{d}_{j,K_j}(t) A_{j,1}^{-K_j}(t) \tag{8.5}$$

Из представления (8.4) функции Шварца  $S(z, t)$  следует, что соотношение (8.1) в окрестности точки  $B_j(t)$  может быть удовлетворено только при выполнении следующих условий типа закона сохранения

$$B_j(t) = B_j(0), \quad D_{j,k}(t) = D_{j,k}(0); \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1; \quad k = 1, \dots, K_j \tag{8.6}$$

Соответствующие законы сохранения для  $j \geq J_0 + J_1 + 1$  будут, очевидно, выполняться автоматически ввиду разбиения (2.6).

Аналогичным образом можно получить законы сохранения из анализа поведения функции Шварца  $S(z, t)$  в окрестности бесконечности. Принципиальное различие только в том, что бесконечность не является точкой регулярности отображающей функции  $z = g(\zeta, t)$ . Поэтому сначала введем вспомогательные переменные  $\omega$  и  $u$ :  $\omega = \zeta^{-1}$ ,  $u = e^{-\pi z}$  и с учетом вида (2.5) функции  $g(\zeta, t)$  найдем зависимость

$$u(\omega, t) = \omega e^{-\pi\Psi}, \quad \Psi(\omega, t) = t + \sum_{j=1}^J \left[ d_{j,0} \ln(\omega - b_j^{-1}) - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d_{j,k}}{(\omega - b_j^{-1})^k} \right] + \sum_{m=1}^M \beta_m \omega^m \quad (8.7)$$

Бесконечности в плоскости  $\zeta$  отвечает  $\omega = 0$  – точка регулярности функции  $u(\omega, t)$ . Поэтому можно выписать ряд Бурмана – Лагранжа [16]

$$\omega(u, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\infty,n}(t) u^n, \quad A_{\infty,1}(t) = e^{\pi\Psi(0,t)}, \quad A_{\infty,2}(t) = e^{\pi\Psi(0,t)}, \dots$$

и, переходя в выражении (4.6) к переменной  $z$ , получить оценку

$$S(z, t)|_{\text{Re}z \rightarrow -\infty} = t + \left( 1 - \pi \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \right) [\Psi(0, t) - z] + R \quad (8.8)$$

где

$$R = \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m(t)}{\omega^m} \Big|_{\omega = \omega(u, t)} + o(1) = \sum_{m=1}^M \beta_m(t) u^{-m} \left[ \sum_{n=0}^M A_{\infty, n+1}(t) u^n \right]^{-m} + o(1) \quad (8.9)$$

Поскольку бесконечности  $\text{Re}z \rightarrow \infty$  отвечает точка  $u = 0$ , можно найти главную часть лорановского разложения функции  $R(u, t)$  в окрестности этой точки. Сделав затем подстановку  $u = e^{-\pi z}$ , получим

$$R = \sum_{m=1}^M D_{\infty,m}(t) e^{\pi m z} + D_{\infty,0}(t) + o(1), \quad D_{\infty,M}(t) = \beta_M(t) e^{-\pi\Psi(0,t)}, \dots \quad (8.10)$$

Коэффициенты  $\{D_{\infty,k}(t), k = 1, \dots, M\}$  главной части разложения выражаются через совокупность коэффициентов  $\{\beta_m(t), A_{\infty,m}(t), m = 1, \dots, M\}$ .

Из представления (8.8), (8.10) функции Шварца  $S(z, t)$  следует, что соотношение (8.1) в окрестности бесконечности может быть удовлетворено только при выполнении следующих условий типа закона сохранения:

$$D_{\infty,m}(t) = D_{\infty,m}(0), \quad m = 1, \dots, M \quad (8.11)$$

Общее число законов сохранения (8.6), (8.11) совпадает с числом свободных параметров (5.1). Следовательно, динамическая задача полностью проинтегрирована. Используя выражения (8.2), (8.3), (8.5), (8.10), легко выписать явный вид некоторых первых интегралов.

Коэффициент  $D_{\infty,0}(t)$  разложения (8.10) необходим для получения зависимости  $\theta(t)$ , с помощью которой конструируется решение задачи для расхода в канале  $Q(\theta) = 1$  (см. разд. 6). Действительно, очевидная оценка  $\partial W/\partial z = Q_*(t) + o(1)$  в бесконечности позволяет получить явный вид члена порядка единицы в правой части соотношения (8.1). Соот-

ветствующие члены левой части устанавливаются из оценки (8.8), (8.10). В результате найдем

$$2Q_*(t) = 1 + \left( 1 - \pi \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \right) \Psi'(0, t) + D'_{\infty,0}(t)$$

и с помощью соотношения (6.3) получим

$$2\theta(t) = t + \left( 1 - \pi \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \right) [\Psi(0, t) - \Psi(0, 0)] + [D_{\infty,0}(t) - D_{\infty,0}(0)] \tag{8.12}$$

Аналогично остальным коэффициентам  $D_{\infty,k}(t)$  коэффициент  $D_{\infty,0}(t)$  может быть выражен через совокупность коэффициентов  $\beta_m(t)$ ,  $A_{\infty,m}(t)$ , однако выражение будет громоздким. Учитывая полезность формулы (8.12), укажем альтернативный способ вычисления коэффициента  $D_{\infty,0}(t)$ . По смыслу он равен вычету функции  $u^{-1}R(u, t)$  в точке  $u = 0$  [16]:

$$D_{\infty,0}(t) = \operatorname{res}_0[u^{-1}R(u, t)] \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_u} u^{-1}R(u, t) du$$

где  $\gamma_u$  – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке  $u = 0$ . Поскольку этой точке отвечает  $\omega = 0$  – точка регулярности функции  $u(\omega, t)$ , от интегрирования по  $u$  можно перейти к интегрированию по  $\omega$ :

$$D_{\infty,0}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\omega} P(\omega, t) d\omega \equiv \operatorname{res}_0 P(\omega, t), \quad P(\omega, t) = R(u, t) \frac{\partial \ln u}{\partial \omega}, \quad u = u(\omega, t)$$

где  $\gamma_\omega$  – окружность с центром в точке  $\omega = 0$ , образ окружности  $\gamma_u$  при отображении  $\omega(u, t)$ . Подставляя сюда выражения (8.7), (8.9), найдем

$$P(\omega, t) = \left[ \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m(t)}{\omega^m} + o(1) \right] \left[ \frac{1}{\omega} - \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^{K_j+1} \frac{\pi d_{j,k-1}}{(\omega - b_j^{-1})^k} - \pi \sum_{m=1}^M m \beta_m \omega^{m-1} \right] \tag{8.13}$$

Слагаемое, содержащее двойную сумму, в окрестности точки  $\omega = 0$  можно разложить в ряд Тейлора с коэффициентами [22]

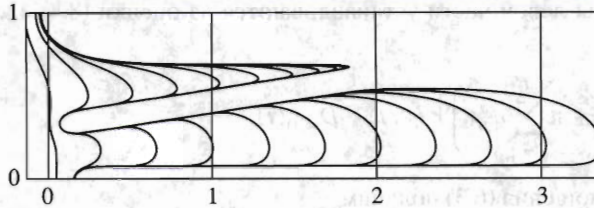
$$E_n(t) = \pi \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_j+1} (-1)^{k+n} \binom{-k}{n} d_{j,k-1}(t) b_j^{k+n}(t), \quad n \geq 0$$

Тогда коэффициент  $D_{\infty,0}(t)$  находится непосредственно из выражения (8.13) как вычет функции  $P(\omega, t)$  в точке  $\omega = 0$

$$D_{\infty,0} = - \sum_{m=1}^M \beta_m(t) [E_{m-1}(t) + \pi m \beta_m(t)]$$

**9. Обсуждение результатов.** Заметим, что первая группа законов сохранения в выражении (8.6) непосредственно следует и из динамических уравнений (5.8). Действительно, учитывая, что первый коэффициент имеет вид  $C_{j,0}(t) = \mathbb{U}_f(\zeta, t)$ , где  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$ , уравнение (5.8) преобразуем к виду

$$\partial \bar{b}_j^{-1} / \partial t = \mathbb{U}_f(\zeta, t) |_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)}, \quad j = 1, \dots, J_0 + J_1$$



Фиг. 2

Это означает, что точки  $\bar{b}_j^{-1}(t)$  плоскости  $\zeta$  переносятся векторным полем  $\mathcal{U}(\zeta, t)$ . В соответствии с механической аналогией разд. 3 отображение  $(\phi, g)$  переводит точки  $\bar{b}_j^{-1}(t)$  плоскости  $\zeta$  в их образы  $B_j(t)$  в плоскости  $z$ , см. формулу (8.2). Движение образов описывается векторным полем  $\mathcal{V}_j(z, t) \equiv 0$ , т.е. положение точек  $B_j(t)$  в плоскости  $z$  не меняется [11], что фактически и выражает первая группа законов сохранения (8.6).

Остальные законы сохранения в выражениях (8.6), (8.11) не имеют такой ясной механической интерпретации, что подчеркивает значимость метода Ховисона интегрирования динамической системы (5.2).

Отметим характер условия (2.4). Его надо удовлетворить только в начальный момент времени, выбрав значения свободных параметров (5.1) так, чтобы все сингулярности отображающей функции  $g(\zeta, 0)$  лежали внутри единичного круга. С течением времени положение сингулярностей меняется, однако по непрерывности условие (2.4) удовлетворяется еще, по крайней мере, некоторое время. В какой-то момент к границе единичного круга может приблизиться и полюс  $b_j(t)$ , и нуль  $a_n(t)$  производной  $dg/d\zeta$ . В первом случае ситуация не критична: полюс приближается к межфазной границе  $\Gamma(t)$ , но никогда не достигает ее [10]. При этом на  $\Gamma(t)$  формируется щель, разделяющая два пальца (расщепление верхушки пальца). Во втором случае ситуация критична: на межфазной границе образуется точка заострения, скорость в этой точке становится бесконечной, и классическое решение задачи перестает существовать [19] (пример – решение П.Я. Полубариновой – Кочиной [5] для кардиоиды).

Таким образом, построено точное решение задачи пальцеобразования в канале Хеле-Шоу общего вида из класса параметризованных решений, для которого частные производные отображающей функции рациональны во вспомогательной плоскости. Оно содержит все известные точные решения [10], но в отличие от них допускает несимметрию относительно оси канала и свободу выбора порядка полюсов – сингулярностей отображающей функции во вспомогательной плоскости. Для свободных параметров решения выписана обобщенная задача динамики системы, показана ее полная интегрируемость. Последний факт не умаляет значимости динамической формулировки задачи, поскольку при конкретных расчетах лучше использовать ее, а законы сохранения, по сути нелинейные алгебраические уравнения, привлекать для оценки точности интегрирования.

На фиг. 2 приведен пример расчета формирования в канале несимметричного пальца, аналогичного найденному ранее [23] в асимптотическом пределе  $t \rightarrow \infty$ , когда начальные значения свободных параметров выбирались так:

$$b_1(0) = -b_2(0) = 0.6, \quad b_3(0) = 0.3 + i0.7, \quad b_4(0) = \bar{b}_3(0)$$

$$a_1(0) = a_2(0) = 0.2, \quad a_3(0) = 0.2143 + i0.5, \quad a_4(0) = \bar{a}_3(0)$$

Тогда единственно ненулевыми значениями параметров  $d_{j,k}(t)$  будут постоянные:

$$d_{1,0} = 0.04863, \quad d_{2,0} = 0.1987, \quad d_{3,0} = 0.0445 + i0.006714, \quad d_{4,0} = \bar{d}_{3,0}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00484, 05-01-00516).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
2. *Paterson L.* Radial fingering in a Hele Shaw cell // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 513–529.
3. *Окендон Дж.Р., Ховисон С.Д.* П.Я. Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике // ПИММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 515–524.
4. *Alexandrou A.N., Entov V.M., Kolganov S.S., Kolganova N.V.* On bubble rising in a Hele-Shaw cell filled with a non-Newtonian fluid // Europ. J. Appl. Math. 2004. V. 15. № 3. P. 315–327.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о движении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254–257.
6. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 246–249.
7. *Куфарев П.П.* Решение задачи о контуре нефтеносности для круга // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 8. С. 1333–1334.
8. *Saffman P.G.* Exact solutions for the growth of fingers from a flat interface between two fluids in a porous medium or Hele-Shaw cell // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12. Pt 2. P. 146–150.
9. *Shraiman B., Bensimon D.* Singularities in nonlocal interface dynamics // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. № 5. P. 2840–2842.
10. *Howison S.D.* Fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 439–453.
11. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Europ. J. Appl. Math. 1992. V. 3. № 3. P. 209–224.
12. *Cummings L.M., Hohlov Y.E., Howison S.D., Kornev K.G.* Two-dimensional solidification and melting in potential flows // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 1–18.
13. *Markina I., Vasil'ev A.* Explicit solutions for Hele-Shaw corner flows // Europ. J. Appl. Math. 2004. V. 15. № 6. P. 1–9.
14. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1924 = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
15. *Алимов М.М.* Особенности конструирования решения стационарных и нестационарных задач Хеле-Шоу // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2004. Т. 27. С. 19–29.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
17. *Davis P.J.* The Schwarz Function and its Applications. Washington.: Math. Assoc. America, 1974. 228 p.
18. *Wiegman P.W., Zabrodin A.* Conformal maps and integrable hierarchies // Commun. Math. Phys. 2000. V. 213. № 3. P. 523–538.
19. *Hohlov Y.E., Howison S.D.* On the classification of solutions to the zero-surface-tension model for Hele-Shaw free boundary flows // Quart. Appl. Math. 1993. V. 51. № 4. P. 777–789.
20. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
21. *Schutz B.F.* Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge: Univ. Press, 1982 = *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984. 304 с.
22. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
23. *Taylor G.I., Saffman P.G.* A Note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12. P. 265–279.